مفهوم الزمرة (Group)

(م.د. غالب احمد حمود)

ghaleb.a.h@ihcoedu.uobaghdad.edu.iq

قسم الرياضيلت، كلية التربية للعلوم الصرفة / ابن الهيثم ، جامعة بغداد، بغداد.العراق

طريقة واحدة للانطلاق نحو استيعاب الزُمَرْ، تلك البُنيات المُجردة، المخيفة بعض الشيء، والتي تنتمي الى مجال الجبر، وهي التفكير في مدار الــ١٢ ساعة، يمكنك اضافة ساعات على هذه الساعة، على سبيل المثال :

الــ٢ تماما +٤ساعات= الــ٦ تماما

الـ٨ تماما +٥ساعات= الـ١ تماما

الـ٣ تماما + ١٢ ساعة= الـ٣ تماما

أمر واحد نميزه هنا، أنه مهما يكن عدد الساعات التي تُضيفها، الاجابة دائما ما تكون رقما ما بين١ و١٢. وبهذا المعنى، الاضافة على مدار الـ١٢ ساعة مُغلق: لن يحصل قط أن تخرج من نطاق الـ١ الى الــ١٢

أمر آخر نميزه. أن اضافة ١٢ ساعة تُعيدك من حيث بدأت (وكأنك لم تفعل شيء) : من أجل أي زمن بدء a، لدينا

$$a + 12 = a$$

وهذا هو سبب امكانية أن نساوي تماما في كتابة الــ٠ من أجل العدد ١٢ في ساعاتنا وذلك على مستوى العالم. ميزة أخرى مثيرة للاهتمام، وهي عند اضافتك لعدد aمن الساعات، باستطاعتك العودة من حيث بدأت باضافة $12-a$ ساعة، أخرى. على سبيل المثال، بدأت من الساعة الــ١ تماما وأضفت٧ مما يعطيك

1+7=8

ثم أضفت (١٢-٧)=٥ ساعة أخرى، ما يعطيك

8+5=1

ومنه اضافة a ثم $12-a$ تُماثل كونك لم تفعل شئ: أو تُكافئ، اضافة١٢

بأخذ خطوة صغيرة نحو التجريد، يمكننا وصف الــ١٢ ساعة في علم الحساب كالآتي. لدينا مجموعة S التي تتألف من الأعداد ١ الى ١٢ وعملية ثنائية تدمج اي عنصرين منٍ S لاعطاء ثالث (العملية هي اضافة مودولو 12 في مثالنا). المجموعة والعملية تحقق القواعد الثلاثة التالية

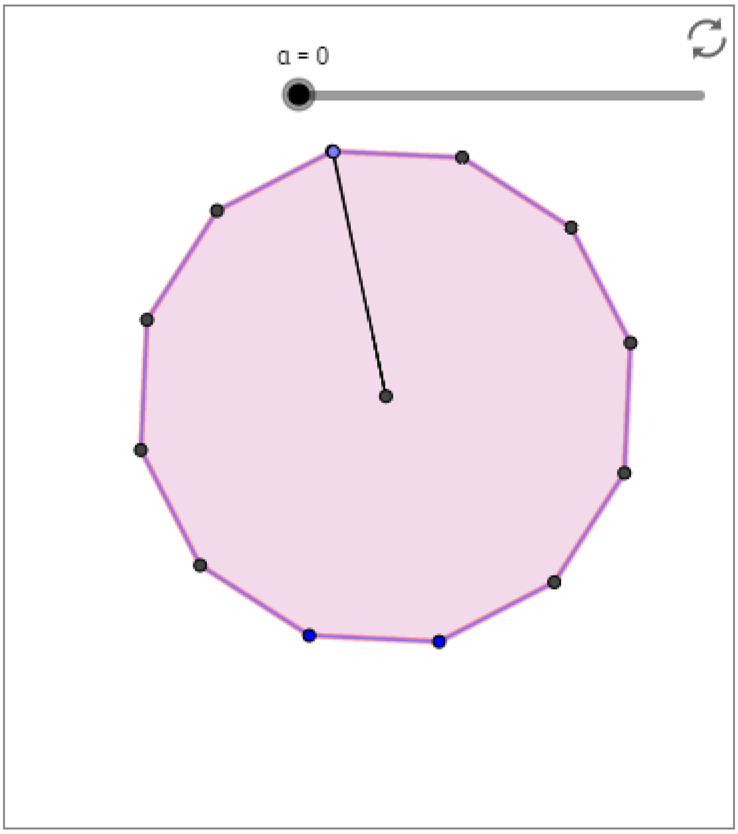
- كلما قمت بجمع عنصرين من المجموعة Sالنتيجة هي أيضا عنصر منS، عملية الجمع مُغلقة
- هناك عنصر من Sفي حالتنا الرقم ١٢، بحيث عند اضافة هذا العنصر الى أي عنصر آخر a من S ، النتيجة هي a. هذا العنصرفي S يُدعى المُحايد
- لكل عنصر a من S هناك عنصر آخر bمنS، بحيث $a+b$ مُساوية للمُحايد في S.العنصر a يُدعى (مُعاكس او عكسي، مُتمم) a في مثال الساعة، مُعاكس a هو $12-a$ الموضح فيما سبق

هناك أيضا قاعدة رابعة مُحققة بواسطة مجموعتنا وعمليتنا

- لكل ثلاثة عناصر a و b و c من S لدينا $a+(b+c)=(a+b)+c$.
بعبارة أخرى، أنه لا يهم فيما اذا ما قمت باضافة العدد الثالث الى مجموع العددين الأولين، أو اذا ما قمت باضافة مجموع العددين التاليين الى العدد الأول

هناك العديد من البنيات الأخرى التي تحقق ايضا هذه القواعد. وكمثال على ذلك، فكر في مضلع منتظم من ١٢-ضلع، كالموضح في الصورة على اليسار. يمكنك تدوير هذا الشكل حول مركزه بــ ٣٠ درجة ، في اتجاه عقارب الساعة، وسينتهي بك المطاف مع نفس الشكل الذي كنت قد بدأت به. الدوران هو تناظر في المضلع المنتظم ذو الــ١٢-ضلع. الآن دعوا مجموعتناSتتألف

من جميع الدورانات في اتجاه عقارب الساعة من مضاعفات ٣٠ درجة. ومنه ٣٠ درجة، ٦٠درجة، ٩٠درجة، الــخ، جميع التقدُمات وصولا الى ٣٣٠ درجة...وأخيرا، الدورة الكاملة (كل هذه تناظرات من الـ١٢-ضلع) فكر في جمع دورانين عند قيامك باحداها تلو الأخرى: الدوران بــ٦٠ درجة + الدوران بــ٩٠ درجة تساوي الدوران بــ١٥٠ درجة



هذه البُنية تشكل زُمرَة. الجمع مُغلق لأنه عندما تُتبع دوران واحد باتجاه عقارب الساعة من مضاعفات ٣٠ درجة، بآخر. النتيجة هي أيضا دوران باتجاه عقارب الساعة من مضاعفات ٣٠ درجة. هناك أيضا عنصر مُحايد، نعني به أي دوران بــ٣٦٠ درجة. لكل دوران يوجد دوران مُعاكس، بحيث الدمج بين الاثنين يعطينا نفس نتيجة الدوران المُحايد (بــ٣٦٠ درجة). على سبيل المثال، مُعاكس الدوران بــ٣٠ درجة هو الدوران بــ٣٣٠ درجة

بشكل عام، الزُمرَة: هي مجموعة Sمن عناصر مُدمجة مع عملية ثنائية تحقق القواعد الأربعة أعلاه. مثالينا السابقين هما من نوع الزمرة المنتهية، أين المجموعة S تتكون من عدد منته من العناصر. لكن هناك زُمر غير

منتهية. مجموعة الأعداد الصحيحة (بما في ذلك الأعداد السالبة) مع عملية الجمع تُشكل زمرة غير منتهية

من المثير للاهتمام الاشارة أنه يمكن أن تتكون زمرتين من مقادير مختلفة وتشتمل على عمليات مختلفة، لكن تبقى لديهما نفس البنية. ومن باب المصادفة، الزمرتين اللتين رأيناهما قبل قليل، مثال على ذلك. في مثالنا عن نمط الساعة أعلاه، اضافة ساعة واحدة يتوافق مع تحويل عقرب الساعة باتجاه عقارب الساعة بــاثنا عشر من التحويلات (مضاعفات الــ١٢) ما يوافق ٣٠ درجة في المثال الآخر اضافة bساعة يتوافق مع تحويل عقرب الساعة بمقدار b من الاثناعشر من التحويلات الكاملة ما يوافق $30 \times b$ درجة. في الواقع، عناصر نمط الساعة (الأعداد ١ الى١٢) تتصرف في اطار مجموع المودولو الخاص بها، تماما بنفس طريقة تصرف عناصر زمرة دوران مضلعنا

$$a + b = c$$

من الــ١٢ضلع في اطار فكرتنا عن المجموع. اذا كان، في نمط زمرة الساعة،وبالتالي فأنت تعلم على الفور أنه وفي زمرة الدوران، فان الدوران بمقدار $30 \times a$ $30 \times a$ درجة يليه دوران بمقدار $30 \times b$ درجة يعطينا دوران بمقدار $30 \times c$ درجة. والعكس بالعكس، الزمرتين تميل الى أن تكونا متساويتي الشكلتشاكل تقابلي من أجل االتعريف التقني، غالبا ما يجد علماء الرياضيات أن الزمرة

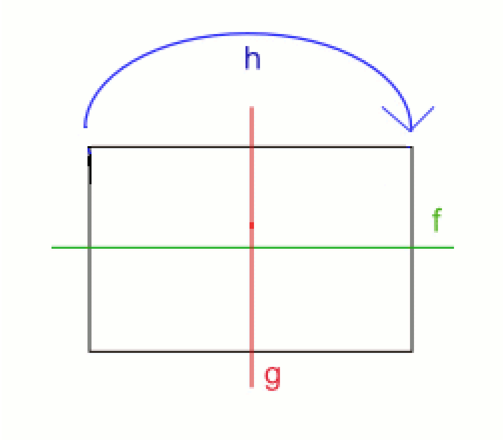
التي تنشأ في سياق واحد هي متشاكلة تقابليا الى زمرة أخرى من سياق مختلف تماما

x	e	f	g	h
e	e	f	g	h
f	f	e	$\boxed{h}$	g
g	g	h	e	f
h	h	g	f	e

وهذا هو السبب في أن يكون هناك معنى من وراء التفكير في الزُمر. لا بوصفها تركيبات من الدورانات أو الأعداد أو نوع معين آخر من المقادير، لكن بوصفها تجميع لمقادير مجردة (يمكننا استخدام الحروف للدلالة على هذه المقادير) والتي تُدمج بطريقة محددة في اطار عملية ثنائية. يمكنك تتبع كيفية الدمج في جدول، من مثل الجدول الموضح على اليمين. لنرى نتيجة مجموع، علينا ايجاد الخلية (الخانة) التي

$$f + g$$

تتوافق مع الصف f والعمود g والتي تعطينا h ومنه $f + g = h$ الرمز e في هذا الجدول يتعلق بمُحايد الزمرة



الزمرة التي يصفها هذا الجدول تُعرف بـ :كلاين ٤-كروب .وهي تشاكل تقابلي لزمرة التناظر (التماثل) في المستطيل، نكتب eمن أجل التناظر المُحايد فعل لا شئ، f من اجل الانعكاس في المحور الأفقي، g من أجل الانعكاس في المحور العمودي و hمن أجل الدوران بـــ١٨٠ درجة. باستخدام هذا التمثيل المُجرد، باستطاعتك وصف زُمر متشاكلة تقابليا، حتى وان كانت تنشأ في سياقات مختلفة جدا، دفعة واحدة .وهذه هي قوة التجريد

المصادر :

1. D. M. Burton, Elementary Number Theory, 7th edn, McGraw-Hill Higher Education, Dubuque, 2010.

2. J. B. Fraleigh, A First Course in Abstract Algebra, 7th edn, Addison Wesley, New York, 2002.
3. W. Knapp, Advanced Algebra, Birkhäuser, Boston, 2007.
4. T. W. Hungerford, Algebra, Springer, New York, 1974.