جامعة بغداد

كلية التربية للعلوم الصرفة/ابن الهيثم

قسم الفيزياء

المرحلة الثانية

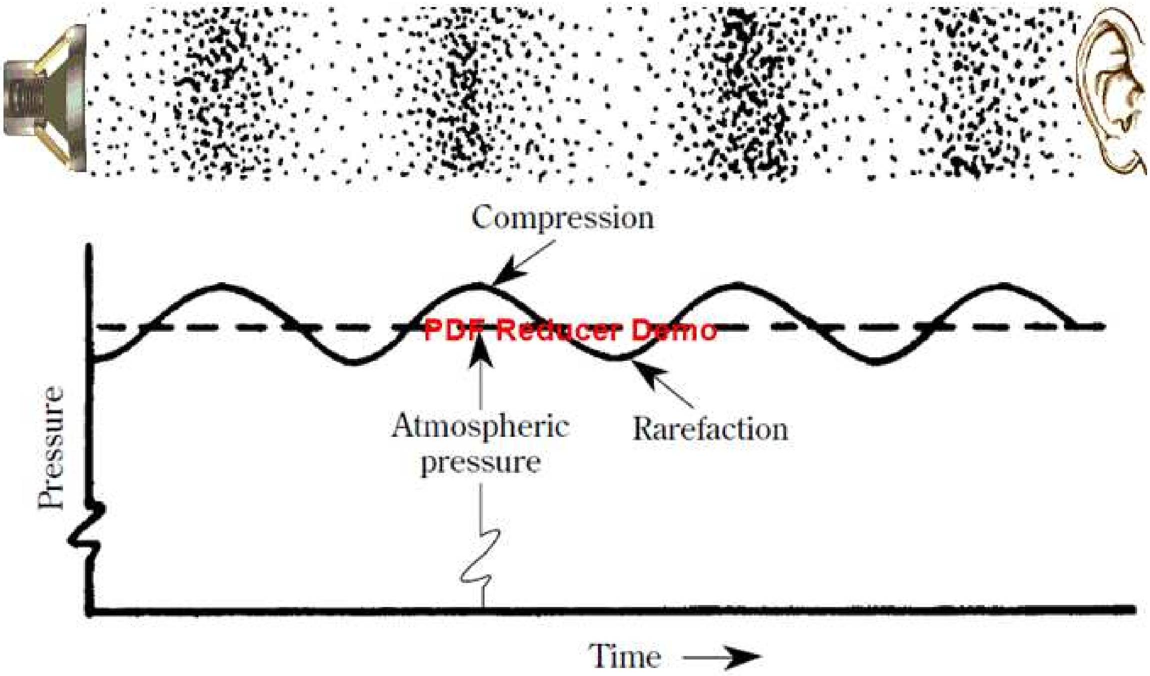
العام الدراسي: 2019–2020

محاضرات في مادة

الصوت و الحركة الموجية

إعداد

م.د. عماد هادي خليل



الفصل الأول

الصوت: المنشأ و الانتقال

1.1 الصوت

2.1 علم الصوت

3.1 المعنى السيكولوجي للصوت

4.1 المعنى الفيزياوي للصوت

5.1 شروط حدوث الصوت وانتقاله

يتضمن هذا الفصل مقدمة عامة تتعلق بتعريف الصوت والعلم الذي يهتم بدراسته (علم الصوت)، والمعنى السيكولوجي والمعنى الفيزياوي للصوت. وثم نتطرق لكيفية حدوث الصوت (نشأته) والشروط التي يجب ان يمتلكها وسط معين لينتشر الصوت من خلاله.

1.1 الصوت (Sound):

هو اي اضطراب تضاغطي ينتقل في المادة (سائل، صلب، غاز) بحيث يسبب حركة طبلة الاذن والذي بدوره يؤدي الى الاحساس بالسمع.

2.1 علم الصوت (Acoustics):

هو العلم الذي يعنى بدراسة الصوت (sound) من حيث نشأته (تولده) (generation)، انتقاله (transmission)، استقباله (reception)، وتأثيراته (effects).

3.1 المعنى السيكولوجي للصوت:

يقصد بالسيكولوجي (Psychology) علم النفس والذي يعنى بدراسة سلوك الانسان والعوامل المؤثرة عليه، وبالتالي يكون المقصود بالمعنى السيكولوجي للصوت هو الاثر النفسي الذي يسببه الصوت في سلوك الفرد، وهذا المجال هو خارج اختصاص دراستنا.

4.1 المعنى الفيزياوي للصوت:

يقصد به دراسة الخواص الفيزيائية للموجات الصوتية من حيث كيفية تولدها من جسم مهتز وانتقالها عبر المادة والتأثيرات التي ترافق انتقالها. وهذا هو مجال دراستنا الحالية.

بالإضافة لما ذكر، هناك فرع آخر من المعرفة يهتم بدراسة الصوت من ناحية فسيولوجية (Physiology) (يقصد بالفسيولوجي علم وظائف الاعضاء) والذي يهتم بدراسة تركيب الجهاز السمعي للإنسان (والذي يتكون من الاذن الخارجية، الاذن الوسطى، الاذن الداخلية، العصب السمعي، و المركز السمعي في الدماغ) وكيفية قيامها بعملية بالتحسس بالصوت.

5.1 شروط حدوث الصوت و انتشاره:

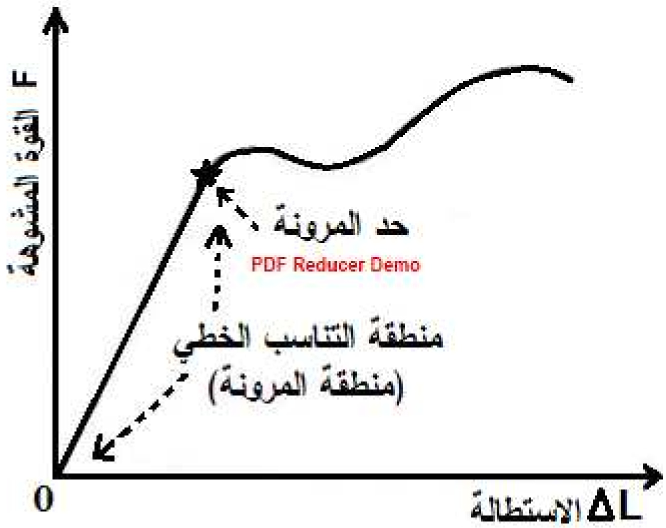
هناك شرطان اساسيان لحدوث الصوت وانتشاره هما:

1- وجود جسم مهتز بحيث يصدر موجات تضاغطية (مثل وتر مهتز).
2- وجود وسط مادي لنقل الصوت، ويشترط في الوسط المادي ان تتوفر فيه خاصيتان وهما المرونة والقصور الذاتي. وفيما يلي شرح لهاتين الخاصيتين:

أولاً: خاصية المرونة (Elasticity):

هي قابلية الوسط على مقاومة اي تشوه فيه وقابليته على استعادة شكله او حجمه او وضعه بعد زوال القوة المشوهة المؤثرة عليه.

القانون الذي يصف سلوك المواد المرنة هو قانون هوك (Hooke's law) والذي ينص على ان اي قوة خارجية تسلط على جسم ما تحدث فيه تشوهاً يؤدي الى تغير في الشكل او الحجم او كليهما ومقدار ذلك التشوه يتناسب خطياً مع قيمة القوة المشوهة $(\Delta L \propto F)$ ضمن حدود المرونة (Elastic limit).



الشكل المجاور يمثل منحنى العلاقة بين قيمة القوة المشوهة المسلطة على سلك وقيمة الاستطالة الحاصلة في طول السلك نتيجة لتأثير القوة المشوهة. حيث يلاحظ ان قيمة الاستطالة تتزايد بشكل خطي مع زيادة القوة المشوهة (علاقة خطية)، ويستمر ذلك السلوك لقيمة حدية معينة للقوة المشوهة (حد المرونة) وبعدها تفقد المادة خاصية المرونة لا يمكنها العودة الى وضعها الاصلي بعد زوال المؤثر.

يمكن التعبير عن قانون هوك بطريقة ثانية بدلالة الاجهاد والانفعال وكما يلي:

الاجهاد (Stress):

هو القوة المطبقة على وحدة المساحة من السطح الذي تطبق عليه القوة، أي ان:

$$\text{Stress} = \frac{F}{A}$$

وحدة الإجهاد في النظام العالمي للوحدات هي (N/m^2) ويطلق عليها باسكال $(Pa = N/m^2)$.

الانفعال (المطاوعة) (Strain):

هو النسبة بين مقدار التشوه في الجسم الذي تسببه القوة المشوهة الى بعده الاصلي قبل التشوه. اي ان:

$$\text{Strain} = \frac{\text{مقدار التشوه}}{\text{البعد الاصلي}}$$

حسب قانون هوك فان الانفعال الذي تعاني منه المادة يتناسب خطياً مع الاجهاد الذي تتعرض له المادة جراء تسليط القوة المشوهة ضمن حدود المرونة، اي ان (الاجهاد α الانفعال).

يسمى ثابت التناسب بمعامل المرونة (Modulus of Elasticity) ويرمز له بالرمز (E) اي ان:

$$E = \frac{\text{Stress}}{\text{Strian}}$$

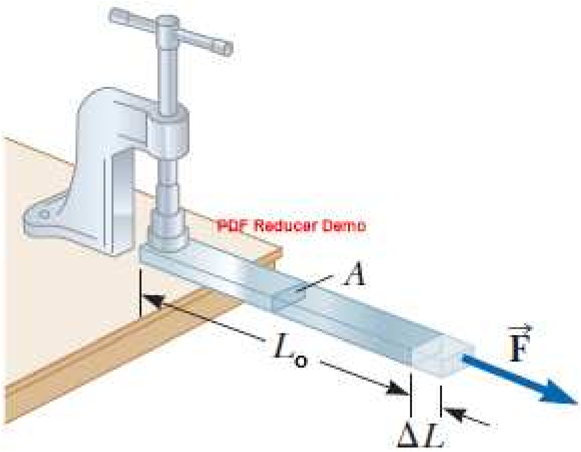
وحيث ان الانفعال ليس له وحدات، لذا تكون وحدات معامل المرونة (E) هي نفسها وحدات الإجهاد (اي ان وحدات معامل المرونة هي الباسكال).

هناك ثلاث انواع مختلفة من معاملات المرونة وذلك بالاعتماد على طبيعة المادة والشكل الهندسي ونوع التشوه الذي تحدثه القوة المسلطة على المادة. وهذه الانواع الثلاثة هي كالتالي:

1-معامل المرونة الطولي (الخطي) و يسمى معامل يونك (Young's Modulus)

يستعمل هذا المعامل عند وصف استطالة سلك او قضيب تحت تأثير قوة شد معينة (F) كما هو موضح بالشكل المجاور.

حيث يمثل معامل يونك النسبة بين الاجهاد الطولي (Tensile stress) الى الانفعال الطولي (Tensile strain)، ويعطى بالصيغة:



$$Y = \frac{\text{Tensile Stress}}{\text{Tensile Strian}}$$

ان الإجهاد الطولي يمثل النسبة بين قيمة القوة العمودية (F_n) الى مساحة المقطع العرضي (A) ، بينما يمثل الانفعال الطولي النسبة بين التغير في الطول (ΔL) الى الطول الاصلي (L_o)، اي ان:

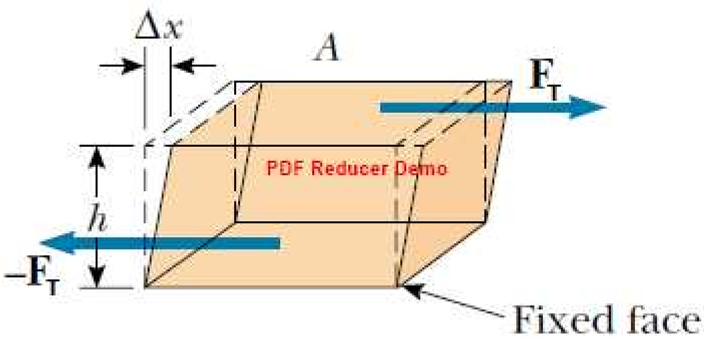
$$\text{Tensile Stress} = \frac{F_n}{A} \quad , \quad \text{Tensile Strian} = \frac{\Delta L}{L_o}$$

بالنتيجة يمكن كتابة الصيغة النهائية لمعامل يونك بالصيغة:

$$Y = \frac{\left(\frac{F_n}{A}\right)}{\left(\frac{\Delta L}{L_o}\right)}$$

2- معامل القص (Shear Modulus)

يحدث هذا النوع من التشوه عندما تؤثر قوة مماسية على احد وجوه جسم صلب بينما يكون الوجه المقابل مثبت بواسطة قوة ثانية كما هو موضح بالشكل المجاور.



يعرف معامل القص (Shear Modulus) (ويسمى ايضاً معامل الصلادة) بانه النسبة بين اجهاد القص الى انفعال القص الناتج عن التشوه في الشكل الهندسي للجسم الصلب دون ان يصاحبه تغير في الحجم. حيث يمثل إجهاد القص (Shear stress) النسبة بين قيمة القوة المماسية (F_T) إلى مساحة الوجه المعرض للقص (A)، اما انفعال القص (Shear strain) فهو النسبة بين الإزاحة الأفقية (Δx) التي تسببها القوة المماسية للوجه المتحرك إلى ارتفاع الجسم (h) (المسافة العمودية بين الوجه المتحرك والثابت).

يعرف معامل القص بالصيغة:

$$\text{Shear modulus (S)} = \frac{\text{Shear Stress}}{\text{Shear Strian}}$$

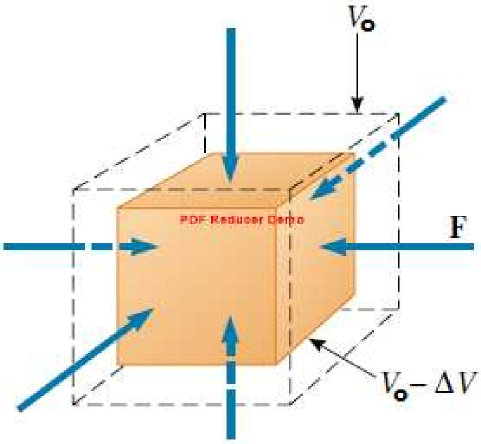
وحيث ان:

$$\text{Tensile Stress} = \frac{F_T}{A} \quad , \quad \text{Tensile Strian} = \frac{\Delta x}{h}$$

وبالتالي يعطى معامل القص بالصيغة:

$$S = \frac{\left(\frac{F_T}{A}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{h}\right)}$$

3-معامل المرونة الحجمي (Bulk Modulus)



يتعلق معامل المرونة الحجمي بتعرض جسم ما الى زيادة (او نقصان) في الضغط المنتظم المسلط عليه، بحيث تؤثر القوة الخارجية بشكل منتظم ومتساوي على جميع جوانب الجسم، مما يتسبب في تغير في الحجم (بالزيادة او النقصان) دون ان يصاحب ذلك تغير في شكل الجسم، وكما هو موضح بالشكل المجاور.

يعرف معامل المرونة الحجمي بانه النسبة بين الاجهاد الحجمي الى الانفعال الحجمي ويرمز له بالرمز B، ويعرف رياضياً بالصيغة:

$$\text{Bulk Modulus (B)} = \frac{\text{Volume Stress}}{\text{Volume Strain}} = -\frac{\left(\frac{\Delta F}{A}\right)}{\left(\frac{\Delta V}{V_o}\right)}$$

حيث ان الكمية $(\Delta F/A)$ تمثل التغير الضغط (يعرف الضغط بانه القوة العمودية المسلطة على وحدة المساحة) لذا يمكن كتابة الصيغة النهائية لمعامل المرونة الحجمي بالصورة:

$$B = -\frac{\Delta P}{\left(\frac{\Delta V}{V_o}\right)}$$

ان إشارة السالب وضعت للدلالة على ان معامل المرونة الحجمي هي كمية موجبة، فكما هو معروف ان هناك علاقة عكسية بين حجم الجسم والضغط المسلط عليه، فمثلاً عند زيادة الضغط (ΔP موجبة) فان ذلك يؤدي الى نقصان في الحجم (ΔV سالبة) والعكس بالعكس، وبالتالي تعمل اشارة السالب على جعل قيمة معامل المرونة موجبة دائماً. يمكن كتابة معامل المرونة الحجمي بالصيغة التفاضلية بالشكل التالي:

$$B = -V_o \frac{dP}{dV}$$

ان مقلوب معامل المرونة الحجمي يسمى **بالانضغاطية** (Compressibility) وهو مقياس لقابلية المادة للانضغاط ويرمز له بالرمز (K) (كما يرمز للانضغاطية احياناً بالرمز $\boldsymbol{\beta}$)، حيث تكون انضغاطية المواد السائلة عموماً اكبر من انضغاطية المواد الصلبة، وتعرف الانضغاطية رياضياً بالصيغة:

$$K = \frac{1}{B}$$

الجدول التالي يوضح القيم النموذجية لمعاملات المرونة لمجموعة من المواد:

Substance	Young's Modulus (N/m^2)	Shear Modulus (N/m^2)	Bulk Modulus (N/m^2)
Tungsten تنكستن	35×10^{10}	14×10^{10}	20×10^{10}
Steel فولاذ	20×10^{10}	8.4×10^{10}	6×10^{10}
Copper نحاس	11×10^{10}	4.2×10^{10}	14×10^{10}
Brass نحاس اصفر	9.1×10^{10}	3.5×10^{10}	6.1×10^{10}
Aluminum المنيوم	7.0×10^{10}	2.5×10^{10}	7.0×10^{10}
Glass زجاج	$6.5–7.8 \times 10^{10}$	$2.6–3.2 \times 10^{10}$	$5.0–5.5 \times 10^{10}$
Quartz كوارتز	5.6×10^{10}	2.6×10^{10}	2.7×10^{10}
Water ماء	—	—	0.21×10^{10}
Mercury زئبق	—	—	2.8×10^{10}

نسبة بواسون (σ) Poisson's Ratio

هي النسبة بين الانفعال العرضي الى الانفعال الطولي ضمن حدود المرونة، ويرمز لها بالرمز (σ)، فاذا كان لدينا وتر اسطواني منتظم من المطاط مثلاً طوله (L_o) وقطره (D_o) فعند تسليط قوة شد عليه فان طوله يزداد بمقدار (ΔL) وقطره ينقص بمقدار (ΔD) وعندها فان نسبة بواسون تعطى بالصيغة:

$$\sigma = -\frac{\left(\frac{\Delta D}{D_o}\right)}{\left(\frac{\Delta L}{L_o}\right)}$$

وضعت الاشارة السالبة في العلاقة لان زيادة الطول يرافقها عادة نقصان في السمك (العرض)، لذا تكون نسبة بواسون لمعظم المواد ذات قيمة موجبة وتتراوح قيم نسبة بواسون عادة بين (0.2) للزجاج الى (0.5) للمطاط. علماً بان هناك مواد معينة تمتاز بامتلاكها نسبة بواسون سالبة (اي يزداد سمكها عند زيادة طولها) يطلق عليها اوكسيتك (Auxetic)، وتمتاز تلك المواد بقابليتها على امتصاص الطاقة ومقاومة الانكسار مما يجعلها ملائمة للتطبيقات المتعلقة بالدروع الواقية من الرصاص ومواد امتصاص الصدمات.

ان معاملات المرونة الثلاث: معامل المرونة الطولي (معامل يونك) (Y)، معامل القص (S) و معامل المرونة الحجمي (B) ونسبة بواسون (σ) ترتبط مع بعضها وفق العلاقات:

$$Y = 2S(1+\sigma)$$

$$B = \frac{Y}{3(1-2\sigma)}$$

ثانياً: خاصية القصور الذاتي

ان خاصية القصور الذاتي تمثل صفة استمرارية الجسم او اجزاء الوسط المادي على البقاء في حالة حركية ثابتة مالم تؤثر عليه قوة خارجية تغير تلك الحالة، والقانون الذي يصف هذه الحالة هو قانون نيوتن الاول في الحركة والذي يسمى قانون الاستمرارية (الجسم الساكن او المتحرك بحركة منتظمة يبقى محافظاً على حالته الحركية ما لم تؤثر عليه قوة خارجية).

ترتبط خاصية القصور الذاتي لجسم ما بمقدار كتلة الجسم (مقدار ما يحتويه الجسم من مادة)، فكلما كانت كتلة الجسم اكبر كلما كانت مقاومته لتغيير حالته الحركية اكبر. وغالباً ما يعبر عن خاصية الاستمرارية او القصور الذاتي لأي جسم من خلال كتلة وحدة الحجوم اي الكثافة. وعليه فان القصور الذاتي لأي وسط مادي يزداد بازدياد كثافته. اي ان كثافة الوسط تحدد أثر القوة المؤثرة فيه. فكلما ازدادت كثافة الوسط قلت استجابته لتأثير القوة الخارجية فيه لتغيير حالته الحركية.

أسئلة الفصل الأول

س1: عرف كل من: 1- الصوت 2- علم الصوت 3- المرونة 4- معامل يونك
5- معامل القص 6- معامل المرونة الحجمي 7- نسبة بواسون 8- القصور الذاتي

س2: اشرح المعنى السيكولوجي والمعنى الفيزياوي للصوت؟

س3: اذكر شروط حدوث الصوت و انتشاره.

س4: بالاستفادة من معادلة الحالة للغاز المثالي $(PV = nRT)$ اثبت ان معامل المرونة الحجمي لغاز مثالي في حالة ثبوت درجة الحرارة يساوي ضغط الغاز $(\mathbf{B} = P)$.

س5: عُلق ثقل كتلته $(200kg)$ في طرف سلك طوله $(4m)$ ومساحة مقطعه العرضي $(0.2 \times 10^{-4} m^2)$ ومعامل يونك لمادة السلك $(8 \times 10^{10}\ N/m^2)$. ما مقدار استطالة السلك تحت تأثير ذلك الثقل.

س6: مكعب من الجلاتين أبعاده $(4 \times 4 \times 4\ cm)$ سلطت على سطحه العلوي قوة مماسية مقدارها $(0.8N)$ فازاحته مسافة $(2mm)$ في اتجاه القوة، احسب معامل القص للجلاتين.

س7: ما مقدار الزيادة في الضغط اللازم تسليطه لكي ينكمش حجم من الماء بمقدار (1.5%)، علما ان معامل المرونة الحجمي للماء هو $(0.21 \times 10^{10}\ N/m^2)$.

الفصل الثاني

نظرية الاهتزاز الحر

1.2 الحركة الاهتزازية

2.2 الحركة التوافقية البسيطة

3.2 حل معادلة الحركة التوافقية البسيطة

4.2 طاقة المهتز التوافقي البسيط

5.2 تطبيقات على الحركة التوافقية البسيطة

1.5.2 البندول البسيط

2.5.2 كتلة متصلة بين نابضين متماثلين

3.5.2 البندول الفيزيائي

4.5.2 بندول الليّ

5.5.2 الجسم الطافي

تُعد الاهتزازات واحدة من اهم الظواهر التي يهتم بها علم الفيزياء، فجميع الأجسام لها القابلية على الاهتزاز وبصيغ مختلفة. الأجسام الصغيرة عادة ما تهتز بشكل سريع، بينما الأجسام الضخمة تهتز ببطء. فجناح البعوضة على سبيل المثال تهتز لمئات المرات في الثانية مولدة الصوت للمميز لها. بينما تهتز الكرة الأرضية أحيانا مرة بالساعة عند حدوث الزلازل. وكذلك فان الذرات التي تكوِّن المادة وجد انها في حالة اهتزاز دائم. والأكثر من ذلك فان قلب الانسان ورئتيه في حالة اهتزاز. وكذلك فان الانسان لا يمكنه ان يصدر صوتاً لولا اهتزاز أوتاره الصوتية في حنجرته، وكذلك لم يكن بإمكاننا سماع الأصوات لولا اهتزاز طبلة الأذن.

اما علاقة الصوت والحركة الموجية بالاهتزاز فتتضح من حقيقة ان أي صوت لا يمكن توليده إلا بوجود جسم مهتز، وان انتقال الصوت في وسط ما لا يتم إلا من خلال اهتزاز جسيمات ذلك الوسط، ومن ذلك تتضح أهمية دراسة الاهتزازات لفهم نشأة الصوت وانتشاره والحركة الموجية بشكل عام.

1.2 الحركة الاهتزازية

ان أي جسم يمتلك خاصيتي المرونة والقصور الذاتي تكون له القابلية على الاهتزاز اذا ما استثير. وتعرف **الحركة الاهتزازية** بانها حركة ذهاب وإياب حول نقطة ثابتة تدعى موضع الاتزان، وهي نقطة تكون فيها محصلة القوى المؤثرة مساوية للصفر وهي نقطة سكونه عندما يتوقف عن الاهتزاز.

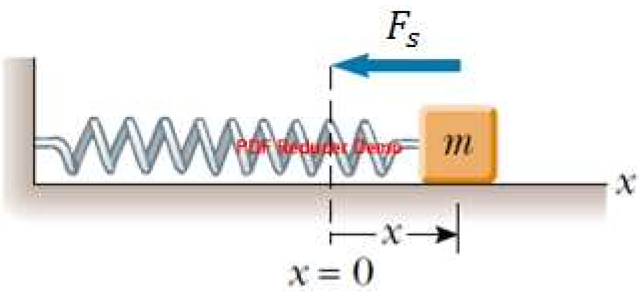
ان السمة الأساسية المشتركة في الحركة الاهتزازية هي الدورية (periodicity) حيث يكون الاهتزاز بنمط من الحركة يتكرر بفترات زمنية متساوية. ان ذلك النمط قد يكون بسيطاً أو معقداً.

يقصد **بالاهتزاز الحر** هو حركة الجسم الاهتزازية تحت تأثير قوة الاستعادة فقط، ويتم تجاهل أي قوى أخرى تعيق الحركة. تعرف **الحركة الدورية**(Periodic Motion) بانها حركة الجسم في مسار محدد تتكرر في فترات زمنية متساوية. هناك العديد من الأمثلة لحركات دورية بسيطة تتبع نظام حركة محدد يطلق عليه حركة توافقية بسيطة مثل اهتزاز بندول، جسم طافي، جسم معلق بنابض، وغيرها. وتكتسب دراسة الحركة التوافقية البسيطة أهمية كبيرة فهي من جهة تفسر الحركات الدورية البسيطة، ومن جهة ثانية فهي تتيح دراسة الحركات الدورية المعقدة من خلال تبسيطها إلى تركيب يتألف من مجموعة حركات توافقية بسيطة.

2.2الحركة التوافقية البسيطة Simple Harmonic Motion (SHM)

الحركة التوافقية البسيطة هي حالة خاصة من الحركة الدورية، وتعرف على انها حركة الجسم الناشئة بسبب قوة استعادة (Restoring Force) متناسبة خطياً مع مقدار الإزاحة عن موضع الاتزان ويكون اتجاهها دائما باتجاه موضع الاتزان.

لاشتقاق معادلة الحركة التوافقية البسيطة، نفرض ان لدينا جسم كتلته (m) موضوع على سطح أفقي املس (عديم الاحتكاك) و متصل بأحد طرفي نابض وطرف النابض الثاني مثبت بإحكام. كما هو موضح بالشكل التالي.



ان قوة الاستعادة تتناسب طردياً مع قيمة الإزاحة لذا يمكن التعبير عنها بالصيغة:

$$F_s = -kx \qquad (1)$$

حيث k هو ثابت التناسب يسمى ثابت النابض وقيمته تعتمد على طبيعة النابض، إشارة السالب وضعت في العلاقة للدلالة على ان اتجاه القوة المعيدة هي باتجاه معاكس لاتجاه الزيادة في الإزاحة (x).

من قانون نيوتن الثاني في الحركة لدينا:

$$\sum F = ma \qquad (2)$$

حيث (m) هي كتلة الجسم و (a) تعجيل الجسم. بالتعويض عن محصلة القوى من المعادلة (1) في معادلة الحركة (2) نحصل على:

$$ma = -kx$$

من تعريف التعجيل لدينا $(a = d^2x/dt^2 = \ddot{x})$، وبالتعويض في المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

نفرض ان $(\omega_o^2 = k/m)$ عندها نحصل على:

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

المعادلة الأخيرة تعرف بمعادلة الحركة التوافقية البسيطة في بعد واحد.

3.2 حل معادلة الحركة التوافقية البسيطة

يقصد بحل المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة هو إيجاد الدالة التي تعبر عن تغير إزاحة الجسم المهتز بدلالة الزمن والتي تحقق المعادلة التفاضلية الخاصة بالحركة، وبمعرفة تلك الدالة يمكننا ان نحدد موضع ، سرعة ، تعجيل وطاقة الجسم المهتز.

سبق ان وجدنا ان المعادلة التفاضلية للمهتز التوافقي البسيط معرفة بالصيغة:

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

- نفرض ان حل المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة معرفة بالدالة:

$$x = \mathrm{A} sin\omega_o t$$

حيث (A) هو ثابت اختياري يتحدد قيمته بتطبيق الشروط الابتدائية.

$$\dot{x} = \mathrm{A}\omega_o cos\omega_o t$$

$$\ddot{x} = -\mathrm{A}\omega_o^2 sin\omega_o t$$

للتحقق من كون الدالة تمثل حل للمعادلة التفاضلية، نعوض عن $(\dot{x})$ و $(\ddot{x})$ في المعادلة التفاضلية:

$$(-\mathrm{A}\omega_o^2 sin\omega_o t) + \omega_o^2(\mathrm{A}sin\omega_o t) = 0$$

من العلاقة الأخيرة نستنتج ان الدالة $(x = \mathrm{A}sin\omega_o t)$ تمثل حل خاص للمعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة.

بالمقابل هناك حل آخر للمعادلة التفاضلية للمهتز التوافقي البسيط يعرف بالصيغة:

$$x = \mathrm{B}cos\omega_o t$$

حيث (B) هو ثابت اختياري، وبنفس الطريقة السابقة يمكننا إثبات ان الدالة المقترحة تمثل حل للمعادلة التفاضلية وكما يلي:

$$\dot{x} = -\mathrm{B}\omega_o sin\omega_o t$$

$$\ddot{x} = -\mathrm{B}\omega_o^2 cos\omega_o t$$

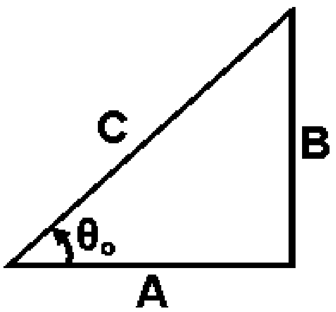
وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد:

$$(-\mathrm{B}\omega_o^2 cos\omega_o t) + \omega_o^2(\mathrm{B}cos\omega_o t) = 0$$

نستنتج مما سبق ان كل من الحلين المقترحين$(x = \mathrm{A}sin\omega_o t)$ و $(x = \mathrm{B}cos\omega_o t)$ يمثلان حلين للمعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة، ويكون الحل العام هو عبارة عن حاصل جمع الحلين، أي ان الحل العام يكون بالصورة:

$$x = \mathrm{A}sin\omega_o t + \mathrm{B}cos\omega_o t$$

حيث A و B هي ثوابت اختيارية يمكن إيجادها بتطبيق الشروط الابتدائية للحركة.



هناك صيغة ثانية للحل العام اكثر ملائمة بحيث يتضمن الحل العام دالة جيبية واحدة (جيب ***sin*** أو جيب تمام ***cos***) وثابتين اختياريين هما **C** و $\boldsymbol{\theta_o}$ ، كما هو موضح بالشكل المجاور. حيث يمثل A و B الضلعين القائمين في مثلث قائم الزاوية بينما يمثل C الوتر فيها و الزاوية θ_o تمثل الزاوية المقابلة للضلع القائم. من حساب المثلثات لدينا:

من الشكل نستنتج ان:

$$A = C cos\theta_o \quad , \quad B = C sin\theta_o$$

بالتعويض عن الثابتين (A) ، (B) في معادلة الحركة نحصل على:

$$x = C cos\theta_o sin\omega_o t + C sin\theta_o cos\omega_o t$$

بالاستفادة من المتطابقة المثلثية:

$$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta$$

$$x = C sin(\omega_o t + \theta_o)$$

العلاقة الأخيرة تمثل الحل العام لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة حيث تمثل:

(x) الإزاحة الآنية في اللحظة الزمنية t ، (C) اكبر قيمة يمكن ان تصل اليها الإزاحة وتسمى بالسعة (**Amplitude**)، (ω_o) التردد الزاوي للمهتز التوافقي، (θ_o) زاوية الطور الابتدائية و هي قيمة ثابتة تحددها الشروط الابتدائية للحركة (زاوية الطور في لحظة بدأ الحركة $t = 0$).

فيما يلي بعض التعاريف المتعلقة بالحركة التوافقية البسيطة:

الذبذبة الكاملة (Complete Vibration): هي حركة الجسم التي يقطع فيها المسار ذهاباً وإياباً.

الزمن الدوري (Periodic Time): هو الزمن اللازم إنجاز ذبذبة كاملة ويرمز له بالرمز (T).

التردد(Frequency): عدد الذبذبات التي يصنعها الجسم المهتز في وحدة الزمن ويرمز له بالرمز (f)، يرتبط التردد بالزمن الدوري بالعلاقة ($f = \frac{1}{T}$) وحدة التردد هو هيرتز (Hertz) ويرمز له بالرمز (Hz).

يمكن التعبير عن السرعة الآنية والتعجيل الآني للجسم المتحرك بحركة توافقية بسيطة بالاعتماد على دالة الإزاحة الآنية للمهتز التوافقي البسيط وكما يلي:

$$v = \dot{x} = C\omega_o cos(\omega_o t + \theta)$$

$$v = v_o cos(\omega_o t + \theta)$$

العلاقة الأخيرة تمثل السرعة الآنية للمهتز التوافقي البسيط، حيث تمثل (v_o) اقصى قيمة يمكن ان تصل اليها السرعة للمهتز التوافقي البسيط.

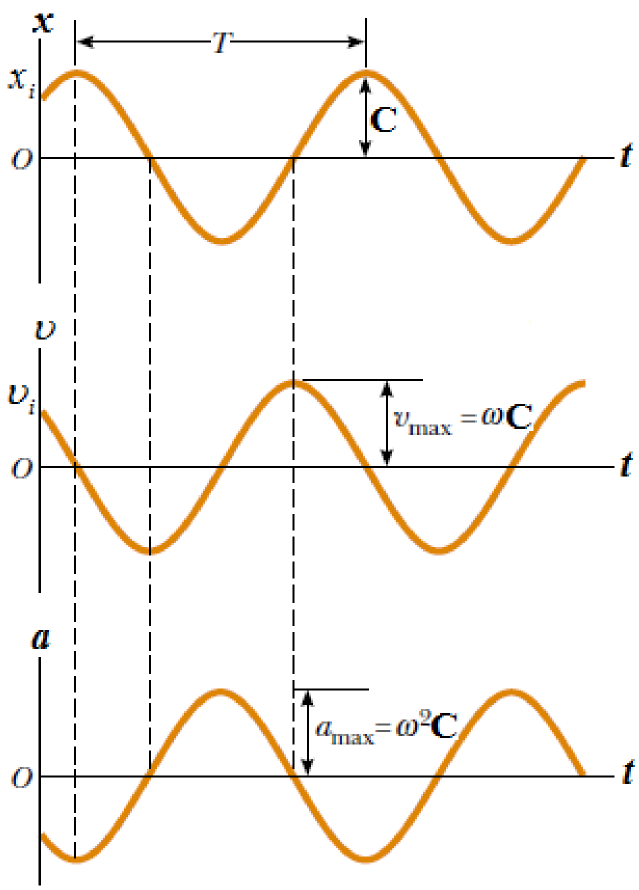
بنفس الطريقة يمكننا ان نجد الصيغة الخاصة بالتعجيل الآني للمهتز التوافقي البسيط، وكما يلي:

$$a = \ddot{x} = -C\omega_o^2 sin(\omega_o t + \theta)$$

$$a = -\omega_o^2 x$$

من العلاقة الأخيرة تستنتج ان التعجيل الآني يكون صفراً في موضع الاتزان، وعندما تكون الإزاحة في اقصى قيمة يكون التعجيل في اقصى قيمة $(C\omega_o^2)$.

الشكل التالي يوضح تغير كل من الإزاحة، السرعة، التعجيل لمهتز توافقي بسيط له زاوية طور ابتدائية معينة، يلاحظ انه في أي لحظة زمنية معينة فان هناك فرق في الطور بين الإزاحة والسرعة مقدارها (90^o)، وكذلك فان هناك فرق في الطور مقداره (180^o) بين الإزاحة والتعجيل.



4.2 طاقة المهتز التوافقي البسيط

1.4.2 الطاقة الكلية للمهتز التوافقي البسيط

نفرض ان لدينا جسم كتلته (m) موضوع على سطح أفقي املس ومتصل بطرف نابض ثابته (k) ويتحرك بحركة توافقية بسيطة، ان الطاقة الكلية (E) في هذه الحالة تعطى بالعلاقة:

$$\mathrm{E} = \mathrm{P.E} + \mathrm{K.E}$$

حيث تمثل (P.E) الطاقة الكامنة للمهتز التوافقي، وتمثل (K.E) الطاقة الحركية له.

ان الطاقة الكامنة للمهتز التوافقي تعطى بالعلاقة: $\mathrm{P.E} = -\int_0^x \mathrm{F}dx$

حيث تمثل (F) القوة المؤثرة على الجسم، وهي في هذه الحالة القوة المعيدة والتي سبق وان عرفناها بالصيغة $(F = -)$ وبالتعويض في معادلة الطاقة الكامنة نحصل على:

$$\mathrm{P.E} = -\int_0^x (-kx)dx$$

$$\mathrm{P.E} = \frac{1}{2}kx^2$$

بالتعويض عن الإزاحة الآنية للمهتز التوافقي بالصيغة $[x = \mathrm{C}\sin(\omega_o t + \theta)]$ نحصل على:

$$\mathrm{P.E} = \frac{1}{2}k\mathrm{C}^2 sin^2(\omega_o t + \theta)$$

اما الطاقة الحركية للمهتز التوافقي فتعطى بالصيغة:

$$\mathrm{K.E} = \frac{1}{2}mv^2$$

حيث تمثل (m) كتلة الجسم، (v) سرعته. في حالة الحركة التوافقية البسيطة فان السرعة الآنية يعبر عنها بالصيغة $[\, v = \mathrm{C}\omega_o \cos(\omega_o t + \theta)]$ وبالتعويض في معادلة الطاقة الحركية نحصل على:

$$\mathrm{K.E} = \frac{1}{2}m[\mathrm{C}\omega_o \cos(\omega_o t + \theta)]^2$$

$$\mathrm{K.E} = \frac{1}{2}m\mathrm{C}^2\omega_o^2 cos^2(\omega_o t + \theta)$$

وحيث ان التردد الزاوي في هذه حالة معرف بالصيغة $(\omega_o^2 = k/m)$ وبالتعويض نحصل على:

$$\mathrm{K.E} = \frac{1}{2}k\mathrm{C}^2 cos^2(\omega_o t + \theta)$$

بالتعويض عن الطاقة الكامنة والطاقة الحركية في معادلة الطاقة الكلية نحصل على:

$$E = \frac{1}{2}kC^2 sin^2(\omega_o t + \theta) + \frac{1}{2}kC^2 cos^2(\omega_o t + \theta)$$

$$E = \frac{1}{2}kC^2[sin^2(\omega_o t + \theta) + cos^2(\omega_o t + \theta)]$$

من المتطابقات المثلثية لدينا $(sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1)$ وبالتعويض في علاقة الطاقة نحصل على:

$$E = \frac{1}{2}kC^2$$

من العلاقة الأخيرة نستنتج ان الطاقة الكلية للمهتز التوافقي البسيط تساوي كمية ثابتة في أية لحظة زمنية وان الطاقة الكلية للمهتز التوافقي تتناسب طردياً مع مربع سعة اهتزاز.

2.4.2 إيجاد العلاقة التي تربط السرعة والإزاحة الآنية للمهتز التوافقي البسيط باستعمال مفهوم حفظ الطاقة

نفرض ان لدينا جسم كتلته (m) موضوع على سطح أفقي املس ومتصل بطرف نابض ثابته (k) ويتحرك بحركة توافقية بسيطة سعتها (C)، ان الطاقة الكلية (E) تكون محفوظة و تعطى بالعلاقة:

$$E = P.E + K.E = \frac{1}{2}kC^2$$

ان الطاقة الحركية والطاقة الكامنة معرفة بالصورة:

$$P.E = \frac{1}{2}kx^2 \qquad , \qquad K.E = \frac{1}{2}mv^2$$

حيث (x) هي الازاحة الآنية للجسم، و (v) هي السرعة الآنية للجسم.

بالتعويض عن قيمتي الطاقة الحركية والكامنة في معادلة الطاقة الكلية نحصل على:

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kC^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(C^2 - x^2)$$

بترتيب الحدود نحصل على:

$$v^2 = \frac{k}{m}k(C^2 - x^2)$$

من تعريف التردد الزاوي للمهتز التوافقي البسيط لدينا $\left(\omega_o^2 = \frac{k}{m}\right)$ وبالتعويض نحصل على:

$$v^2 = \omega_o^2(C^2 - x^2)$$

بجذر طرفي المعادلة نحصل على:

$$v = \pm\omega_o\sqrt{C^2 - x^2}$$

العلاقة الأخيرة تعطي السرعة الآنية للمهتز التوافقي البسيط بدلالة الإزاحة الآنية.

3.4.2 متوسط الطاقة الكامنة ومتوسط الطاقة الحركية للمهتز التوافقي

وجدنا مما سبق ان طاقة المهتز التوافقي البسيط عبارة عن حاصل جمع طاقته الكامنة مع طاقته الحركية بحيث يبقى مجموع الطاقتين (الطاقة الكلية) ثابت دائماً، وسنقوم بأثبات ان متوسط الطاقة الكامنة للمهتز التوافقي البسيط خلال دورة كاملة يساوي متوسط الطاقة الحركية له خلال نفس الدورة وكما يلي:

أولاً: متوسط الطاقة الكامنة للمهتز التوافقي البسيط

يمكن التعبير عن الطاقة الكامنة الآنية للمهتز التوافقي البسيط بالصيغة:

$$\mathrm{P.E} = -\int_0^x F dx$$

لإيجاد الصيغة الخاصة بالقوة نستفيد من قانون نيوتن الثاني $(\mathrm{F} = ma)$, وفي حالة المهتز التوافقي سبق ان وجدنا التعجيل معبر عنه بالصيغة $(a = -\omega_o^2 x)$ وبالتعويض في معادلة الطاقة الكامنة نحصل على:

$$\mathrm{P.E} = \int_o^x m\omega_o^2\, x dx \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{P.E} = \frac{1}{2} m\omega_o^2 x^2$$

وحيث ان الإزاحة الآنية يعبر عنها بالصيغة$[x = \mathrm{C}\sin(\omega_o t + \theta)]$ وبالتعويض في معادلة الطاقة الكامنة نحصل على:

$$\mathrm{P.E} = \frac{1}{2} m\omega_o^2 [\mathrm{C}\sin(\omega_o t + \theta)]^2$$

$$\mathrm{P.E} = \frac{1}{2} m\omega_o^2 \mathrm{C}^2 sin^2(\omega_o t + \theta)$$

ان المعادلة الأخيرة تمثل معادلة الطاقة الكامنة الآنية (الطاقة الكامنة في اللحظة t)، ولإيجاد متوسط الطاقة الكامنة للمهتز التوافقي البسيط نستفيد من العلاقة الرياضية التي تعبر عن متوسط أي دالة دورية $[f(t)]$:

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_o^{\mathrm{T}} f(t) dt$$

حيث تمثل $\left[\overline{f(t)}\right]$ متوسط الدالة $[(t)]$ ، بينما تمثل (T) الزمن الدوري.

ومنه يمكننا ان نعبر عن متوسط الطاقة الكامنة بالصيغة:

$$\overline{\mathrm{P.E}} = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_o^{\mathrm{T}} \frac{1}{2} m\omega_o^2 \mathrm{C}^2 sin^2(\omega_o t + \theta) dt$$

$$\overline{\mathrm{P.E}} = \left(\frac{1}{2}\right) m\omega_o^2 \mathrm{C}^2 \left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right) \int_o^{\mathrm{T}} sin^2(\omega_o t + \theta) dt$$

لحل التكامل نستفيد من المتطابقة المثلثية $\left[sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - cos2\alpha)\right]$ وبالتعويض نحصل على:

$$\overline{\mathrm{P.E}} = \left(\frac{1}{2}\right) m\omega_o^2 \mathrm{C}^2 \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right)\int_o^{\mathrm{T}} [1 - cos2(\omega_o t + \theta)]dt$$

$$\overline{\mathrm{P.E}} = \left(\frac{1}{4}\right) m\omega_o^2 \mathrm{C}^2 \left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right)\left\{\int_o^{\mathrm{T}} dt - \int_o^{T} cos2(\omega_o t + \theta)dt\right\}$$

من تكاملات الدوال المثلثية لدينا: $\int_o^T cos2(\omega_o t + \theta)dt = 0$

$$\overline{\mathrm{P.E}} = \left(\frac{1}{4}\right) m\omega_o^2 \mathrm{C}^2 \left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right)(\mathrm{T} - 0)$$

$$\overline{\mathrm{P.E}} = \left(\frac{1}{4}\right) m\omega_o^2 \mathrm{C}^2$$

ثانياً: متوسط الطاقة الحركية للمهتز التوافقي البسيط

ان الطاقة الحركية الآنية للمهتز التوافقي البسيط تعطى بالصيغة:

$$\mathrm{K.E} = \frac{1}{2} m v^2, \qquad v = \frac{dx}{dt}$$

وحيث ان الإزاحة الآنية معطاة بالعلاقة $[x = \mathrm{C}\sin(\omega_o t + \theta)]$ ومنه نجد:

$$v = \frac{dx}{dt} = \mathrm{C}\omega_o \cos(\omega_o t + \theta)$$

$$\mathrm{K.E} = \frac{1}{2} m[\mathrm{C}\omega_o \cos(\omega_o t + \theta)]^2$$

$$\mathrm{K.E} = \frac{1}{2} m\mathrm{C}^2 \omega_o^2 cos^2(\omega_o t + \theta)$$

العلاقة الأخيرة تمثل معادلة الطاقة الحركية الآنية (الطاقة الحركية في اللحظة t)، وبنفس الطريقة نجد:

$$\overline{\mathrm{K.E}} = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_o^{\mathrm{T}} \frac{1}{2} m\omega_o^2 \mathrm{C}^2 cos^2(\omega_o t + \theta)dt$$

$$\overline{\mathrm{K.E}} = \left(\frac{1}{2}\right) m\omega_o^2 C^2 \left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right)\int_o^{\mathrm{T}} cos^2(\omega_o t + \theta)dt$$

ولحل التكامل نستعمل المتطابقة المثلثية $\left[cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + cos2\alpha)\right]$ وبالتعويض نحصل على:

$$\overline{\mathrm{K.E}} = \left(\frac{1}{2}\right) m\omega_o^2 \mathrm{C}^2 \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right)\int_o^{\mathrm{T}} [1 + cos2(\omega_o t + \theta)]dt$$

$$\overline{\mathrm{K.E}} = \left(\frac{1}{4}\right) m\omega_o^2 \mathrm{C}^2 \left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right) \left\{ \int_o^{\mathrm{T}} dt + \int_o^{\mathrm{T}} cos2(\omega_o t + \theta) dt \right\}$$

من تكاملات الدوال المثلثية لدينا:

$$\int_o^{\mathrm{T}} cos2(\omega_o t + \theta) dt = 0$$

$$\overline{\mathrm{K.E}} = \left(\frac{1}{4}\right) m\omega_o^2 \mathrm{C}^2 \left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right) (\mathrm{T} - 0)$$

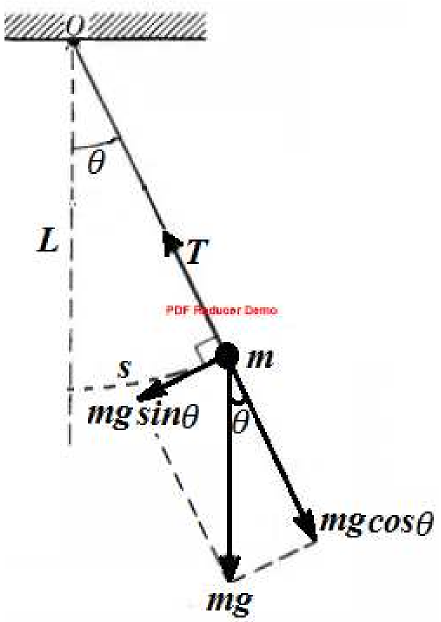
$$\overline{\mathrm{K.E}} = \left(\frac{1}{4}\right) m\omega_o^2 \mathrm{C}^2$$

نلاحظ ان متوسط الطاقة الكامنة خلال دورة واحدة يساوي متوسط الطاقة الحركية خلال نفس الدورة، أي ان الطاقة الكلية للمهتز التوافقي تتوزع بالتساوي على شكلي الطاقة خلال الدورة الواحدة. اي ان:

$$\overline{\mathrm{P.E}} = \overline{\mathrm{K.E}}$$

5.2 تطبيقات على الحركة التوافقية البسيطة:

1.5.2 البندول البسيط (Simple Pendulum):



يتكون البندول البسيط من جسم ذي أبعاد صغيرة (كروي الشكل عادة) معلق من طرف خيط خفيف ثابت الطول ويثبت الطرف الآخر بإحكام بنقطة ثابتة، كما موضح بالشكل المجاور.

اذا سحبنا كرة البندول جانبياً بمسافة صغيرة عن موضع استقرارها واطلقناها فستتذبذب حول موضع الاستقرار ويكون مسارها على قوس دائرة نصف قطرها يساوي طول البندول (L) ومركزها في نقطة التعليق. لدراسة حركة البندول ينبغي لنا ان نحلل القوى المؤثرة، وهي قوة جذب الأرض لكرة البندول (mg).

- ان قوة جذب الأرض (mg) لكرة البندول تتحلل إلى مركبتين كما هو موضح بالشكل السابق:

1- مركبة باتجاه امتداد الخيط $(mg\cos\theta)$ وتتولد في الخيط قوة شد $(\boldsymbol{T})$ تساوي تلك المركبة في المقدار وتعاكسها في الاتجاه $(T = mg\cos\theta)$. ولذلك تكون محصلة تلك القوتين مساوية للصفر.

2- مركبة باتجاه عمودي على اتجاه الخيط $(mg\sin\theta)$ ويكون اتجاها دائماً باتجاه موضع الاتزان وتمثل القوة المعيدة المسؤولة عن الحركة وتعطى بالعلاقة:

$$\mathrm{F} = -\mathrm{mg}\sin\theta$$

إشارة السالب للدلالة على ان اتجاه القوة المعيدة هو بعكس اتجاه زيادة الإزاحة الزاوية (θ).

بتطبيق قانون نيوتن الثاني في الاتجاه العمودي نحصل على:

$$\sum F_T = -mgsin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

حيث تمثل (s) الإزاحة المقطوعة على طول القوس. في حالة الإزاحة الزاوية الصغيرة يمكن استعمال التقريب $(s = L\theta)$، وحيث ان طول البندول ثابت فان معادلة الحركة يمكن كتابتها بالصورة:

$$-\mathrm{g}\, sin\, \theta = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\mathrm{g}}{L}sin\theta$$

في حالة الزوايا الصغيرة $(\theta < 10^o)$ يمكن استعمال التقريب $(sin\theta \approx \theta)$ ، وبالتعويض في معادلة حركة البندول نحصل على:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\mathrm{g}}{L}\theta$$

بفرض ان $\left[\omega_o^2 = \frac{\mathrm{g}}{L}\right]$ ، يمكننا كتابة معادلة حركة البندول بالصيغة:

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2\theta = 0$$

المعادلة الأخيرة تمثل معادلة الحركة للبندول البسيط، وهي معادلة تشبه معادلة الحركة للمهتز التوافقي البسيط في بعد واحد $(\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0)$ الحل العام لها يكون بالصيغة:

$$\theta = \theta_{max}\sin(\omega_o t + \theta_o)$$

حيث: (θ) تمثل الإزاحة الزاوية لكرة البندول في اللحظة (t) بالمقياس النصف قطري (radian).

(θ_{max}) تمثل اقصى إزاحة زاوية، (θ_o) الإزاحة الزاوية الابتدائية (الإزاحة الزاوية في اللحظة t=0) بالمقياس النصف قطري، (ω_o) تمثل التردد الزاوي.

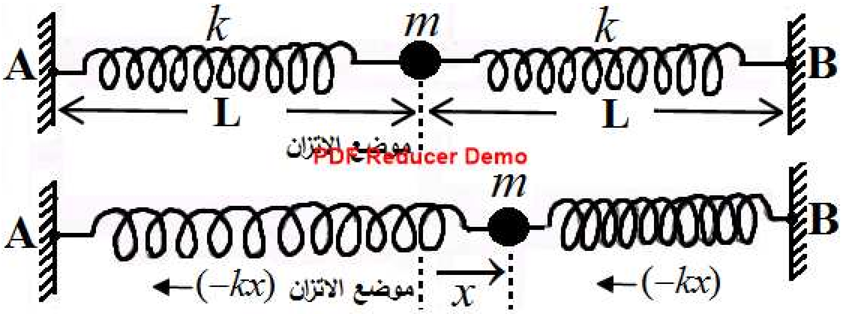
يمكن حساب التردد والزمن الدوري للبندول البسيط من علاقة التردد الزاوي وكما يلي:

$$f = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{g}}{L}} \quad , \quad T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\mathrm{g}}}$$

من العلاقة الأخيرة نلاحظ ان الزمن الدوري للبندول البسيط يعتمد فقط على طول البندول والتعجيل الأرضي ولا يعتمد على كتلة كرة البندول.

2.5.2 كتلة متصلة بين نابضين متماثلين:

نفرض ان لدينا جسم كتلته (m) مربوط بين نابضين حلزونيين متماثلين تماماً (نفس الطول L ونفس ثابت النابض k) ويكون الجسم موضوع على سطح أفقي املس (عديم الاحتكاك) والطرفان الآخران للنابضين مثبتين في النقطتين A و B كما هو موضح بالشكل التالي:



في حالة إزاحة الجسم إزاحة صغيرة (x) من موضع الاتزان نحو جهة اليمين فان تشوهاً طولياً يحدث في النابضين، فالنابض الأيسر يتمدد بينما النابض الأيمن ينكمش.

- قوة الاستعادة التي تظهر في النابض الأيسر تكون متجهة نحو اليسار وتساوي $(-kx)$.
- قوة الاستعادة التي تظهر في النابض الأيمن تكون متجهة نحو اليسار وتساوي $(-kx)$.

وعندها فان محصلة القوى المؤثرة على الجسم يمكن التعبير عنها بالصيغة:

$$\sum F = -kx - kx = -2kx$$

بتطبيق قانون نيوتن الثاني في الحركة نحصل على:

$$ma = -2kx$$

$$m\ddot{x} + 2kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0 \qquad , \ where \quad \omega_o = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

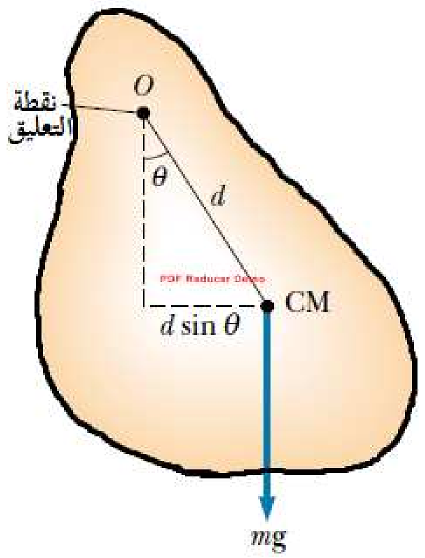
المعادلة الأخيرة هي نفسها معادلة الحركة التوافقية البسيطة، ان التردد والزمن الدوري للجسم المهتز المتصل بين نابضين متماثلين تعطى بالصيغة:

$$f = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\text{k}}{m}}$$

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\text{k}}}$$

3.5.2 البندول الفيزيائي (البندول المركب) (Physical Pendulum):

هو أي جسم صلب قادر على التذبذب حول أي محور أفقي يمر خلاله. الشكل المجاور يبين جسم صلب كتلته (m) معلق شاقولياً من النقطة (O)، في حالة إزاحة الجسم إزاحة زاوية (θ) عن موضع الاتزان ينشأ عزم تدوير يحاول إرجاع الجسم لوضعية الاستقرار ،



ان قيمة عزم التدور يعطى بالعلاقة: $\tau = -(mg) \times (dsin\theta)$

حيث تمثل $(\boldsymbol{d})$ المسافة بين نقطة التعليق ومركز ثقل الجسم. وبتطبيق قانون نيوتن الثاني في الحركة الدورانية $[\sum \tau = I\alpha]$ ، نحصل على:

$$\mathrm{I}\frac{d^2\theta}{dt^2} = -(mg) \times (dsin\theta)$$

في حالة الإزاحة الزاوية الصغيرة يمكن استعمال التقريب $(sin\theta \approx)$ وبالتعويض نحصل على:

$$\mathrm{I}\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\ \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgd}{\mathrm{I}}\right)\theta = 0$$

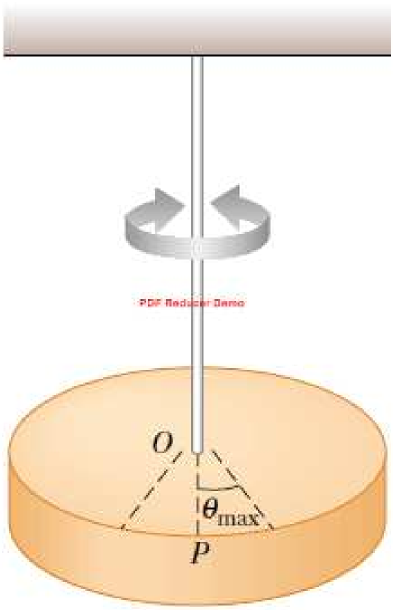
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_o^2\,\theta = 0 \quad , \qquad where \quad \omega_o^2 = \frac{mgd}{\mathrm{I}}$$

نلاحظ ان معادلة الحركة هي نفسها معادلة الحركة التوافقية البسيطة، تردد الاهتزاز للبندول الفيزيائي والزمني الدوري له تعطى بالصيغة:

$$f = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgd}{\mathrm{I}}} \quad , \qquad T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{I}}{mgd}}$$

يمكن الاستفادة من البندول الفيزيائي في حساب عزم القصور الذاتي لجسم صلب بمعلومية الزمن الدوري (T)، كتلة الجسم (m)، التعجيل الأرضي(g)، والمسافة بين نقطة التعليق ومركز ثقل الجسم (d).

4.5.2 بندول اللـيّ (Torsional Pendulum):



يتكون من قرص اسطواني معلق من مركزه بطرف قضيب أو سلك يتصل بمركز ثقل القرص ويتصل الطرف الآخر بمسند ثابت كما هو موضح بالشكل المجاور.

عند إزاحة القرص بإزاحة زاوية بسيطة (θ). فان القضيب (أو السلك) سيولد عزم لـيّ متناسب طردياً مع مقدار اللـيّ الذي يتمثل بمقدار الإزاحة الزاوية $(\tau \propto \theta)$ ، ومنه فان العزم المُعيد يمكن التعبير عنه بالصورة: $\tau = -\kappa\theta$

حيث ( ) (تقرأ kappa) يمثل ثابت يسمى ثابت اللـيّ (torsion constant) ويعتمد مقداره على طول وقطر السلك وطبيعة مادته. والإشارة السالبة للدلالة على ان عزم اللـيّ باتجاه معاكس لاتجاه زيادة الإزاحة الزاوية.

بتطبيق قانون نيوتن الثاني في الحركة الدورانية نحصل على:

$$\sum \tau = \mathrm{I}\alpha$$

$$\tau = \mathrm{I}\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta$$

$$\mathrm{I}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \kappa\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{\mathrm{I}}\theta = 0$$

حيث تمثل (I) عزم القصور الذاتي للقرص وهي كمية تعتمد على كتلة القرص وشكله الهندسي.

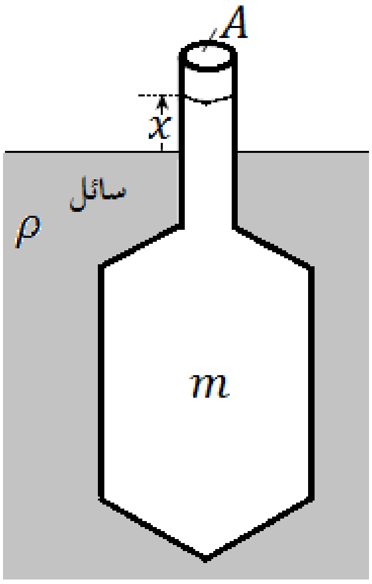
بفرض ان $\left(\omega_o^2 = \frac{\kappa}{\mathrm{I}}\right)$ نحصل على معادلة الحركة لبندول اللـيّ:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_o^2\theta = 0$$

التردد والزمني الدوري لبندول اللـيّ فتعطى بالصيغة:

$$f = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{\mathrm{I}}} \quad , \qquad T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{I}}{\kappa}}$$

5.5.2 الجسم الطافي (Floating Object):



ان أي جسم طافي على سطح سائل اذا ما دفع قليلاً إلى الأسفل أو رفع قليلاً نحو الأعلى ثم ترك حراً فانه سوف يهتز بحركة صعود ونزول عمودية على سطح السائل.

نفرض ان لدينا جسم كتلته (m) يطفو في سائل كثافته (ρ)، لتبسيط المسألة نفرض للجسم مقطع عرضي ثابت في المنطقة القريبة من سطح السائل وان مساحة ذلك المقطع العرضي هو (A) كما هو موضح بالشكل المجاور.

عند تحريك الجسم إزاحة بسيطة (x) فان ذلك يسبب إزاحة حجم من السائل يساوي (A)، وتكون كتلة السائل المزاح مساوياً لحجم السائل المزاح مضروباً في كثافة السائل $(\rho \mathrm{A} x)$.

من ذلك يمكننا التعبير عن قوة الاستعادة بالصيغة:

$$F = -\mathrm{g}\rho \mathrm{A} x$$

إشارة السالب للدلالة على ان اتجاه قوة الاستعادة باتجاه معاكس لاتجاه زيادة الإزاحة.

بتطبيق قانون نيوتن الثاني نحصل على:

$$m\ddot{x} = -\mathrm{g}\rho \mathrm{A} x$$

بالقسمة على الكتلة و ترتيب الحدود نحصل على:

$$\ddot{x} + \frac{\mathrm{g}\rho \mathrm{A}}{m} x = 0 \quad , \; Let \qquad \omega_o^2 = \frac{\mathrm{g}\rho \mathrm{A}}{m}$$

وبالنتيجة يمكننا كتابة معادلة الحركة للجسم الطافي بالصورة:

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

من ذلك نستنتج ان حركة الجسم هي حركة توافقية بسيطة، وان التردد والزمن الدوري للحركة هي:

$$f = \frac{\omega_o}{2\pi} \qquad \Longrightarrow \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{g}\rho \mathrm{A}}{m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\mathrm{g}\rho \mathrm{A}}}$$

من العلاقتين الأخيرتين نلاحظ ان التردد والزمن الدوري لاهتزاز جسم طافي يعتمد على كتلة الجسم ومساحة المقطع العرضي بالإضافة لكثافة السائل، ومنه يمكننا تحديد كثافة السائل بدلالة كتلة الجسم الطافي ومساحة المقطع العرضي وتردد الاهتزاز.

أسئلة الفصل الثاني

س1: عرف كل من: الحركة الاهتزازية، الاهتزاز الحر، الحركة الدورية، الحركة التوافقية البسيطة.

س2: اشتق (مع الرسم) معادلة الحركة التوافقية البسيطة.

س3: اثبت ان الطاقة الكلية للمهتز التوافقي البسيط هي قيمة ثابتة.

س4: باستعمال مفهوم حفظ الطاقة أوجد العلاقة التي تربط بين السرعة والإزاحة للمهتز التوافقي البسيط.

س5: في حالة الحركة التوافقية البسيطة اثبت ان متوسط الطاقة الكامنة يساوي متوسط الطاقة الحركية.

س6: تتذبذب كتلة مقدارها (5kg) معلقة بطرف نابض حلزوني بحركة توافقية بسيطة حول موضع الاتزان وكانت سعة الحركة ($10cm$) وثابت النابض ($300N/m$) أوجد سرعة الكتلة عندما تكون إزاحتها:

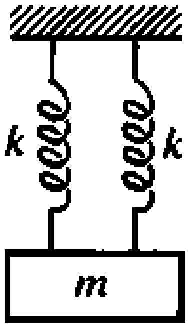
أ- ($20cm$). ب- ($10cm$). جـ- (صفر).

س7: تهتز كتلة(470g) مثبتة بطرف نابض ذهابا وايابا بحيث تعطى ازاحتها المعادلة:

$$x = 25\sin(6.28t + \pi/4)\ cm$$

اوجد:1- سعة الحركة. 2- الزمن الدوري. 3- قيمة ثابت النابض. 4-معادلة السرعة الآنية.

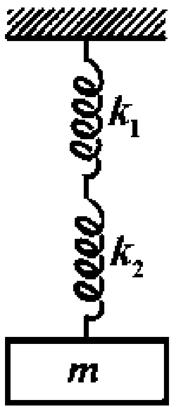
س8: اذا علق جسيم كتلته ($4kg$) من نهاية نابض محلزن يستطيل النابض بمقدار ($12cm$)، كم ستكون مدة الذبذبة اذا اهتز من نهاية النابض جسيم كتلته ($1.5kg$).



س9: نابضان حلزونيان متماثلان ثابت النابض لهما (k) مربوطان على التوازي بحيث يتصل طرفاها العلويان بسقف والطرفان السفليان بثقل كتلته (m) كما هو موضح بالشكل المجاور. أوجد:

أ- ثابت القوة المكافئ للنابضين.

ب- مقدار الاستطالة الكلية.



س10: نابضان حلزونيان مربوطان على التوالي ثبت احد الطرفين بسقف وعلق في الطرف الآخر جسم كتلته (m) كما هو موضح بالشكل المجاور، فاذا كان ثابت القوة لاحدهما k_1 وللآخر k_2. أوجد:

أ- الاستطالة الكلية.

ب- ثابت القوة المكافئ للنابضين.

الفصل الثالث

تراكب الحركات التوافقية البسيطة
Superposition of Simple Harmonic Motions

1.3 مبدأ التراكب

2.3 تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد

1.2.3 تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد و لهما نفس التردد

2.2.3 تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد ومختلفتين في التردد(الضربات)

3.3 تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في اتجاهين متعامدين

1.3.3 تراكب حركتين توافقيتين متعامدتين لهما نفس التردد

2.3.3 تراكب حركتين توافقيتين متعامدتين نسبة ترددهما كنسبة 1:2

تناولنا في الفصل السابق الحركة التوافقية البسيطة وبعض من تطبيقاتها، ولكن في الواقع هناك أمثلة كثيرة في الفيزياء (وبخاصة في علم الصوت) تتراكب فيها حركتان توافقيتان بسيطتان أو اكثر في نفس الوقت، فغشاء طبلة الأذن غالباً ما يتأثر بأكثر من حركة توافقية بسيطة نتيجة لالتقاط الآذن أصوات متعددة بترددات مختلفة في نفس الوقت، وبصورة تتيح للإنسان ان يسمع ويميز أصوات مجموعة متكلمين في نفس الوقت، ومن الأمثلة الأخرى: اهتزاز غشاء السماعة (Speaker)، و اهتزاز غشاء اللاقط الصوتي (Microphone).

1.3 مبدأ التراكب (Superposition Principle):

لهذا المبدأ أهمية كبيرة في تحليل الحركات الموجية المعقدة إلى مركبات توافقية بسيطة، و ينص هذا المبدأ على انه **يمكن لحركتين اهتزازيتين أو موجتين أو اكثر ان تحدثا في نفس النقطة دون ان تؤثر احداهما في الأخرى، وتكون الإزاحة الآنية في تلك النقطة عبارة عن المجموع الجبري للازا حات الآنية للموجات المتراكبة.** وينطبق هذا المبدأ على الحركات التوافقية البسيطة.

يمكن أثبات ان حاصل تراكب أي حركتين توافقيتين بسيطتين هو حركة توافقية بسيطة، وكما يلي:

نفرض ان لدينا حركتين توافقيتين بسيطتين، الأولى معبر عنها بالدالة (x_1) والثانية معبر عنها بالدالة (x_2). بما ان الدالة (x_1) تمثل حركة توافقية بسيطة (بالفرض)، لذا فهي تحقق معادلة الحركة التوافقية البسيطة المعبر عنها بالصيغة $\left[\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_o^2x=0\right]$ ، وبالتعويض نحصل على:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+\omega_o^2x_1=0 \qquad (1)$$

وبنفس الطريقة فان الدالة (x_2) تحقق معادلة الحركة التوافقية البسيطة، وبالتعويض نحصل على:

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}+\omega_o^2x_2=0 \qquad (2)$$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نحصل على:

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2)+\omega_o^2(x_1+x_2)=0 \qquad (3)$$

من العلاقة الأخيرة نستنتج ان(x_1+x_2) تمثل حلاً لمعادلة المهتز التوافقي، وبتعبير آخر ان حاصل جمع حركتين توافقيتين هو أيضا حركة توافقية، وبشكل عام فان اي تركيب خطي يضم حركتين توافقيتين ينتج عنه حركة توافقية ثالثة.

2.3 تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد:

ان أي حركة توافقية بسيطة يتم وصفها بدلالة سعة (A) والتردد الزاوي (ω_o) والطور الابتدائي (θ_o) للاهتزاز $[x=A\sin(\omega_o t+\theta_o)]$، وللسهولة نبدأ أولا بدراسة تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد ولهما نفس التردد، ومن ثم ندرس تراكب حركتين توافقيتين مختلفتين في التردد والتي ترتبط بظاهرة فيزيائية مهمة تعرف بالضربات.

1.2.3 تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد و لهما نفس التردد:

نفرض ان لدينا حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد الزاوي على امتداد المحور x معرفين بالعلاقتين: $x_1 = a_1\, sin(\omega t + \theta_1)\,,\; x_2 = a_2\, sin(\omega t + \theta_2)$

حيث تمثل x_1 , x_2 الإزاحة الآنية للحركتين، a_1 a_2 سعتي الحركتين، θ_1 , θ_2 زاويتي الطور الابتدائي للحركتين، ω هو التردد الزاوي للحركتين، ان تراكب الحركتين تعطى بالصيغة:

$$x = x_1 + x_2$$
$$x = a_1\, sin(\omega t + \theta_1) + a_2\, sin(\omega t + \theta_2) \qquad (1)$$

من المتطابقة المثلثية الخاصة بمفكوك جيب حاصل جمع زاويتين لدينا:

$$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta$$

وبالتعويض عن المفكوك في العلاقة (1) نحصل على:

$$x = a_1[sin\omega t cos\theta_1 + cos\omega t sin\theta_1] + a_2[sin\omega t cos\theta_2 + cos\omega t sin\theta_2]$$
$$x = a_1 sin\omega t cos\theta_1 + a_1 cos\omega t sin\theta_1 + a_2 sin\omega t cos\theta_2 + a_2 cos\omega t sin\theta_2$$
$$x = [a_1 cos\theta_1 + a_2 cos\theta_2]sin\omega t + [a_1 sin\theta_1 + a_2 sin\theta_2]cos\omega t \qquad (2)$$

وحيث ان كل من a_1 , a_2 , θ_1 , θ_2 هي ثوابت ، لذا يمكن التعبير عنها بالصورة:

$$Acos\theta = a_1 cos\theta_1 + a_2 cos\theta_2 \qquad (3)$$
$$Asin\theta = a_1 sin\theta_1 + a_2 sin\theta_2 \qquad (4)$$

حيث A , θ هي ثوابت، وبتعويض المعادلة (3) و (4) في المعادلة (2) نحصل على:

$$x = Acos\theta sin\omega t + Asin\theta cos\omega t$$
$$x = A[sin\omega t cos\theta + cos\omega t sin\theta]$$

المعادلة الأخيرة يمكن كتابتها بالصورة:

$$x = Asin(\omega t + \theta) \qquad (5)$$

العلاقة الأخيرة تعبر عن الحركة التوافقية الناتجة من تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد في بعد واحد، ويلاحظ انها تشبه معادلة الحركتين الأصليتين حيث انها معادلة حركة توافقية لها نفس التردد الزاوي الحركتين الأصليتين (ω)، وتختلف عنهما بالسعة (A) والطور الابتدائي (θ). واللذان يمكن حسابهما بدلالة السعة والطور الابتدائي للحركتين الأصليتين وكما يلي:

لإيجاد السعة (A) نقوم أولا بتربيع طرفي المعادلة (3) و (4) فنحصل على:

$$A^2cos^2\theta = a_1^2cos^2\theta_1 + 2a_1a_2cos\theta_1cos\theta_2 + a_2^2cos^2\theta_2$$
$$A^2sin^2\theta = a_1^2sin^2\theta_1 + 2a_1a_2sin\theta_1sin\theta_2 + a_2^2sin^2\theta_2$$

بجمع المعادلتين الأخيرتين وترتيب الحدود نحصل على:

$$A^2[sin^2\theta + cos^2\theta] = a_1^2[sin^2\theta_1 + cos^2\theta_1] + a_2^2[sin^2\theta_2 + cos^2\theta_2]$$
$$+2a_1a_2[cos\theta_1cos\theta_2 + sin\theta_1sin\theta_2]$$

وبالاستفادة من المتطابقتين المثلثيتين:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \quad , \quad cos(\alpha - \beta) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta$$

بالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد:

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2cos(\theta_1 - \theta_2)$$

حيث تمثل $(\theta_1 - \theta_2)$ زاوية الفرق بين الطورين الابتدائيين (θ_1 , θ_2) وبجذر الطرفين نحصل على:

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2cos(\theta_1 - \theta_2)} \qquad (6)$$

العلاقة الأخيرة تعبر عن سعة الحركة التوافقية الناتجة من تراكب حركتين توافقيتين في بعد واحد، وهي تعتمد على سعة والطور الابتدائي للحركتين المتراكبتين الأصليتين.

اما بخصوص الطور الابتدائي للحركة التوافقية الناتجة من تراكب الحركتين، فيمكن حسابه من خلال قسمة المعادلة (4) على المعادلة (3) وكما يلي:

$$\frac{Asin\theta}{Acos\theta} = \frac{a_1sin\theta_1 + a_2sin\theta_2}{a_1cos\theta_1 + a_2cos\theta_2}$$

$$\theta = tan^{-1}\left[\frac{a_1sin\theta_1 + a_2sin\theta_2}{a_1cos\theta_1 + a_2cos\theta_2}\right] \qquad (7)$$

المعادلة الأخيرة تعطي الطور الابتدائي للحركة الناتجة من تراكب الحركتين بدلالة سعتي و طوري الحركتين المتراكبتين الأصليتين.

نستنتج مما سبق ان تراكب حركتين توافقيتين لهما نفس التردد في بعد واحد، الأولى معرفة بالصيغة $x_1 = a_1\,sin(\omega t + \theta_1)$ والثانية معرفة بالصيغة $x_2 = a_2\,sin(\omega t + \theta_2)$ هي حركة توافقية لها نفس التردد ويعبر عنها بالصيغة $x = A\,sin(\omega t + \theta)$ حيث يعطى السعة والطور الابتدائي لها بدلالة سعة والطور الابتدائي للحركات التوافقية الأصلية بالصيغة:

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\theta = tan^{-1}\left[\frac{a_1sin\theta_1 + a_2sin\theta_2}{a_1cos\theta_1 + a_2cos\theta_2}\right]$$

وبالتالي يمكننا ان نجد الحركة التوافقية الناتجة من تراكب اي حركتين توافقيتين لهما نفس التردد وفي بعد واحد، ولنناقش الآن تراكب حالتين خاصتين وهي:

أولاً: تراكب حركتين توافقيتين لهما نفس التردد والطور في بعد واحد

في هذه الحالة يكون للحركتين الأصليتين نفس التردد والطور $(\theta_1 =_2= \theta)$ وعندها يمكن التعبير عن الحركتين المتراكبتين بالصيغة: $x_1 = a_1\,sin(\omega t + \theta_1)$, $x_2 = a_2\,sin(\omega t + \theta_2)$

اما الحركة الناتجة من تراكب الحركتين فيمكن التعبير عنها بالصيغة:

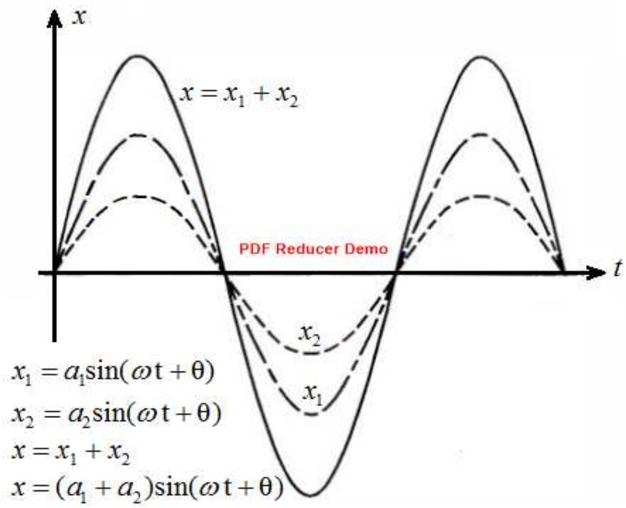
$$x = x_1 + x_2$$

$$x = a_1\,sin(\omega t + \theta_1) + a_2\,sin(\omega t + \theta_2)$$

But we have; $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

$$x = a_1\,sin(\omega t + \theta) + a_2\,sin(\omega t + \theta)$$

$$x = (a_1 + a_2)\,sin(\omega t + \theta)$$



من العلاقة الأخيرة نستنتج ان ناتج تراكب حركتين توافقيتين لها نفس التردد والطور في بعد واحد هو حركة توافقية لها نفس التردد والطور وبسعة تساوي المجموع الجبري لسعة الحركتين الأصليتين. ولهذا يسمى هذا النوع من التراكب بالتداخل البناء (constructive interference) وكما هو موضح بالشكل المجاور.

ثانياً: تراكب حركتين توافقيتين لهما نفس التردد وبينهما فرق الطور (π) في بعد واحد

في هذه الحالة يكون للحركتين الأصليتين نفس التردد وبينهما فرق في الطور مقداره $(\Delta\theta = \pi)$ ويقال عندها ان الحركتين متعاكستين في الطور، فاذا فرضنا ان الحركة التوافقية الأولى معبر عنها بالصيغة:

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \theta)$$

فان الحركة التوافقية الثانية يكون تعبيرها بالصيغة:

$$x_2 = a_2 \sin(\omega t + \theta - \pi)$$

اما الحركة الناتجة من تراكب الحركتين فيمكن التعبير عنها بالصيغة:

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \sin(\omega t + \theta) + a_2 \sin(\omega t + \theta - \pi)$$

من العلاقات المثلثية لدينا $\sin(\omega t + \theta - \pi) = -\sin(\omega t + \theta)$ نحصل على:

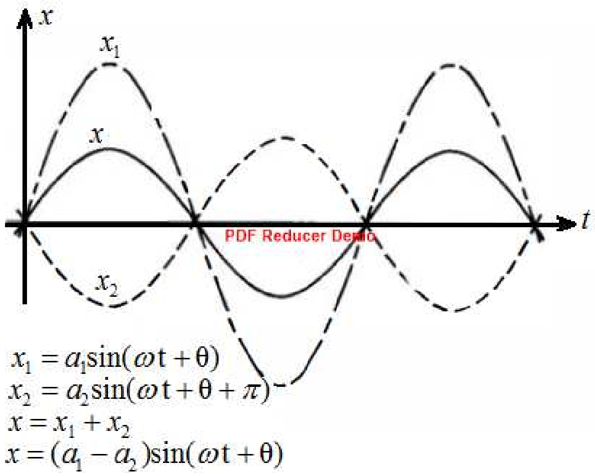
$$\sin(\omega t + \theta - \pi) = -\sin(\omega t + \theta)$$

وبالتعويض في معادلة الإزاحة الآنية نحصل على:

$$x = a_1 \sin(\omega t + \theta) - a_2 \sin(\omega t + \theta)$$

ومنه نحصل على:

$$x = (a_1 - a_2) \sin(\omega t + \theta)$$



من العلاقة الأخيرة نستنتج ان ناتج تراكب حركتين توافقيتين لها نفس التردد وبينهما فرق طور (π) في بعد واحد هو حركة توافقية لها نفس التردد والطور وبسعة تساوي الفرق بين سعتي الحركتين الأصليتين. ولهذا يسمى هذا النوع من التراكب بالتداخل الاتلافي (الهدام) (destructive interference) وكما هو موضح بالشكل المجاور.

في حالة كون السعتين متساويتين $(a_1 = a_2)$ والتداخل اتلافي فان الحركتين تلغي احدهما الأخرى.

2.2.3 تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد و مختلفتين في التردد (الضربات)

يرتبط بهذا النوع من التراكب ظاهرة فيزيائية مهمة تسمى **الضربات (Beats)** والتي يمكن تعريفها على انها **نمط خاص من الحركة الدورية تحدث عندما يتأثر جسم آنياً بحركتين توافقيتين بسيطتين الفرق بين ترديدهما قليل عندها تكون سعة الحركة الاهتزازية الناتجة للجسم تتناوب بين نهايتين عظمى وصغرى مع مرور الزمن.**

نفرض ان لدينا جسيم يتذبذب تحت تأثير حركتين توافقيتين بسيطتين مختلفتين قليلاً في التردد وعلى بعد واحد، نتيجة للاختلاف البسيط بين الترددين فان فرق الطور بين الحركتين يتغير باستمرار بصرف النظر عن الطور الابتدائي للحركتين، وبالتالي يمكننا تجاهل الطور الابتدائي للحركتين في هذه الحالة. ولذلك يمكننا التعبير عن الإزاحة الآنية للجسيم في اللحظة (t) بسبب تأثير الحركة التوافقية الأولى التي سعتها (A_1) وترددها الزاوي (ω_1) بالصيغة:

$$x_1 = A_1 sin\omega_1 t$$

وبنفس الطريقة يمكننا التعبير عن الإزاحة الآنية لنفس الجسيم في نفس اللحظة الزمنية (t) نتيجة تأثير الحركة التوافقية الثانية التي سعتها (A_2) وترددها الزاوي (ω_2) بالصيغة:

$$x_2 = A_2 sin\omega_2 t$$

وفقاً لمبدأ التراكب فان الإزاحة الآنية للجسيم يساوي المجموع الجبري للإزاحتين للحركتين المتراكبتين، اي ان:

$$x = A_1 sin\omega_1 t + A_2 sin\omega_2 t$$

للسهولة نفرض ان سعتي الحركتين المتراكبتين متساويتان ($A_1 = A_2 = A$) ومنه نحصل على:

$$x = A(sin\omega_1 t + sin\omega_2 t) \qquad (1)$$

من المتطابقات المثلثية لدينا:

$$sin\alpha + sin\beta = 2cos\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) sin\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right)$$

بالتعويض في معادلة الإزاحة الآنية (1) نحصل على:

$$x = 2Acos\left[\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t\right] sin\left[\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)t\right]$$

المعادلة الأخيرة يمكن كتابتها كدالة جيبية بالصورة:

$$x = Bsin\left[\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)t\right]$$

حيث B سعة الاهتزاز وهي في هذه الحالة معتمدة على الزمن وتعطى بالعلاقة:

$$B = 2Acos\left[\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t\right]$$

ان العلاقة الأخيرة تمثل سعة الاهتزاز في حالة الضربات (B)، ويلاحظ ان سعة الاهتزاز متغيرة مع الزمن، حيث تتراوح قيمتها من الصفر إلى اعظم قيمة وهي ($2A$).

للتوصل إلى فهم اعمق لتغير السعة في حالة الضربات ستقوم بحساب الفترة الزمنية الفاصلة بين اكبر واصغر سعتين متتاليتين وكما يلي:

أولاً: حساب الفترة الزمنية بين اكبر سعتين متتاليتين في حالة الضربات

ان سعة الاهتزاز في حالة الضربات تعطى بالصيغة:

$$B = 2A\cos\left[\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t\right]$$

ان اعظم قيمة للسعة هي $(B_{max} = \pm 2A)$ وتحدث عندما:

$$B_{max} = \pm 2A \qquad when \qquad \cos\left[\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t\right] = \pm 1$$

من خواص دالة الجيب تمام لدينا:

$$\cos\alpha = \pm 1 \quad for\ \alpha = n\pi \quad where \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots$$

اي ان اعظم قيمة للسعة تحدث عندما :

$$\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t = n\pi \qquad , \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots$$

بالتعويض عن التردد الزاوي بدلالة التردد$(\omega_1 = 2\pi f_1\ , \omega_2 = 2\pi f_2)$ نحصل على:

$$\left(\frac{2\pi f_2 - 2\pi f_1}{2}\right)t = n\pi$$

$$2\pi\left(\frac{f_2-f_1}{2}\right)t = n\pi$$

$$(f_2-f_1)t = n$$

$$t = \frac{n}{f_2-f_1} \qquad , \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots$$

$$t = \frac{0}{f_2-f_1}, \frac{1}{f_2-f_1}, \frac{2}{f_2-f_1}, \frac{3}{f_2-f_1}, \frac{4}{f_2-f_1}, \frac{5}{f_2-f_1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$t = 0, \frac{1}{f_2-f_1}, \frac{2}{f_2-f_1}, \frac{3}{f_2-f_1}, \frac{4}{f_2-f_1}, \frac{5}{f_2-f_1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta t = \frac{1}{f_2-f_1} - 0 = \frac{3}{f_2-f_1} - \frac{2}{f_2-f_1} = \frac{4}{f_2-f_1} - \frac{3}{f_2-f_1} = \frac{1}{f_2-f_1}$$

$$\Delta t_{max} = \left|\frac{1}{f_2-f_1}\right|$$

من العلاقة الأخيرة نلاحظ ان الفترة الزمنية بين اكبر سعتين متتاليتين قيمة ثابتة تساوي $\left|\frac{1}{f_2-f_1}\right|$.

ثانياً: حساب الفترة الزمنية بين اصغر سعتين متتاليتين في حالة الضربات

ان سعة الاهتزاز في حالة الضربات تعطى بالصيغة:

$$B = 2A\cos\left[\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t\right]$$

في حالة الضربات تكون السعة في قيمتها الدُنيا $(B_{min} = 0)$ في الحالة المعرفة بالصيغة:

$$B_{min} = 0 \quad , \quad when \qquad \cos\left[\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t\right] = 0$$

من خواص دالة الجيب تمام لدينا:

$$cos\alpha = 0 \quad for \quad \alpha = (n + \frac{1}{2})\pi \quad where \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \dots$$

في حالتنا فان السعة تكون صفراً عندما يتحقق الشرط:

$$\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) t = (n + \frac{1}{2})\pi \quad where \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \dots$$

بالتعويض عن التردد الزاوي بدلالة التردد($\omega_1 = 2\pi f_1$) و ($\omega_2 = 2\pi f_2$) نحصل على:

$$\left(\frac{2\pi f_2 - 2\pi f_1}{2}\right) t = (n + \frac{1}{2})\pi$$

$$2\pi\left(\frac{f_2 - f_1}{2}\right) t = (n + \frac{1}{2})\pi$$

$$t = \frac{(n + \frac{1}{2})}{f_2 - f_1} \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \dots$$

$$t = \frac{(0 + \frac{1}{2})}{f_2 - f_1}, \frac{(1 + \frac{1}{2})}{f_2 - f_1}, \frac{(2 + \frac{1}{2})}{f_2 - f_1}, \frac{(3 + \frac{1}{2})}{f_2 - f_1}, \frac{(4 + \frac{1}{2})}{f_2 - f_1}, \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$t = \frac{(\frac{1}{2})}{f_2 - f_1}, \frac{(\frac{3}{2})}{f_2 - f_1}, \frac{(\frac{5}{2})}{f_2 - f_1}, \frac{(\frac{7}{2})}{f_2 - f_1}, \frac{(\frac{9}{2})}{f_2 - f_1}, \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\Delta t_{min} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right) - (\frac{1}{2})}{f_2 - f_1}, \frac{\left(\frac{5}{2}\right) - (\frac{3}{2})}{f_2 - f_1}, \frac{\left(\frac{7}{2}\right) - (\frac{5}{2})}{f_2 - f_1}, \frac{\left(\frac{9}{2}\right) - (\frac{7}{2})}{f_2 - f_1}, \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\Delta t_{min} = \left|\frac{1}{f_2 - f_1}\right|$$

من العلاقة الأخيرة نلاحظ ان الفترة الزمنية بين اصغر سعتين متتاليتين قيمة ثابتة تساوي $\left|\frac{1}{f_2 - f_1}\right|$.

نستنتج من الاشتقاق في أولاً و ثانياً ان الفترات الزمنية بين اكبر سعتين متتاليتين هو نفسه الفترة الزمنية بين اصغر سعتين متتاليتين ويساوي مقلوب الفرق في تردد الحركتين.

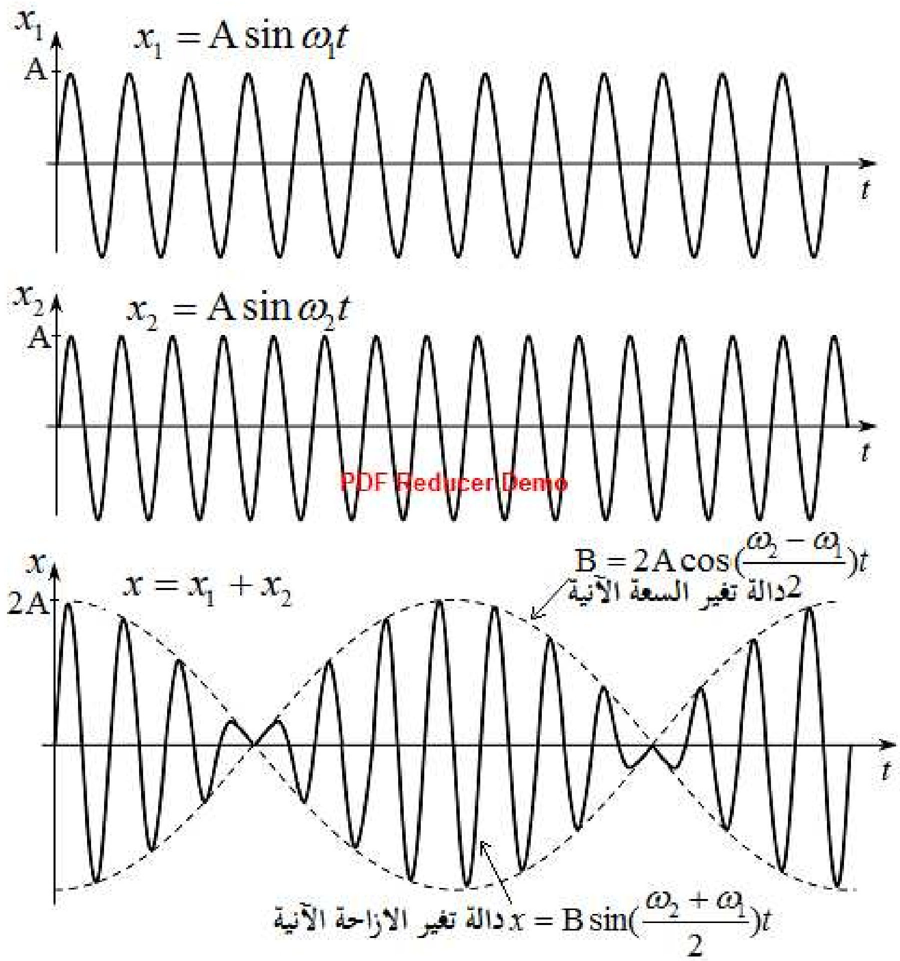
$$\Delta t_{max} = \Delta t_{min} = \left|\frac{1}{f_2 - f_1}\right|$$

كما نستنتج ان تردد الضربات (عدد الضربات في وحدة الزمن) يساوي الفرق في التردد بين الحركتين المتراكبتين، وبالتالي يمكننا التعبير عن الزمن الدوري للضربات (T_b) والتردد للضربات (f_b) بالصيغة:

$$T_b = \left|\frac{1}{f_2 - f_1}\right| \quad , \quad f_b = |f_2 - f_1|$$

مما سبق نستنتج ان محصلة تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين بينهما فرق بسيط في التردد تتحركان في بعد واحد تكون حركة توافقية بتردد يساوي متوسط تردد الحركتين $[f = (f_2 + f_1)/2]$ وسعتها تتغير دورياً مع الزمن بين مجموع السعتين والفرق بينهما وتنشأ عنها ضربات بتردد يساوي الفرق بين التردد الأصليين $[f_b = |f_2 - f_1|]$.

الشكل التالي يوضح التمثيل البياني لتراكب حركتين مختلفتين قليلاً في التردد في بعد واحد:



نلاحظ من الشكل ان الإزاحة الآنية تتغير وفقاً لدالة جيبية ترددها يساوي المتوسط الحسابي لتردد الحركتين المتراكبتين $[(\omega_2 + \omega_1)/2]$ غير ان سعة الاهتزاز (B) متغير مع الزمن وفقاً لدالة جيب تمام وبتردد $[(\omega_2 - \omega_1)/2]$ والتي تتمثل بالخط المنقط حيث يلاحظ ان سعة الاهتزاز تتغير بين اعظم قيمة (2A) إلى اقل قيمة (صفر) ضمن فترات زمنية محددة تمثل الزمن الدوري للضربات .

على سبيل المثال، اذا اهتزت شوكتان رنانتان قريبتان من بعضهما معاً وكان تردد احدهما $[f_1 = 255\,Hz]$ و تردد الثانية $[f_2 = 257\,Hz]$ فان الأذن ستسمع صوت تردده $[f = (257 + 255)/2 = 256\,Hz]$ وبضربات ترددها $[f_b = |257 - 255| = 2Hz]$ وهذا يعني ان شدة الصوت المسموع ترتفع وتنخفض مرتين في الثانية الواحدة.

مثال (1): في تجربة للحصول على أشكال ليساجو استعملت شوكتا رنين، تردد الأولى (250Hz) ووجد ان شكل ليساجو الدائري يكمل بعد مرور ($5\ s$)، كيف يمكن إيجاد تردد الشوكة الثانية؟

الحل: لدينا من معطيات المسألة $(f_1 = 250Hz)$ و $(T_b = 5sec)$

$$T_b = \left|\frac{1}{f_2 - f_1}\right| \quad , \quad f_2 - f_1 = \pm\frac{1}{T_b}$$

$$f_2 - f_1 = \pm\frac{1}{5}$$

$$f_2 = f_1 \pm 0.2$$

$$f_2 = 250 + 0.2 \quad \rightarrow \quad f_2 = 250 - 0.2$$

or

$$f_2 = 250 - 0.2 \quad \rightarrow \quad f_2 = 249.8\ Hz$$

مثال (2): احسب سرعة الصوت في غاز تولد فيه موجتان أطوالهما ($100cm$) و ($101cm$) 18 ضربة في 6 ثواني.

الحل: لدينا من معطيات المسألة

$$\lambda_1 = 100cm\ ,\ \lambda_2 = 101cm$$

$$f_b = \frac{18}{6} = 3\ Hz$$

$$v = \lambda f \quad , \quad f = \frac{v}{\lambda}$$

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} \quad , \quad and \quad f_2 = \frac{v}{\lambda_2}$$

$$f_1 = \frac{v}{100} \quad , \quad and \quad f_2 = \frac{v}{101}$$

$$f_b = |f_2 - f_1|$$

$$\left|\frac{v}{101} - \frac{v}{100}\right| = 3$$

$$v\left|\left[\frac{100 - 101}{(101)(100)}\right]\right| = 3$$

$$\frac{v}{10100} = 3$$

$$v = 30300\frac{cm}{sec} = 303\frac{m}{sec}$$

3.3 تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في اتجاهين متعامدين:

ناقشنا في الفقرة السابقة حركة جسيم الواقع تحت تأثير حركتين توافقيتين في بعد واحد، وفي هذه الفقرة سنناقش حركة جسيم الواقع تحت تأثير حركتين توافقيتين في بعدين بينهما زاوية قائمة، فعلى سبيل المثال لو كان لدينا كرة بندول بسيط معلق من نقطة ثابتة وتتحرك بحركة توافقية بسيطة باتجاه المحور الصادي وسمح لكرة البندول ان تتذبذب بنفس الوقت بسعة صغيرة باتجاه المحور السيني فان كرة البندول ستخضع لحركتين متعامدتين في وقت واحد، ونتيجة لذلك فان كرة البندول ستتحرك في بعدين بمسار يحدده محصلة هاتين الحركتين. يعرف **شكل ليساجو** (Lissajous figure) **بانه المسار المنحني الذي يسلكه الجسيم الواقع تحت تأثير حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين، ويعتمد هذا الشكل على سعة وتردد كل من الحركتين وفرق الطور بينهما. واذا كانت النسبة بين ترددي الحركتين مساوياً لعدد صحيح وفرق الطور بينهما زاوية معينة فان شكل المسار يكون مغلقاً.** سنبدأ دراسة حركة الجسيم الواقع تحت تأثير حركتين توافقيتين متعامدين لهما نفس التردد ومن ثم ندرس حركة الجسيم الواقع تحت تأثير حركتين توافقيتين متعامدتين مختلفتين بالتردد.

1.3.3 تراكب حركتين توافقيتين متعامدتين لهما نفس التردد:

نفرض ان لدينا جسيماً يتحرك في مستوي (حركة في بعدين) تحت تأثير حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين متساويتين في التردد ومختلفتين في السعة والطور الابتدائي، هناك اكثر من طريقة لدراسة شكل المسار الذي يسلكه ذلك الجسيم، ومن اهم تلك الطرق هي الطريقة التحليلية وطريقة المحور الدوار.

أولاً: الطريقة التحليلية

نفرض ان الجسيم يتحرك آنياً بتأثير حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين ومتساويتين في التردد، الأولى على امتداد المحور الأفقي (المحور السيني x-axis)، والثانية على امتداد المحور العمودي (المحور الصادي y-axis) والتي يمكن تعريفهما بالصيغة:

$$x = a sin(\omega t + \theta) \qquad (1)$$

$$y = b sin\omega t \qquad (2)$$

حيث تمثل a سعة الاهتزاز للحركة التوافقية الافقية و b سعة العمودية، (θ) زاوية الطور الابتدائي للحركة الأفقية، اما زاوية الطور الابتدائي للحركة العمودية فوضعت مساوية للصفر وذلك لتسهيل التعامل الرياضي من جهة ومن جهة ثانية فالذي يهمنا هو فرق الطور الابتدائي بين الحركتين وهو مقدار ثابت (θ).

بقسمة طرفي المعادلة (1) على (a) نحصل على:

$$\frac{x}{a} = sin(\omega t + \theta)$$

بالاستفادة من المتطابقة $[sin(\alpha + \beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta]$ نحصل على:

$$\frac{x}{a} = sin\omega t cos\theta + cos\omega t sin\theta \qquad (3)$$

لإيجاد شكل المسار الذي يسلكه الجسيم لابد من إيجاد معادلة المسار له، والتي يتم الحصول عليها من حذف عامل الزمن من العلاقة (3) و ذلك بالاستفادة من العلاقة (2) وكما يلي:

من المعادلة (2) لدينا:

$$sin\omega t = \frac{y}{b} \qquad (4)$$

بالاستفادة من المتطابقة المثلثية $[\, sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \,]$ نجد:

$$cos\omega t = \sqrt{1 - sin^2\omega t}$$

بالتعويض عن قيمة $(\sin\omega t)$ من المعادلة (4) في المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$cos\omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \qquad (5)$$

بالتعويض عن قيمة كل من $(\sin\omega t)$ و $(\cos\omega t)$ في المعادلة (3) نحصل على:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}cos\theta + \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\ sin\theta$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b}cos\theta = \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\ sin\theta$$

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}cos\theta\right)^2 = \left(\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\ sin\theta\right)^2$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b}\right)cos\theta + \left(\frac{y}{b}\right)^2 cos^2\theta = \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)sin^2\theta$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{2xy}{ab}cos\theta + \left(\frac{y}{b}\right)^2 cos^2\theta = sin^2\theta - \frac{y^2}{b^2}sin^2\theta$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}cos\theta + \frac{y^2}{b^2}cos^2\theta + \frac{y^2}{b^2}sin^2 = sin^2\theta$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}cos\theta + \frac{y^2}{b^2}(sin^2\theta + cos^2\theta) = sin^2\theta$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}cos\theta = sin^2\theta \qquad (6)$$

المعادلة الأخيرة تمثل معادلة المسار للجسيم المتحرك بتأثير حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين لهما نفس التردد ومختلفتين بالسعة والطور، وهي المعادلة العامة للقطع الناقص (Ellipse)، ويلاحظ من المعادلة ان شكل المسار يعتمد على سعة كل من الحركتين a ، b وكذلك على فرق الطور بينهما (θ).

فيما يلي دراسة لشكل المسار (أشكال ليساجو) لجسيم واقع تحت تأثير حركتين توافقيتين في بعد واحد ولهما نفس التردد لقيم محددة من فرق الطور:

1- مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد و الطور$(\theta=0)$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}cos\theta=sin^2\theta \quad , \quad \theta=0$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}cos0=sin^2 0$$

But we have $(sin\,0=0)$ and $(cos\,0=1)$ then we get:

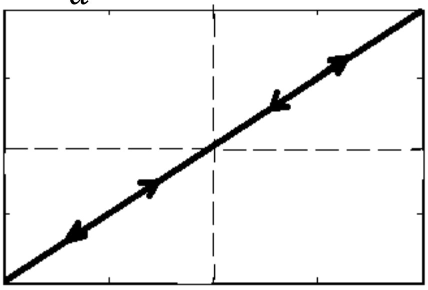
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}(1)=(0)^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2=0 \xrightarrow{yields} \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$$

$$\frac{y}{b}=\frac{x}{a}$$

$$y=\frac{b}{a}x$$



المعادلة الأخيرة هي معادلة خط مستقيم، اي ان شكل المسار في حالة كون فرق الطور مساوياً للصفر هو خط مستقيم يمر من نقطة الأصل وميله مقدار موجب ويساوي $(slope=b/a)$ كما موضح بالشكل المجاور.

2- مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور $(\theta=\pi/4)$

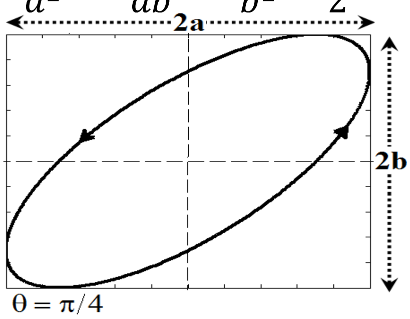
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}cos\theta=sin^2\theta \quad , \quad \theta=\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}cos\frac{\pi}{4}=sin^2\frac{\pi}{4} \quad , \qquad sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}xy}{ab}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{\sqrt{2}xy}{ab}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$$



يكون شكل المسار قطع ناقص مائل، ويكون اتجاه حركة الجسيم باتجاه معاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة، وكما هو موضح بالشكل المجاور.

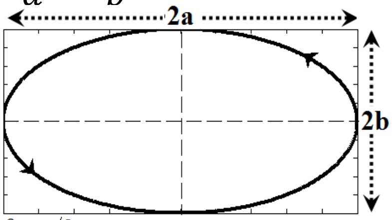
3- مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور $(\theta = \pi/2)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} cos\theta = sin^2\theta \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} cos\frac{\pi}{2} = sin^2\frac{\pi}{2} \quad , \quad sin\frac{\pi}{2} = 1 \, , \quad cos\frac{\pi}{2} = 0$$

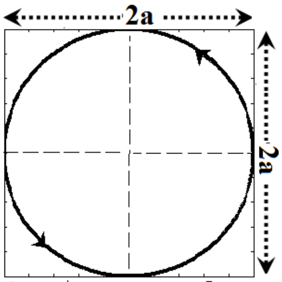
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}(0) = (1)^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



θ = π/2

يكون شكل المسار قطع ناقص محوراه الأساسيان على امتداد المحورين x و y، ويكون اتجاه حركة الجسيم باتجاه معاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة، وكما موضح بالشكل المجاور.



θ = π/2   a=b

في حالة خاصة اذا كانت سعتي الحركتين متساويان $(a = b)$

فان معادلة المسار ستكون:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

و يكون المسار على شكل دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها a. وكما هو موضح بالشكل المجاور.

4-مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور $(\theta = 3\pi/4)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} cos\theta = sin^2\theta \quad , \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

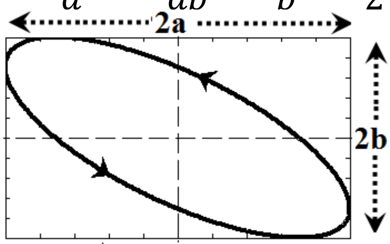
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} cos\frac{3\pi}{4} = sin^2\frac{3\pi}{4}$$

$$But\ we\ have \quad sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad cos\frac{3\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}xy}{ab}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\sqrt{2}xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$



θ = 3π/4.

يكون شكل المسار قطع ناقص مائل، ويكون اتجاه حركة الجسيم باتجاه معاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة، وكما هو موضح بالشكل المجاور.

4- مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور $(\theta = \pi)$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}cos\theta = sin^2\theta \quad , \quad \theta = \pi$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}cos\pi = sin^2\pi$$

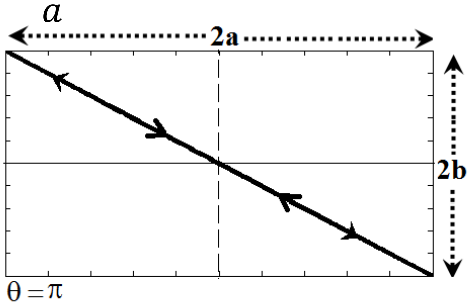
But we have $(sin\,\pi = 0)$ and $(cos\,\pi = -1)$ then we get:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}(-1) = (0)^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2xy}{ab}+\frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2 = 0 \xrightarrow{yields} \frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 0$$

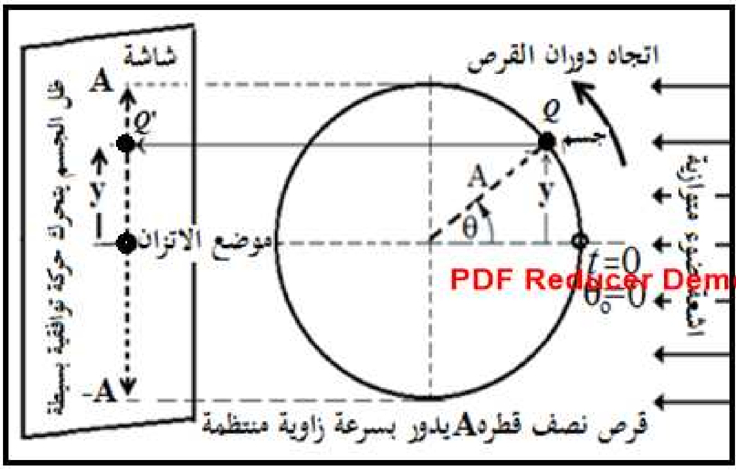
$$y = \frac{-b}{a}x$$

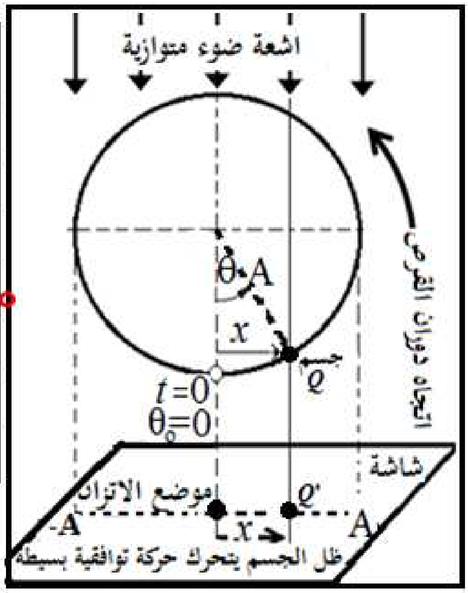


من المعادلة الأخيرة نستنتج ان معادلة المسار للجسيم المتحرك تحت تأثير حركتين توافقيتين لهما نفس التردد وبينهما فرق في الطور $(\theta = \pi)$ هي معادلة خط مستقيم ميله سالب، وكما هو موضح بالشكل المجاور.

ثانياً: طريقة المتجه الدوار

في هذه الطريقة يتم تحديد المسار الذي يسلكه الجسيم الواقع تحت تأثير حركتين توافقيتين متعامدتين بطريقة هندسية، تقوم هذه الطريقة على الاستفادة من علاقة الحركة التوافقية البسيطة بالحركة الدائرية بسرعة منتظمة، الشكل التالي يوضح تلك العلاقة، فعند تثبيت جسم صغير على طرف قرص نصف قطره (A) وتدوير القرص بسرعة زاوية منتظمة وإسقاط أشعة ضوئية متوازية والتقاط ظل الجسم على شاشة، فان ظل الجسم على الشاشة سيتحرك حركة توافقية بسيطة سعتها (A) وبتردد (ω)، اما زاوية الطور الابتدائي فتعتمد على قيمة الإزاحة الزاوية للجسم لحظة بدأ الحركة، فاذا كانت الإزاحة الزاوية لحظة بدأ الحركة مساوية للصفر فان الظل سيبدأ الحركة من موضع الاتزان $(\theta_o=0)$، اما اذا كانت الإزاحة الزاوية الابتدائية لا تساوي الصفر فان الظل يبدأ بالحركة من موضع اعلى أو اسفل موضع الاتزان، لذا يمكن تمثيل الحركة التوافقية البسيطة بدلالة حركة دائرية يمثل نصف قطر الدوران سعة الحركة، السرعة الزاوية تحدد تردد الحركة والإزاحة الزاوية الابتدائية تحدد الطور الابتدائي للحركة، ويلاحظ ان الشكل يضم جزئيين الأول تمثل فيه حركية توافقية بسيطة بالاتجاه الأفقي(x–axis)، والثاني تمثل فيه حركة توافقية بالاتجاه العمودي(y–axis).





العلاقة بين الحركة الدائرية المنتظمة و الحركة التوافقية البسيطة

نفرض ان الجسيم يتحرك بتأثير حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد الأولى بالاتجاه الأفقي والثانية بالاتجاه العمودي معرفة بالصيغتين:

$$x = a\sin(\omega t + \theta)$$

$$y = b\sin(\omega t)$$

لرسم المسار (أشكال ليساجو) الذي يسلكه الجسيم الواقع تحت تأثير الحركتين نقوم بالخطوات التالية:

1- باستعمال الفرجال نرسم دائرتين احداها تمثل الحركة التوافقية الأفقية بنصف قطر مقداره (a)، والثانية تمثل الحركة التوافقية العمودية بنصف قطر مقداره (b) وباعتماد مقياس رسم مناسب.

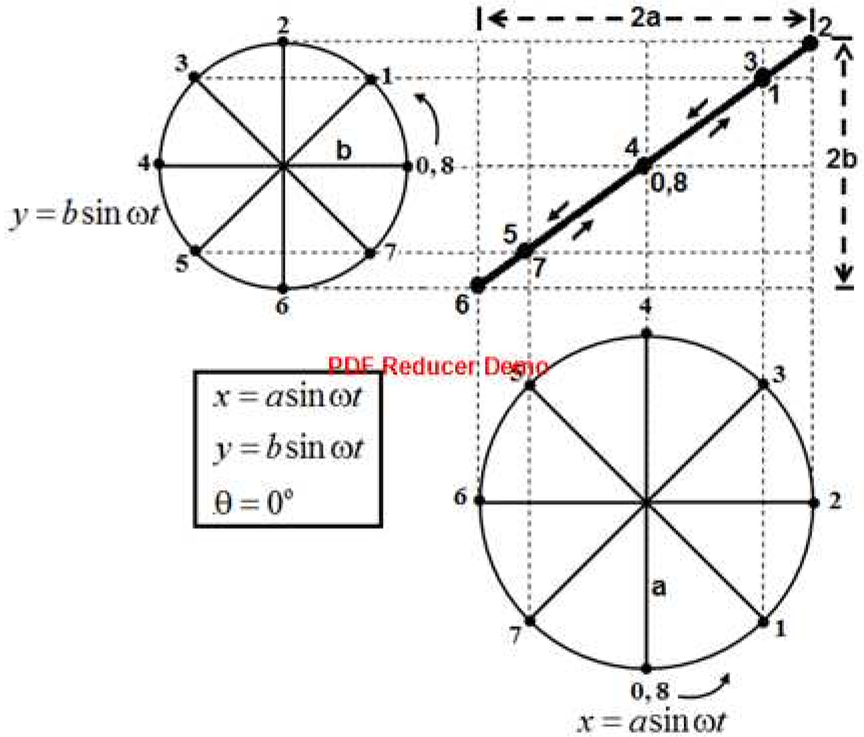
2- باستعمال المنقلة نقسم كل دائرة إلى عدد معين من الأجزاء بالاعتماد عدد نقاط الرسم المطلوبة و زاوية الطور الابتدائية وفي حالة كون زاوية فرق الطور مضاعفات $(\pi/4)$ يفضل التقسيم إلى ثمانية أجزاء (مضاعفات صحيحة لزاوية فرق الطور).

3- نرقم كل جزء تصاعدياً $(0,1,2,..)$ وباتجاه معاكس اتجاه حركة عقارب الساعة بداية من موضع الاتزان في حركة كون زاوية فرق الطور الابتدائي مساوية للصفر، وفي حالة كون هناك طور ابتدائي يتم تحديد الإزاحة الزاوية قياساً من موضع الاتزان ويبدأ الترقيم $(0,1,2,3,..)$ من الموضع الجديد.

4- نحدد نقاط تقاطع كل جزئيين متقابلين في الدائرتين ونحصل على المسار بالتوصيل بين تلك النقاط.

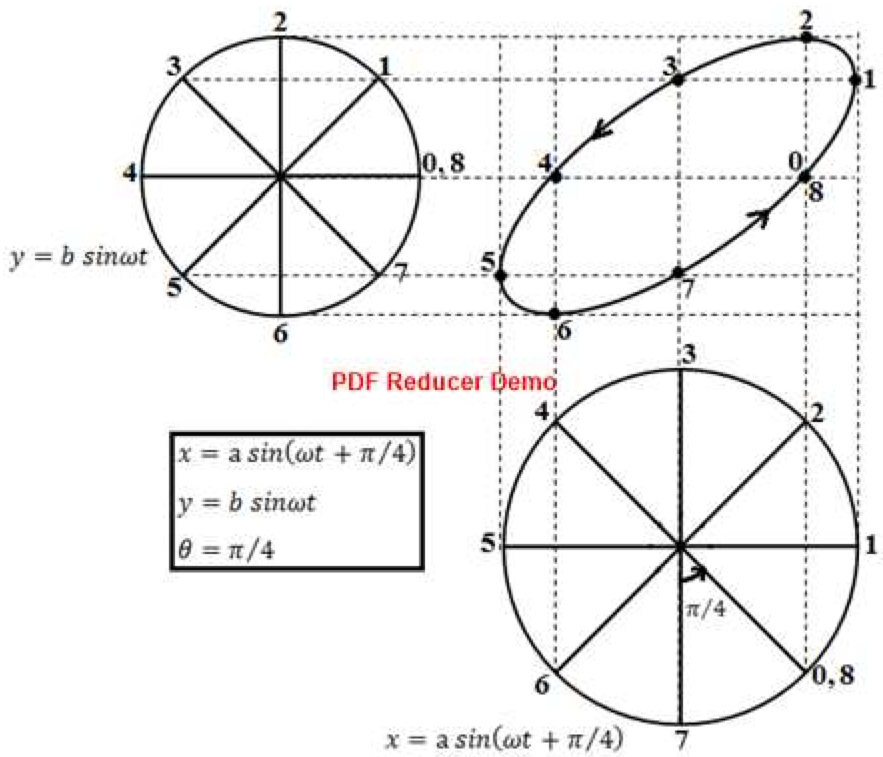
فيما يلي بعض الأمثلة لرسم مسار الجسم المتحرك بتأثير حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين لهما نفس التردد بطريقة المتجه الدوار:

1- مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد والطور $(\theta = 0)$ بطريقة المتجه الدوار

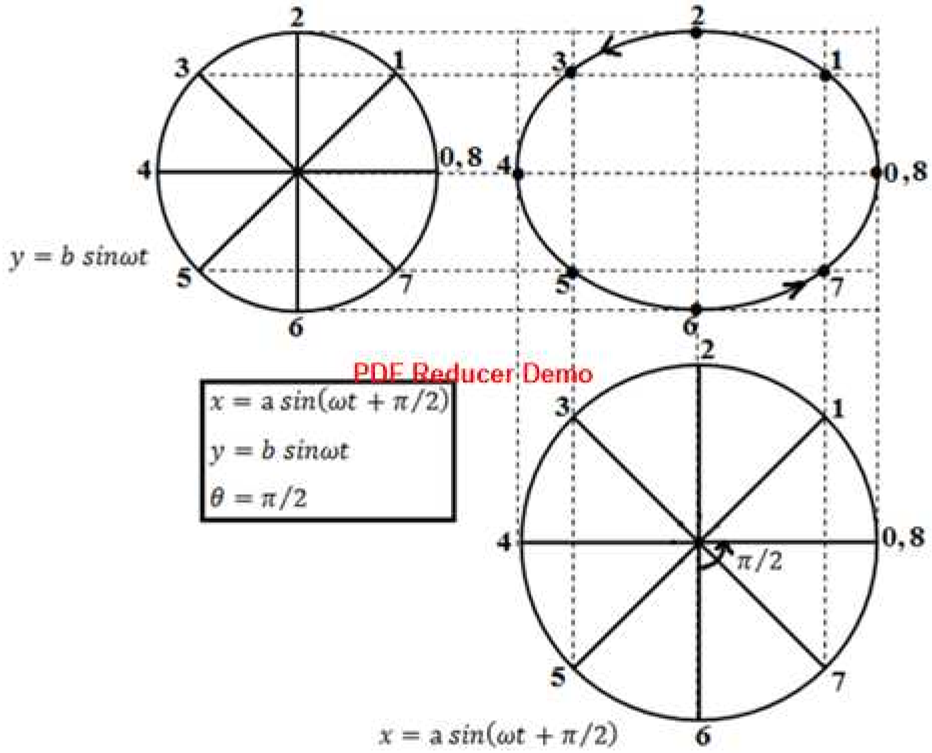


نلاحظ من الشكل مسار الجسيم المتحرك بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين لهما نفس الطور بطريقة المتجه الدوار هو خط مستقيم ميله موجب، وهو نفس المسار الذي تحصلنا عليه بالطريقة التحليلية.

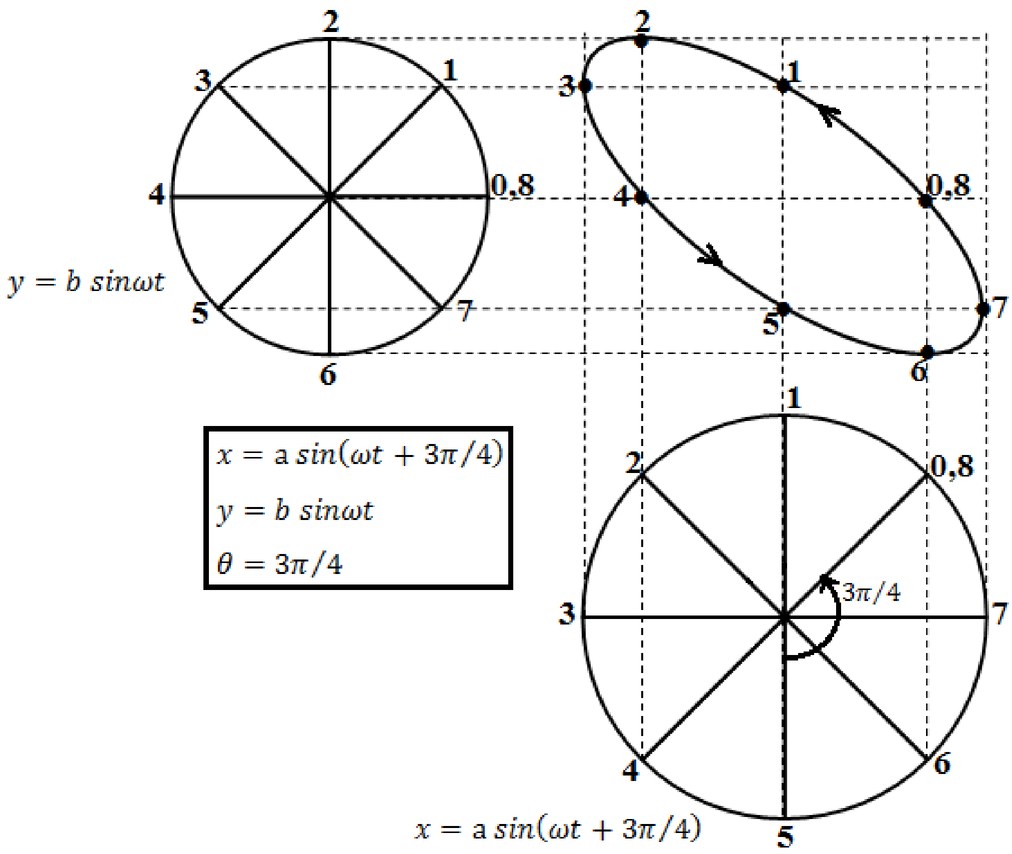
2- مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور $(\theta = \pi/4)$ بطريقة المتجه الدوار:



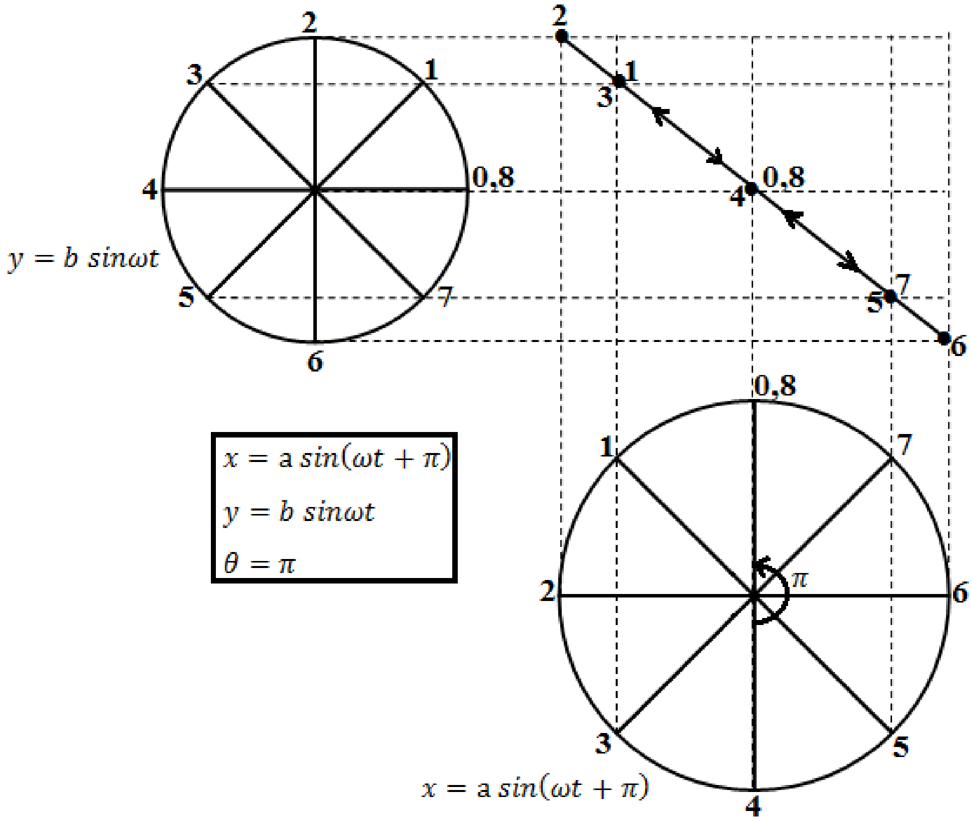
3-مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور$(\theta = \pi/2)$ بطريقة المتجه الدوار:



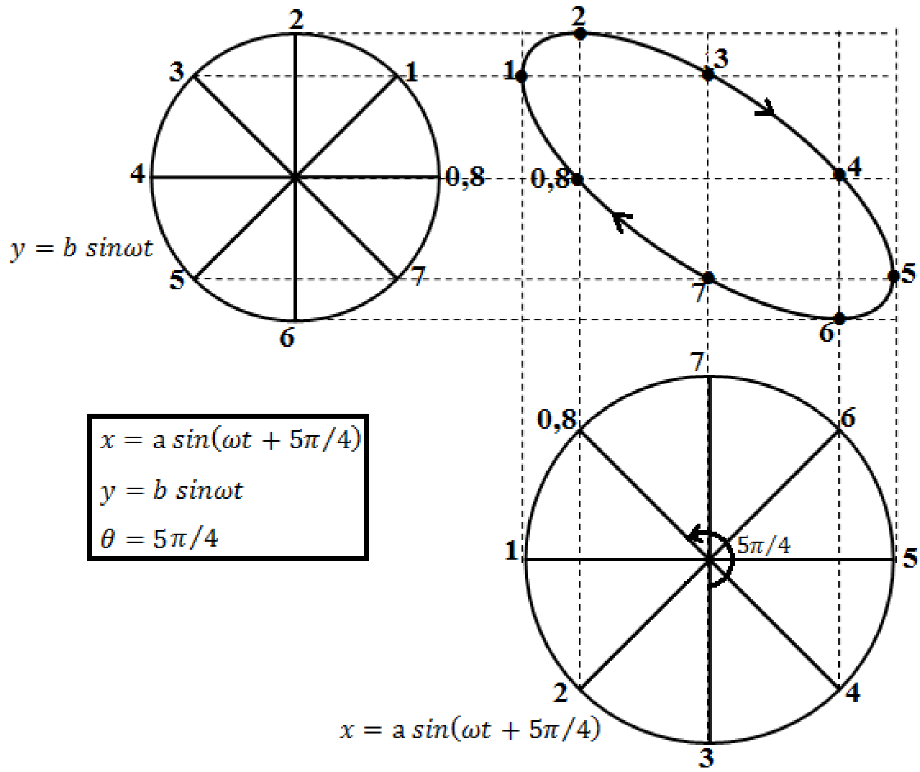
4-مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور$(\theta = 3\pi/4)$ بطريقة المتجه الدوار



5-مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور $(\theta = \pi)$ بطريقة المتجه الدوار



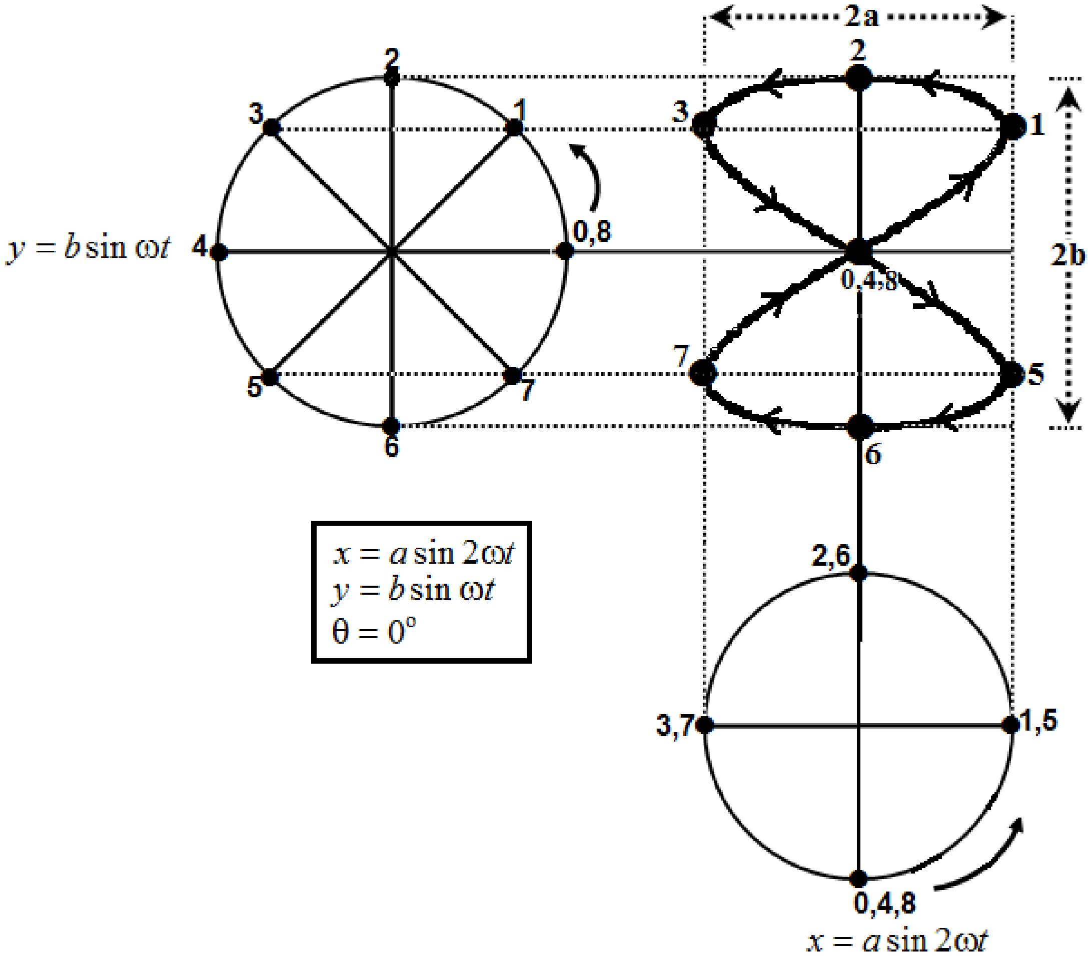
6-مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور $\left(\theta = \frac{5\pi}{4}\right)$ بطريقة المتجه الدوار



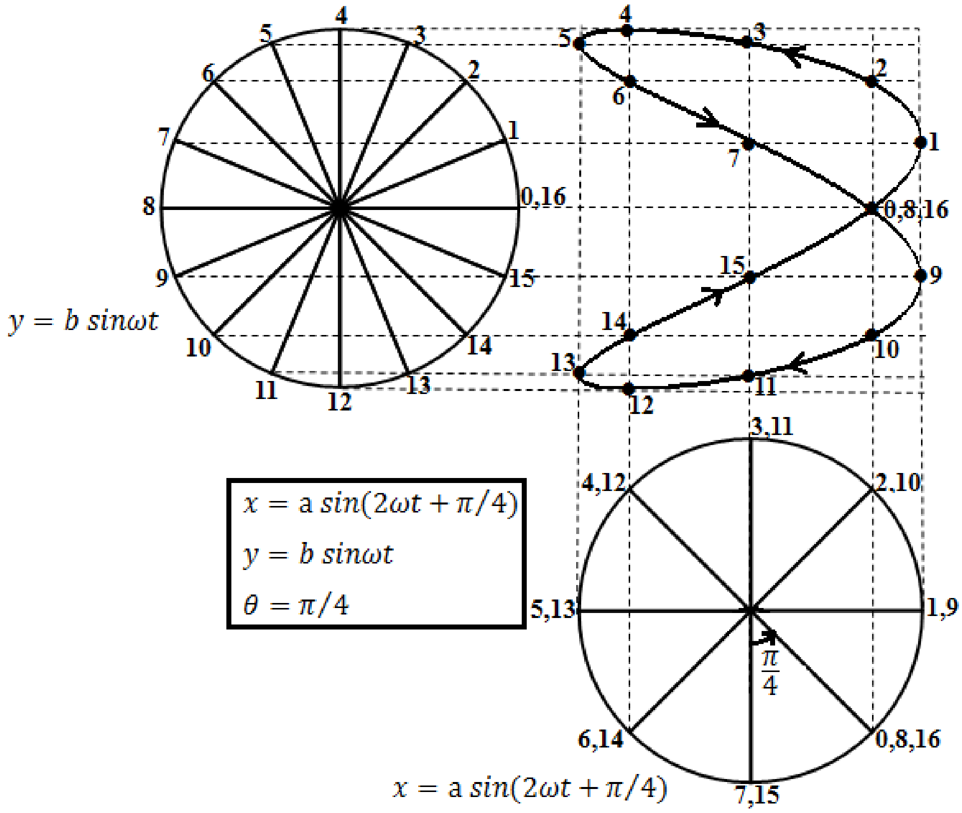
2.3.3 تراكب حركتين توافقيتين متعامدتين نسبة ترددهما كنسبة 1:2

يمكن رسم مسار الجسيم (شكل ليساجو) الواقع تحت تأثير حركتين توافقيتين متعامدتين نسبة ترددهما كنسبة 2:1 باستعمال المتجه الدوار، وفي هذه الحالة يتم رسم دائرتين الأولى بنصف قطر a تمثل الحركة التوافقية الأفقية والثانية بنصف قطر b وتمثل الحركة التوافقية العمودية، وحيث ان تردد الحركة الأفقية ضعف تردد الحركة العمودية، فان الحركة الأفقية ستنجز ذبذبتين (دورتين) عندما تنجز الحركة العمودية ذبذبة واحدة (دورة واحدة)، ولذلك يتم تقسيم دائرة الحركة الأفقية بنصف عدد تقسيمات الدائرة العمودية (مثلاً اربع تقسيمات إلى ثمانية أو ثمانية تقسيمات إلى ستة عشر وهكذا) ويستكمل الرسم.

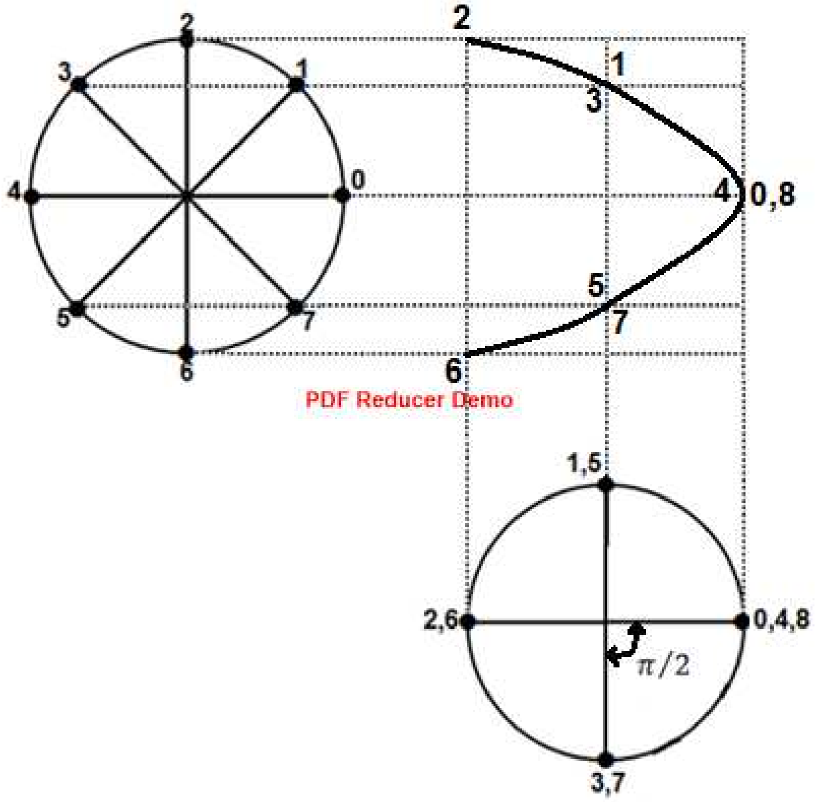
1-مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين تردد احدهما ضعف الأخرى وبينهما فرق طور $(\theta = 0, 2\pi, \ldots)$ بطريقة المتجه الدوار:



2-مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين تردد احدهما ضعف الأخرى وبينهما فرق طور ($\boldsymbol{\theta = \pi/4}$) بطريقة المتجه الدوار:



3-مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين تردد احدهما ضعف الأخرى وبينهما فرق طور ($\boldsymbol{\theta = \pi/2}$) بطريقة المتجه الدوار:



أسئلة الفصل الثالث

س1: عرف كل من: مبدأ التراكب، الضربات، أشكال ليساجو.

س2: اثبت ان محصلة تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين هي حركة توافقية بسيطة.

س3: اشتق الصيغة العامة لسعة وطور الحركة التوافقية الناتجة من تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد في بعد واحد، ثم ناقش كون الحركتين المتراكبتين:1− بنفس الطور. 2−متعاكسة بالطور.

س4: اشتق الصيغة الرياضية الخاصة بدالة الإزاحة الآنية في حالة الضربات.

س5: في حالة الضربات اثبت ان الفترة الزمنية بين اكبر سعتين متتاليتين تساوي الفترة الزمنية بين اصغر سعتين متتاليتين.

س6: اشتق الصيغة العامة لمعادلة المسار لجسيم متحرك بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين لهما نفس التردد.

س7: التردد الأقل لشوكتين رنانتين هو (380Hz)، وان دورة كاملة من التغيرات في أشكال ليساجو تحدث خلال (10s) احسب تردد الشوكة الرنانة الأخرى.   الإجابة: (380.1Hz)

س8: اكتب معادلة المسار لجسيم يتحرك بتأثير حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين لهما نفس التردد، ثم استنتج شكل المسار (مع الرسم) لكل حالة من حالات فرق الطور:

$$\left(\theta = 0,\ \pi/4\ ,\ \pi/2\ ,\ 3\pi/4\ ,\pi\ ,\ 3\pi/2\ \right)$$

س9: باعتماد طريقة المتجه الدوار وباستعمال المنقلة والفرجال ارسم شكل المسار الذي يسلكه جسيم واقع تحت تأثير حركتين توافقيتين متعامدتين لهما نفس التردد في كل حالة من حالات فرق الطور:

$$\left(\theta = 0,\ \pi/4\ \ ,\ \pi/2\ ,3\pi/4,\ \pi\ ,5\pi/4 \right)$$

س10: باستعمال طريقة المتجه الدوار ارسم أشكال ليساجو لتراكب كل زوج من الحركات التوافقية التالية:

$$a)\begin{cases} x = 3\,sin\,15\pi t \\ y = 4\,sin\,15\pi t \end{cases} \qquad c)\begin{cases} x = 4\,sin(12\pi t + \pi/4) \\ y = 3\,sin\,12\pi t \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} x = 4\,sin\,20\pi t \\ y = 3\,sin\,10\pi t \end{cases} \qquad d)\begin{cases} x = 3\,sin(50\pi t + \pi/2) \\ y = 4\,sin\,25\pi t \end{cases}$$