جامعة بغداد

University of Baghdad

كلية التربية للعلوم الصرفة (ابن الهيثم)

College of Education for Pure Science (Ibn AlHaitham)

قسم الفيزياء

Department of Physics

المرحلة : الثالثة

Stage : 3rd

محاضرات مادة : تحليل الدوال المركبة

Lectures of : Complex Functions Analysis

العام الدراسي : 2019 - 2020

الفصل الأول

The Complex Number العدد المركب

1.1. مقدمة تاريخية للعدد المركب Historical Review of Complex Number

بسبب نمو وتعقد الحياة الإنسانية مع تطور الحضارة فقد احتاج الانسان في كل مرحلة الى نظام اعداد يلبي متطلباته الحياتية. لقد شهد تطور العدد المركب لعدة مراحل يمكن تلخيصها في النقاط التالية:

- في عام 1545، نشر جيرولاما كاردامو Girolama Cardano كتابه "الفن العظيم"، مع حل المعادلة $Z^3 + a_2 Z^2 + a_1 Z + a_0 = 0$.
- في عام 1572، أظهر رافائيل بومبيلي Rafael Bombeli في كتابه "الجبر" أن الأرقام السالبة لها فائدة كبيرة.
- في عام 1732، قدم ليونهارد أويلر Leonhard Euler صيغته لحل $x^n - 1 = 0$ ، والتي $\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$، وهو أول من استخدم الرمز $i = \sqrt{-1}$.
- في عام 1831، كارل فريدريك غاوس Carl Friedric Gauss، أنتج تمثيل هندسي واضح لـ $x + iy$.

1.2. أصل الأعداد المركبة The Origin of the Complex Numbers

متعددة الحدود بصيغتها العامة $aP^2 + bP + c = 0$ يمكن حلها بوساطة الحل العام:

$$P = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

فاذا أعدنا صياغة المعادلة العامة لتصبح بالشكل

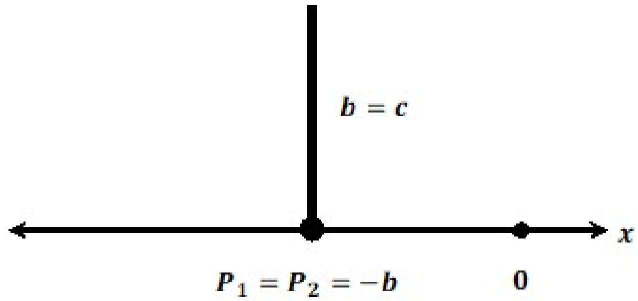
$$P^2 + 2bP + c^2 = 0, \qquad a = 1$$

فأن الحل العام سيصبح بالشكل التالي

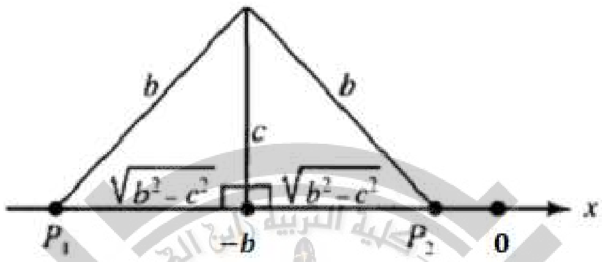
$$P = -b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$$

حيث يمكن تمثيل الحل بسهولة على خط الأرقام كإزاحة إلى اليسار واليمين من النقطة $(-b)$ بقيمة تساوي $\sqrt{b^2 - c^2}$. في هذه الحالة، لدينا ثلاث احتمالات:

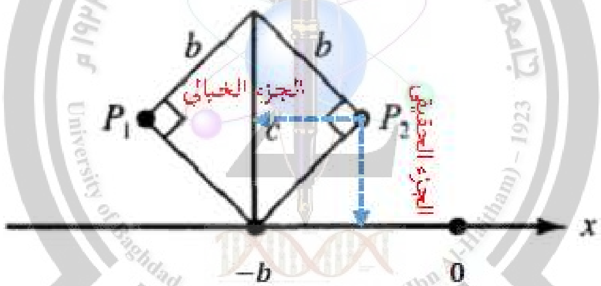
- $If\ b = c\ \ then\ \ P_1 = P_2 = -b\ \ \&\ \ b^2 - c^2 = 0$



- $If\ b > c\ then\ P_1 \neq P_2\ \&\ b^2 - c^2 > 0$



- $if\ b < c\ then\ P_1 \neq P_2\ \&\ b^2 - c^2 < 0$



كما هو موضح أن نقاط الحل P_1 و P_2 لا تقع على خط الأعداد، في الواقع ، يجب إعادة تمثيلها هندسيًا بمستوي بدلاً من الخط لتحقيق الموقع الجديد لـ P_1 و P_2 .

إن مساقط الحل على المحور الرأسي يسمى الجزء الخيالي وعلى المحور الأفقي يسمى الجزء الحقيقي .سيتم تمثيل الحل بواسطة زوج من الأرقام الحقيقية على النحو التالي:

$$\boldsymbol{Z = (x, y)}$$

1.3. أنظمة الاعداد Number Systems

قبل ابتكار نظام الأرقام المركبة، كانت هناك عدة أنظمة أرقام أخرى سبقته، وهي:

1. نظام الأعداد الصحيحة

يساعد نظام الأعداد هذا في اجراء عملية العد وحل المعادلات ذات الشكل التالي:

$$x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -c$$

2. نظام الاعداد الكسرية

يمنحنا نظام الأرقام هذا القدرة على حل المعادلات ذات الشكل التالي:

$$bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{c}{b}, \quad b \neq 0$$

3. نظام الاعداد الحقيقية

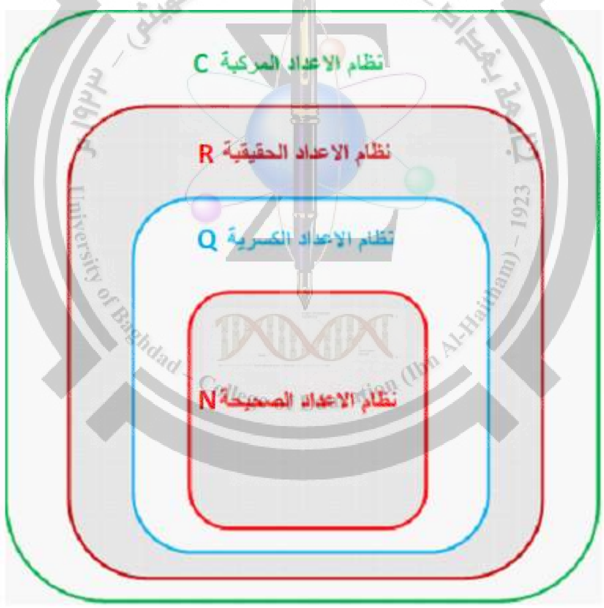
يمنحنا نظام الأرقام هذا القدرة على حل المعادلات ذات الشكل التالي:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$$

لكن جميع أنظمة الأعداد السابقة تقف عاجزة دون حل المعادلة البسيطة التالية:

$$x^2 + 1 = 0$$

من هذه الحقيقة، تأتي الحاجة إلى نظام أعداد جديد قادر على حل مثل هذه المعادلة، وقد أطلق على نظام الأعداد هذا نظام الأعداد المركبة.



1.4. العدد المركب Complex Number

يمكن تعريف الرقم المركب على أنه أزواج مرتبة $Z = (x, y)$ ، حيث x & y هي أرقام حقيقية ويمكن تشكيلها على النحو التالي:

$$Z = (x, y), \quad i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -\sqrt{-1}, \quad i^4 = 1, \quad \ldots$$

حيث x يسمى الجزء الحقيقي وy الجزء التخيلي:

$$x = Re(Z), \quad y = Im(Z)$$

مثال 1.1 : ليكن a و b اعداد صحيحة، فأن:

عدد حقيقي تام　$(a,0) = a + i0 = a$

عدد خيالي تام　$(0,a) = 0 + ia = ia$

عدد مركب　$(a,b) = a + ib$

مثال 1.2 : حدد الجزء الحقيقي والخيالي للعدد $(1 + i2)$

$$1 = real(1 + i2), \qquad 2 = Im(1 + i2)$$

1.4.1. خصائص عملية المساواة Assignment Properties

1- رقمين معقدين متساويان إذا وفقط (iff) كانت إحداثياتهما x والإحداثيات y متساوية.

$$\boldsymbol{Z_1 = Z_2 \quad iff \quad x_1 = x_2 \;\;\&\;\; y_1 = y_2}$$

$$x_1 + iy_2 = x_2 + iy_2$$

2- يكون الرقم المركب مساويًا للصفر إذا كان كلا الجزئين (الحقيقي والخيالي) يساوي الصفر، أي $x = 0, y = 0$.

$$if\ Z = 0 \;\Rightarrow\; x + iy = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \,\&\, y = 0$$

1.4.2. قانون الجمع Addition Low

$$\boldsymbol{Z_1 + Z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)}$$

1.4.3. قانون الطرح Subtraction Low

$$\boldsymbol{Z_1 - Z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)}$$

مثال 1.3 : ليكن $Z_1 = 3 + i7$ و $Z_2 = 5 - i6$، جد $Z_1 + Z_2$ و $Z_1 - Z_2$

$$Z_1 + Z_2 = (3 + i7) + (5 - i6) = (3 + 5) + i(7 - 6) = 8 + i = (8,1)$$

$$Z_1 - Z_2 = (3 + i7) - (5 - i6) = (3 - 5) + i(7 + 6) = -2 + i13 = (-2,13)$$

1.4.4. قانون الضرب Multiplication Low

$$Z_1Z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$
$$= x_1x_2 + ix_2y_1 + ix_1y_2 - y_1y_2$$
$$= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_2y_1 + x_1y_2)$$
$$\boldsymbol{Z_1Z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_2y_1 + x_1y_2)}$$

مثال 1.4 : ليكن $Z_1 = 3 + i7$ و $Z_2 = 5 - i6$، جد Z_1Z_2

$$\begin{aligned} Z_1Z_2 &= (3 + i7)(5 - i6) \\ &= 3 \times 5 + i7 \times 5 + 3 \times (-i6) + i7 \times (-i6) \\ &= 15 + i35 - i18 - 42i^2 \\ &= 15 - (-42) + i(-18 + 35) \\ &= 57 + i17 \\ &= (57,17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1Z_2 &= (3 + i7)(5 - i6) \\ &= (3 \times 5 - 7 \times (-6) + i(3 \times (-6) + 5 \times 7) \\ &= (15 + 42) + i(-18 + 35) \\ &= 57 + i17 \\ &= (57,17) \end{aligned}$$

1.4.5. المرافق المركب Complex Conjugate

المرافق المركب لعدد مركب $Z = x + iy$ (والذي يرمز له بـ $\bar{Z}$) هو $\bar{Z} = x - iy$

مثال 1.5 : ليكن $Z = 3 + i4$ عددا مركبا فأن المرافق المركب له هو $\bar{Z} = 3 - i4$

1.4.6. قانون القسمة Division Low

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$$

لإيجاد حاصل قسمة العددين $\frac{Z_1}{Z_2}$ فأننا بحاجة الى ضرب البسط والمقام بمرافق العدد المركب للمقام وكالتالي:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2}$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)$$

وبنفس الطريقة يمكننا إيجاد $\frac{1}{Z}$

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$$

1.5. خصائص العدد المرافق Properties of the Complex Conjugate

1. $Z=0 \;\Rightarrow\; \bar{Z}=0$
2. $\bar{Z}=\overline{(x+\imath y)}=x-iy$
3. $\bar{\bar{Z}}=Z$
4. $\bar{\imath}=-i \;\; and \;\; -\bar{\imath}=i$
5. $\bar{Z}=-Z \quad if\ Z\ is\ Pure\ Imagenary$
6. $\bar{Z}=Z \quad if\ Z\ is\ Pure\ Real$
7. $Z\,\bar{Z}=x^2+y^2$
8. $Z+\bar{Z}=2Re(Z)=2x$
9. $Z-\bar{Z}=2iIm(Z)=2iy$
10. a. $\overline{Z_1+Z_2}=\overline{Z_1}+\overline{Z_2}$

    b. $\overline{Z_1-Z_2}=\overline{Z_1}-\overline{Z_2}$

    c. $\overline{Z_1Z_2}=\overline{Z_1}\;\overline{Z_2}$

    d. $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}=\left(\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}\right), \quad \overline{Z_2}\neq 0$

مثال 1.6 : ليكن $Z_1=3+i7$ و $Z_2=5-i6$، جد $\frac{Z_1}{Z_2}$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{3+i7}{5-i6}\times\frac{5+i6}{5+i6}=\frac{15+i18+i35+i^2 42}{25+i30-i30-i^2 36}=\frac{15-42+i(18+35)}{25+36}$$

$$=-\frac{27}{61}+i\frac{53}{61}=\left(-\frac{27}{61},\frac{53}{61}\right)$$

مثال 1.7 : اذا علمت ان $Z_1 = 1 + i2,\quad Z_2 = 2 - i$، فجد

i. $Z_1 + Z_2$ ii. $Z_1 - Z_2$ iii. $Z_1 . Z_2$ iv. $\frac{Z_1}{Z_2}$ v. $\frac{1}{Z_1}$

$$Z_1 + Z_2 = 3 + i$$

$$Z_1 - Z_2 = -1 + i3$$

$$Z_1 . Z_2 = (1 + i2)(2 - i) = 4 + i3$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(1 + i2)}{(2 - i)} = \frac{(1 + i2)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = i$$

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{(1 + i2)} = \frac{(1 - i2)}{5} = \frac{1}{5} - i\frac{2}{5}$$

1.6. قوانين التبادل والمساواة The Commutative and Associative Lows

1. $Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$
2. $Z_1 \times Z_2 = Z_2 \times Z_1$
3. $(Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3)$
4. $(Z_1 \times Z_2) \times Z_3 = Z_1 \times (Z_2 \times Z_3)$
5. $Z \times Z^{-1} = 1,\ Z^{-1} = \frac{1}{Z}$

مثال 1.8 : اذا كان $Z = x + iy$، حل المعادلة التالية $Z^2 + Z + 1 = 0$

توجد طريقتان لحل المعادلة المركبة

الطريقة الأولى: وهي الطريقة الشائعة في حل المعادلات المركبة، والتي تتطلب التعويض بدل Z بـ $(x + iy)$ وإيجاد قيم $x\ \&\ y$، أي:

$$(x + iy)^2 + (x + iy) + 1 = 0$$

$$(x^2 - y^2 + x + 1) + i(2xy + y) = 0$$

استنادا الى خصائص المساواة، فأن:

$$x^2 - y^2 + x + 1 = 0 \quad \dots \dots (1)$$

$$2xy + y = 0 \quad \dots \dots (2)$$

بأعاده ترتيب المعادلة (2) فأننا نحصل على

$$y(2x+1)=0$$

$$\Rightarrow \text{اما } y=0 \text{ او } x=-\frac{1}{2}$$

اننا نهمل قيمة $y=0$ لأنها تجعل العدد Z عددا حقيقياً، وبتعويض $x=-\frac{1}{2}$ في معادلة رقم (1) فأننا نحصل على

$$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ الحل هو $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

<u>الطريقة الثانية</u>: والتي تتطلب استعمال الطريقة الاعتيادية في حل المعادلات لإيجاد حل المعادلة المركبة، اي

$$Z^2+Z+1=0$$

$$\Rightarrow \quad a=1,\qquad b=1,\qquad c=1$$

$$\therefore Z=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ الحل هو $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

مثال 1.9 : جد قيمة x & y اذا علمت ان $ix-y=x+1+2iy$

$$(y+x+1)+i(2y-x)=0$$

استنادا الى خواص المساواة، فأن:

$$y+x+1=0 \qquad \dots\dots 1$$

$$2y-x=0 \qquad \dots\dots 2$$

وبحل هذه المعادلتين الانيتين، فأننا نحصل على:

$$x=-\frac{2}{3} \qquad \& \qquad y=-\frac{1}{3}$$

مثال 1.10 : جد قيمة x & y اذا علمت ان $(x+iy)^2=i$

$$x^2-y^2+i(2xy-1)=0$$

استنادا الى خواص المساواة، فأن:

$$x^2 - y^2 = 0 \qquad \dots\dots 1$$

$$2xy - 1 = 0 \qquad \dots\dots 2$$

بحل معادلة رقم (1)، فأننا نحصل على:

$$x = \pm y$$

$$if\ x = y \quad \rightarrow \quad 2y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$if\ x = -y \quad \rightarrow -2y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad y^2 = -\frac{1}{2} \quad ,$$

$$neglict\ it\ since\ y\ is\ real\ number$$

$$for\ y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

الحل هو $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right), \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

مثال 1.11 : جد قيمة $x\ \&\ y$ اذا علمت ان $3x + 2y - ix + 5y = 7 + 5i$

استنادا الى خواص المساواة، فأن:

$$3x + 5y = 7 \qquad \dots\dots 1$$

$$2y - x = 5 \qquad \dots\dots 2$$

وبتعويض قيمة y بما يعادلها من معادلة (1) في معادلة (2)، فأننا نحصل على:

$$2y - \frac{1}{3}(7 - 5y) = 5$$

وبتبسيط المعادلة ينتج:

$$y = 2$$

وبعويض قيمة y في معادلة (1) ينتج:

$$x = -1$$

مثال 1.12 : اكتب المقدار g بالصيغة $a + ib$ حيث ان a, b عددان حقيقيان

$$g=\frac{5+i5}{3-i4}+\frac{20}{4+i3}$$

$$g=\left(\frac{5+i5}{3-i4}.\frac{3+i4}{3+i4}\right)+\left(\frac{20}{4+i3}.\frac{4-i3}{4-i3}\right)$$

$$g=\left(\frac{15+\mathrm{i}20+\mathrm{i}15+20\mathrm{i}^2}{9+16}\right)+\left(\frac{80-\mathrm{i}60}{9+16}\right)$$

$$g=\left(\frac{-5+i35}{25}\right)+\left(\frac{80-\mathrm{i}60}{25}\right)$$

$$g=\frac{75-i25}{25}$$

$$g=3-i$$

$$\therefore a=3,b=-1$$

مثال 1.12 : اكتب المقدار g بالصيغة $a+ib$ حيث ان a,b عددان حقيقيان

$$g=\frac{i^{30}3-i^{19}}{i2-1}$$

$$\because i^{30}=(i^2)^{15}=(-1)^{15}=-1$$

$$\&\ i^{19}=i\times i^{18}=i\times(i^2)^9=i\times(-1)^9=-i$$

$$g=\frac{-3+i}{i2-1}.\frac{-i2-1}{-i2-1}$$

$$g=\frac{i6+3-2i^2-i}{4+1}$$

$$g=\frac{5+i5}{5}=1+i$$

$$\therefore a=1,b=1$$

الواجب بيتي Home Work

س1/ للمعادلات التالية جد قيمة $x\ \&\ y$

1. $\sqrt{x^2+y^2}+i=1-2x+iy$ $\qquad (0,1),\quad \left(\frac{4}{3},1\right)$

2. $(x+y+2)i(x^2+y)=0$ $(2,-4),\quad (-1,-1)$

3. $(x^2y-2)+i(x+2xy-5)=0$ $\left(4,\frac{1}{8}\right),\quad (1,2)$

4. $(x^2+y^2-2)+i(x+y)=0$ $(1,-1),\quad (-1,1)$

5. $(3x+2y)+i(x^2+y^2-13)=0$ $(2,3),\quad (-2,3)$

6. $(x+4y)+i(x+y^2-5)=0$ $(4,-1),\quad (-20,5)$

7. $Z^2-2Z+2=0$ $(1,-1),\quad (1,1)$

8. $i(x+iy)=x+1+i2y$ $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

9. $(x+iy)^2=i$ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad \left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

10. $(x+y+2)+i(x^2+y)=0$ $(2,-4),\quad (-1,-1)$

11. $(x^2y-2)+i(x+2xy)=i5$ $(1,2),\quad \left(\frac{4}{8},\frac{1}{8}\right)$

س2/ اذا كان $Z_1=1+i2$ & $Z_2=2-i$، جد $\frac{1}{Z_1}$, $\frac{Z_1}{Z_2}$, $Z_1\times Z_2$, Z_1-Z_2, Z_1+Z_2.

س3/ ضع تراكيب الاعداد التالية بصيغة $a+ib$

1.	$\frac{((1+i)^2)}{(2+i)(1+i2)}$	$\frac{2}{5}$	12.	$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$	$-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$
2.	$\left(\frac{2+i}{3+i}-\frac{2i}{3-i}\right)^2$	$\frac{56-i90}{100}$	13.	$\left[(1+i)+\frac{1}{1+i}\right]^2$	$2+i\frac{3}{2}$
3.	$\left(\frac{\sqrt{3}}{1-i}+\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2$	$\sqrt{6}+i\frac{1}{2}$	14.	$\frac{7-i6}{2+i3}$	$-\frac{4}{13}-i\frac{33}{13}$
4.	$\left(\frac{\sqrt{3}}{1-i}+\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2(1-i\sqrt{6})$	$\frac{3}{2}\sqrt{6}-i\frac{11}{2}$	15.	$\frac{1+i2}{(2+i)^2}$	$\frac{4}{25}+i\frac{2}{25}$
5.	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{2}{\sqrt{3}}\right)(3-i)$	$3.276+i2.757$	16.	$\frac{2+i}{1-i}+\frac{2-i}{1+i}+2$	$1+i$
6.	$\frac{2+i}{\sqrt{2}-i}+\frac{2-i}{\sqrt{3}+i}+i$	$1.219+i$	17.	$(1-\mathrm{i})^2+(2+\mathrm{i})^2$	$3+2i$
7.	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2+i}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2-i}\right)^2+\frac{10}{25}+i\frac{21}{25}$	$1+i$	18.	$(1-2i)(3+2i)^2$	$29+2i$
8.	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$	$1.25+i3.22$	19.	$i(2+i3)^2$	$-12-i5$
9.	$(Z+i3)^2$	$-5+i12$	20.	$\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}$	2i

10.	$\left(\frac{1}{2}+i\frac{2}{3}\right)(3-i)$	$\frac{4}{3}+i\frac{3}{2}$	21. $\frac{1+i}{(3-i)(1-i)}$	$\frac{-1+i3}{10}$
11.	$\frac{1}{1-i}+\frac{1}{i}$	$\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}$		

س4/ اذا علمت ان $Z = x + iy$، فأثبت ما يلي:

i. $\overline{\bar{Z}+3i} = Z - 3i$ ii. $\bar{\bar{Z}} = Z$ iii. $\overline{Z+W} = \bar{Z} + \bar{W}$ iv. $\overline{Z.W} = \bar{Z}.\bar{W}$

1.7. معامل او القيمة المطلقة للعدد المركب Modulus of Absolute Value

إن المعامل أو القيمة المطلقة للرقم المركب $Z = x + iy$ هو رقم حقيقي غير سالب يرمز له بالرمز $|Z|$ وتعطى بالمعادلة:

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

1.7.1. خصائص القيمة المطلقة للعدد المركب The Properties of the Absolute Value

1. $|Z| = \sqrt{Z\bar{Z}}$
2. $|Z| = |\bar{Z}|$
3. $|Z_1 - Z_2| = |Z_2 - Z_1|$
4. $|Z_1.Z_2| = |Z_2.Z_1|$
5. $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$
6. $|Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$
7. $|Z_1 - Z_2| \ge \big||Z_1| - |Z_2|\big|$

مثال 1.11 : ليكن $Z_1 = 7 + i$ و $Z_2 = 3 + i5$، اثبت ان $|Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$.

$$|Z_1 + Z_2| = |(7 + i) + (3 + i5)| = |(7 + 3) + i(1 + 5)| = |10 + i6| = \sqrt{100 + 36}$$
$$= \sqrt{136} = 2\sqrt{34} = \sqrt{34} + \sqrt{34}$$

$$|Z_1| = |7 + i| = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50}$$

$$|Z_2| = |3 + i5| = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$|Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$$

$$\therefore\ \sqrt{34}+\sqrt{34}\le\sqrt{50}+\sqrt{34}$$

1.8. التمثيل الهندسي للعدد المركب Geometric Representation of Complex Number

يمكن تمثيل العدد المركب بطريقتين، هما:

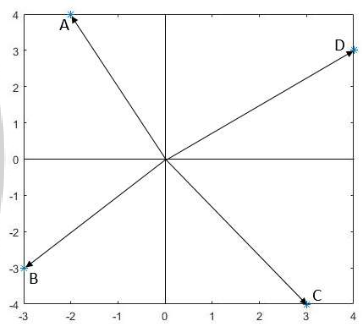
1 .يتم ترتيب الأعداد المركبة أزواجًا من الأرقام الحقيقية، بحيث يمكن تمثيلها بنقاط في المستوى.

2. يمكن تمثيل العدد المركب $Z=x+iy=(x,y)$ بواسطة متجه موضع في المستوى xy الذي يكون ذيله في نقطة الأصل ويكون رأسه عند النقطة (x,y).

مثال 1.12 : مثل الاعداد التالية هندسيا.

A) $-2+i4=(-2,4)$
B) $-3-i3=(-3,-3)$
C) $3-i4=(3,-4)$
D) $4+i3=(4,3)$

يسمى المستوى الذي يحتوي على الأرقام المعقدة بالمستوى المعقد، Z-plane، Aragand diagram



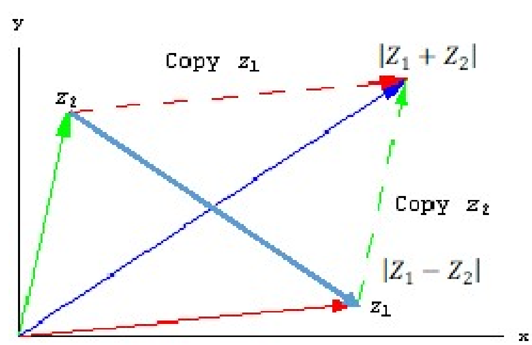
يمكن تمثيل عملية الجمع والطرح للأعداد المركبة هندسيا وكما يلي:

$$|Z_1+Z_2|\le|Z_1|+|Z_2|$$

$$|Z_1-Z_2|\ge\big||Z_1|-|Z_2|\big|$$

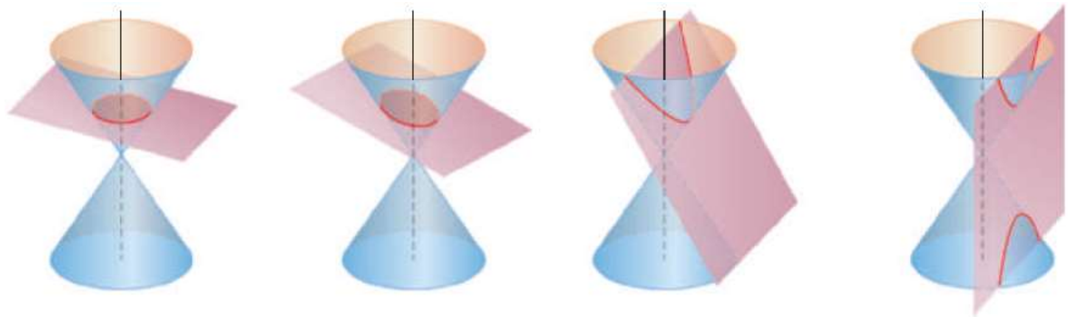
حيث يمثل $|Z|$ متجه الازاحة من نقطة الأصل الى النقطة Z.

$|Z_1-Z_2|$ يمثل متجه الازاحة من النقطة $Z_2=(x_2,y_2)$ الى النقطة $Z_1=(x_1,y_1)$، أي:



$$\overleftarrow{Z_1-Z_2}$$

1.9. القطوع المخروطية Conic Sections



Circle: plane perpendicular to cone axis

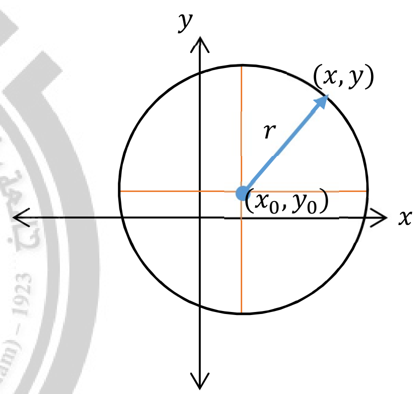
Ellipse: plane oblique to cone axis

Parabola: plane parallel to side of cone

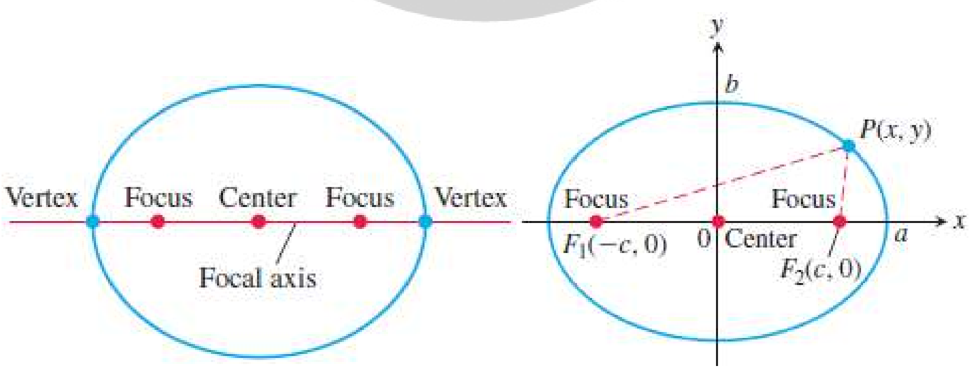
Hyperbola: plane parallel to cone axis

1.9.1. الدائرة Circle

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

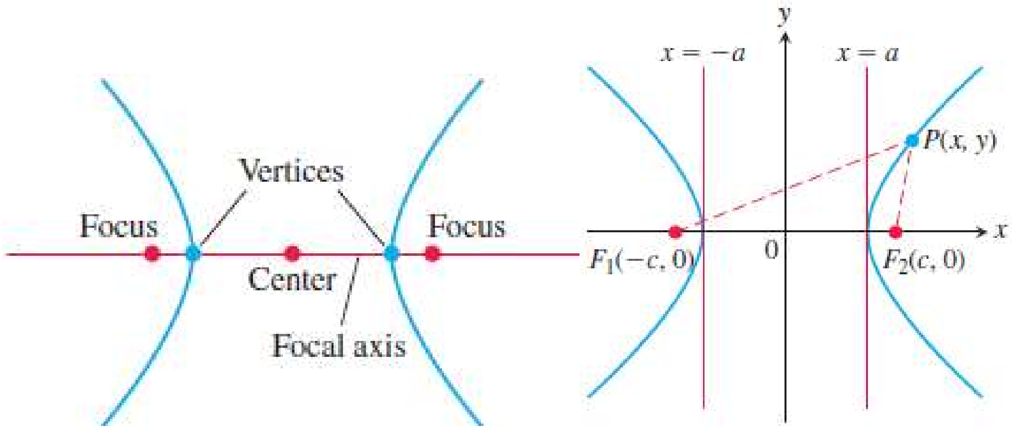


1.9.2. القطع الناقص Ellipse



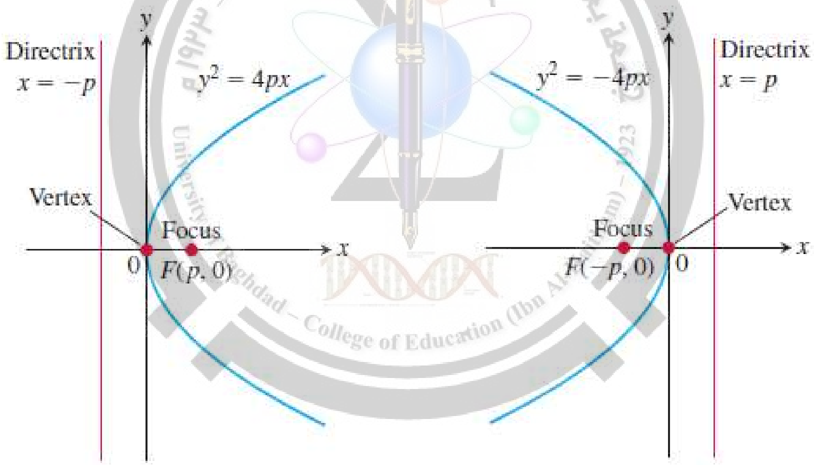
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}, \qquad a > b$$

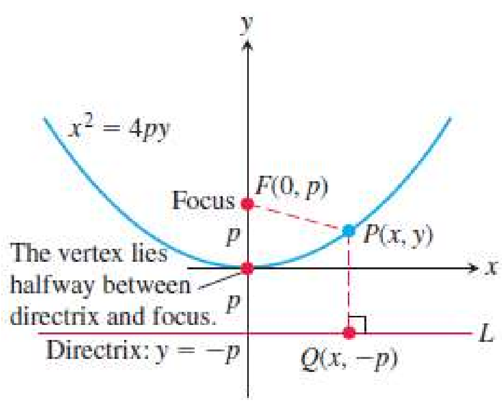
1.9.3. القطع الزائد Hyperbola



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1, \qquad c=\sqrt{a^2+b^2}, \qquad y=\frac{a}{b}x$$

1.9.4. القطع المكافئ Parabola

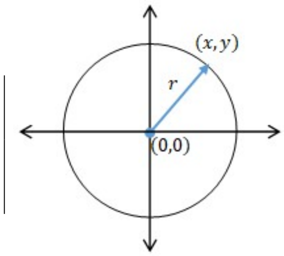




$$(y-y_0)^2=4p(x-x_0) \text{ او } (x-x_0)^2=4p(y-y_0)$$

مثال 1.13 : ارسم المعادلات التالية

A) $|Z| = r$



$$|(x+iy)| = r$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = r \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 = r^2$$

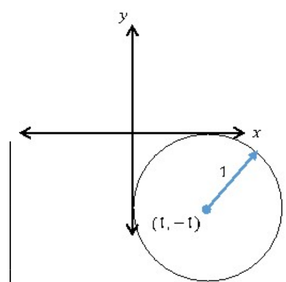
تمثل دائرة مركزها نقطة الاصل

B) $|Z - Z_0| = r$

$$\Rightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

تمثل دائرة مركزها يقع بعيدا عن نقطة الاصل

C) $|Z - 1 + i| = 1$



$$|(x+iy) - 1 + i| = 1$$

$$|(x-1) + i(y+1)| = 1$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$$

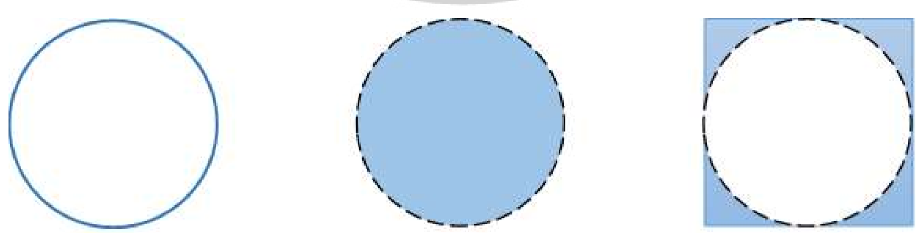
دائرة مركزها النقطة $(1,-1)$ ونصف قطرها $r = 1$

بشكل عام، فأن:

$|Z - Z_0| = r$ تمثل جميع النقاط التي تقع على محيط الدائرة.

$|Z - Z_0| < r$ تمثل جميع التي تقع داخل الدائرة (لا تشمل النقاط التي على المحيط).

$|Z - Z_0| > r$ جميع النقاط التي تقع خارج الدائرة (لا تشمل النقاط التي على المحيط).



$|Z - Z_0| = r$ $\qquad$ $|Z - Z_0| < r$ $\qquad$ $|Z - Z_0| > r$

مثال 1.14 : ارسم المعادلة التالية $|Z - i| = |Z + i|$

تمثل المعادلة جميع النقاط التي لها مسافة متساوية من النقطتين $i \ \& \ -i$ ، أي جميع النقاط التي تقع على المحور x.

$$|Z - i| = |Z + i|$$

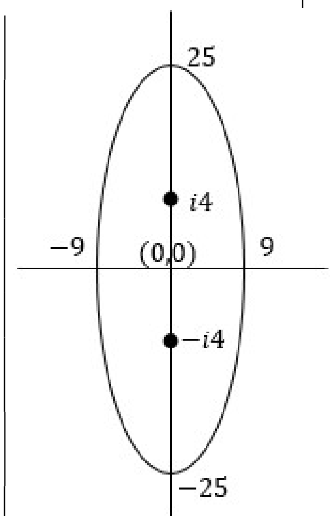
$$|x+iy-i| = |x+iy+i|$$
$$|x+i(y-1)| = |x+i(y+1)|$$
$$x^2+(y-1)^2 = x^2+(y+1)^2$$
$$x^2+y^2-2y+1 = x^2+y^2+2y+1$$
$$4y = 0$$
$$\Rightarrow \quad y = 0$$ معادلة المحور السيني

مثال 1.15 : اثبت ان المعادلة التالية هي معادلة قطع زائد.

$$|Z-i4|+|Z+i4| = 10$$

تمثل المعادلة جميع النقاط التي لها مسافة مساوية لمجموع المسافة من نقطتين ثابتتين .

$$|x+iy-i4|+|x+iy+i4| = 10$$
$$|x+i(y-4)|+|x+i(y+4)| = 10$$
$$\sqrt{x^2+(y-4)^2}+\sqrt{x^2+(y+4)^2} = 10$$
$$\sqrt{x^2+(y-4)^2} = 10-\sqrt{x^2+(y+4)^2}$$
$$x^2+y^2-8y+16 = 100-20\sqrt{x^2+(y+4)^2}+x^2+y^2+8y+16$$
$$16y+100 = 20\sqrt{x^2+(y+4)^2} \quad] \div 4$$
$$4y+25 = 5\sqrt{x^2+(y+4)^2}$$



$$16y^2+200y+625 = 25[x^2+y^2+8y+16]$$
$$16y^2+200y+625 = 25x^2+25y^2+200y+400$$
$$(16-25)y^2-25x^2 = 400-625$$
$$-9y^2-25x^2 = -225$$
$$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9} = 1$$

مثال 1.16 : حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة التالية

$$|Z+2|-|Z-2| = 2$$

$$|x+iy+2|-|x+iy-2|=2$$
$$|(x+2)+iy|-|(x-2)+iy|=2$$
$$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2+\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$
$$x^2+4x+4+y^2=4+4\sqrt{(x-2)^2+y^2}+x^2-4x+4+y^2$$
$$8x-4=4\sqrt{(x-2)^2+y^2} \qquad]\div 4$$
$$2x-1=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$
$$4x^2-4x+1=x^2-4x+4+y^2$$
$$3x^2-y^2=3$$
$$x^2-\frac{y^2}{3}=1$$

مثال 1.17 : حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة التالية

$$|Z+2|=2|Z-1|$$
$$|x+iy+2|=2|x+iy-1|$$
$$|(x+2)+iy|=2|(x-1)+iy|$$
$$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$
$$x^2+4x+4+y^2=4[x^2-2x+1+y^2]$$
$$x^2+4x+4+y^2=4x^2-8x+4+4y^2$$
$$(4-1)x^2+(-8-4)x+(4-4)+(4-1)y^2=0$$
$$3x^2-12x+3y^2=0 \qquad]\div 3$$
$$x^2-4x+y^2=0$$
$$x^2-4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2+y^2=0$$
$$x^2-4x+4+y^2=4$$
$$(x-2)^2+y^2=4$$
$$c=(2,0), \qquad r=2$$

الواجب بيتي Home Work

س1/ اثبت ان المعادلات التالية تمثل معادلة دائرة وجد مركزها ونصف قطرها

1. $|Z+1| = 2|Z+4|$ $(-5,0), \quad r=2$
2. $|Z+2| = 2|Z+5|$ $(-6,0), \quad r=2$
3. $|Z+3| = 2|Z+6|$ $(-7,0), \quad r=2$
4. $|Z+4| = 2|Z+7|$ $(-8,0), \quad r=2$
5. $|Z+5| = 2|Z+8|$ $(-9,0), \quad r=2$
6. $|Z+6| = 2|Z+9|$ $(-10,0), \quad r=2$
7. $|Z+2| = 2|Z-1|$ $(2,0), \quad r=2$
8. $|Z+2-3i| = 5$ $(-2,3), \quad r=5$

س2/ لثبت ان المعادلات التالية هي معادلة قطع ناقص

1. $|Z-2i| \pm |Z+2i| = 6$ $\quad \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$
2. $|Z-2i| \pm |Z+2i| = 10$ $\quad \frac{x^2}{21}+\frac{y^2}{25}=1$
3. $|Z-3i| + |Z+3i| = 8$ $\quad \frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$
4. $|Z-3i| + |Z+3i| = 10$ $\quad \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$
5. $|Z-i| + |Z+i| = 4$ $\quad \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$
6. $|Z-i| + |Z+i| = 8$ $\quad \frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{16}=1$
7. $|Z-i| + |Z+i| = 10$ $\quad \frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{25}=1$
8. $|Z-2i| \pm |Z+2i| = 8$ $\quad \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$
9. $|Z-4i| \pm |Z+4i| = 10$ $\quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$
10. $|Z+2i| - |Z-2i| = 12$ $\quad \frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{36}=1$

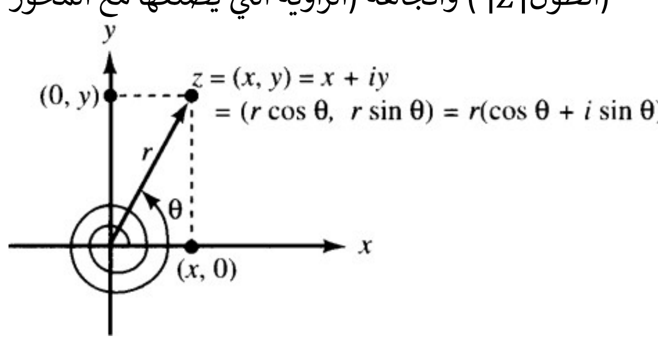
س3/ اثبت ان المعادلات التالية هي معادلات قطع زائد

1. $|Z+2|-|Z-2|=2$ $\qquad \frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1$
2. $|Z+3|-|Z-3|=2$ $\qquad \frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{8}=1$
3. $|Z+3|-|Z-3|=4$ $\qquad \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$
4. $|Z+4|-|Z-4|=4$ $\qquad \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$
5. $|Z+4|-|Z-4|=6$ $\qquad \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$
6. $|Z+6|-|Z-6|=6$ $\qquad \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$
7. $|Z+6|-|Z-6|=8$ $\qquad \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$
8. $|Z+8|-|Z-8|=12$ $\qquad \frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{20}=1$
9. $|Z+5|-|Z-5|=6$ $\qquad \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{28}=1$
10. $|Z+5|-|Z-5|=8$ $\qquad \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1$
11. $|Z+5|-|Z-5|=10$ $\qquad \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$

1.10. التمثيل القطبي للعدد المركب (Z) Polar Representation of Z

تعرفنا سابقا ان العدد المعقد يمكن تمثيله هندسيا كمتجه وعليه يمكننا وصفه بشكل فريد من حيث حجمه (الطول$|Z|$) واتجاهه (الزاوية التي يصنعها مع المحور x الإيجابي θ) .

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$\because Z = x + iy$$
$$Z = r\cos\theta + ir\sin\theta$$
$$\boldsymbol{Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$



حيث r هو طول الرقم المركب (معامله $|Z|$)

$$r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

و θ هي الزاوية التي تسمى argument of Z

$$\boldsymbol{\arg(Z) = \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}} \quad \text{او} \quad \boldsymbol{\arg(Z) = \theta = \cos^{-1}\frac{x}{r}}$$

تسمى θ & r الإحداثيات القطبية لـ Z . حيث أن θ تنتمي إلى مجموعة من الزوايا التي تختلف بمقدار 2π ، أي

$$\arg(Z) = \theta + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

وقد اتفق علماء الرياضيات على قيمة واحدة للزاوية ، وهو اختيار خاص لـ $\theta \in \arg(Z)$ ، إنها قيمة θ التي تقع قيمتها ضمن الفترة $-\pi < \theta \leq \pi$ والتي تدعى بالزاوية الاساسية $Arg(Z)$.

$$\boldsymbol{-\pi < Arg(Z) \leq \pi}$$

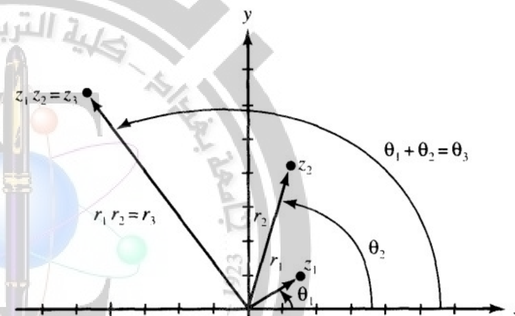
$$\boldsymbol{\arg(Z) = Arg(Z) + 2k\pi}$$

نظرية 1.1 : اذا كان Z_1 & Z_2 **عددان مركبان فأن** $\arg(Z_1Z_2) = \arg(z_1) + \arg(Z_2)$

البرهان:

$$Z_1Z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1).r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$Z_1Z_2 = r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1)]$$



$$\because \cos(\alpha \mp \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta$$

$$\& \sin(\alpha \mp \beta) = \cos\alpha\sin\beta \mp \cos\beta\sin\alpha$$

$$\therefore \boldsymbol{Z_1Z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]}$$

1.10.1. متطابقة دي موفر De Moivre Identity

انطلاقا من النظرية السابقة فيمكننا الوصول الى متطابقة دي موفر وكالتالي

$$\therefore \arg(Z_1Z_2) = \arg(Z_1) + \arg(Z_2) = \theta_1 + \theta_2 \qquad \dots\dots 1$$

$$\Rightarrow \arg(Z_1Z_2Z_3) = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

اذا افترضنا ان $Z_1 = Z_2 = Z_3 = \cdots = Z_n = Z$

$$\Rightarrow \boldsymbol{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}, \qquad \text{متطابقة دي موفر}$$

قد تفشل المعادلة (1) عندما نستخدم قيمة الزاوية الأساسية $Arg(Z)$ ، لذلك نضيف $2k\pi$ إلى المعادلة (1) لتصبح صالحة مرة أخرى ، أي

$$\boldsymbol{arg(Z_1Z_2) = Arg(Z_1) + Arg(Z_2) = \theta_1 + \theta_2 + 2k\pi}$$

مثال 1.18 : اذا علمت ان $Z_1 = -1$ و $Z_2 = i$، جد الزاوية لـZ_1Z_2

$$Arg(Z_1Z_2) = Arg(i \times -1) = Arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

$$Arg(Z_1) = Arg(-1) = \pi$$

$$Arg(Z_2) = Arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

$$Arg(Z_1Z_2) = Arg(Z_1) + Arg(Z_2) = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

لكن عند استخدام $k = -1$ فأننا نحصل على

$$Arg(Z_1Z_2) = \frac{3\pi}{2} + 2(-1)\pi = \frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$$

باستخدام متطابقة دي موفر يمكننا أن نجد العلاقة بين الجيب والجيب التمام ومضاعفاتها، على النحو التالي:

- If $n = 2$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

باستعمال خواص المساواة، فأننا سنجد ان:

$$\boldsymbol{\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta}$$

$$\boldsymbol{\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1}$$

- If $n = 3$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$
$$\boldsymbol{\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta}$$
$$\boldsymbol{\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta}$$

- If $n = 4$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$$
$$\boldsymbol{\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1}$$
$$\boldsymbol{\sin 4\theta = 4\sin\theta\cos\theta\,(1 - 2\sin^2\theta)}$$

يمكننا استخدام التمثيل القطبي لـ Z لإعادة تعريف بعض العمليات الرياضية السابقة، مثل:

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2-y^2}=\frac{x}{x^2-y^2}-i\frac{y}{x^2-y^2}$$

او

$$\boldsymbol{\frac{1}{Z}=\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\frac{1}{r}[\cos\theta-i\sin\theta]}$$

ويمكننا ان نثبت ان:

$$\boldsymbol{Z_1Z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]}$$

و

$$\boldsymbol{\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]}$$

$$\boldsymbol{\arg(Z_1\,Z_2)=\arg(Z_1)+\arg(Z_2)}$$

$$\boldsymbol{\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)=\arg(Z_1)-\arg(Z_2)}$$

$$\boldsymbol{Z=r[\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi)]}$$

1.11. صيغة اويلر Euler Formula

المتطابقة التالية تعرف بصيغة اويلر

$$\boldsymbol{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta}$$

$$\Rightarrow Z=x+iy$$

$$Z=\ r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$\boldsymbol{Z=\ re^{i\theta}}$$

وفقا لمعادلة أويلر، يمكننا أيضا إعادة تعريف بعض العمليات الرياضياتية، على النحو التالي:

$$\boldsymbol{\frac{1}{Z}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}}$$

$$\boldsymbol{Z_1Z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$$

$$\boldsymbol{\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}}$$

مثال 1.19 : اكتب الاعداد التالية بالصيغة القطبية

A) $Z=2+i2\sqrt{3}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$Z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4e^{\frac{i\pi}{3}}$$

B) $Z = -5 + i5$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$$

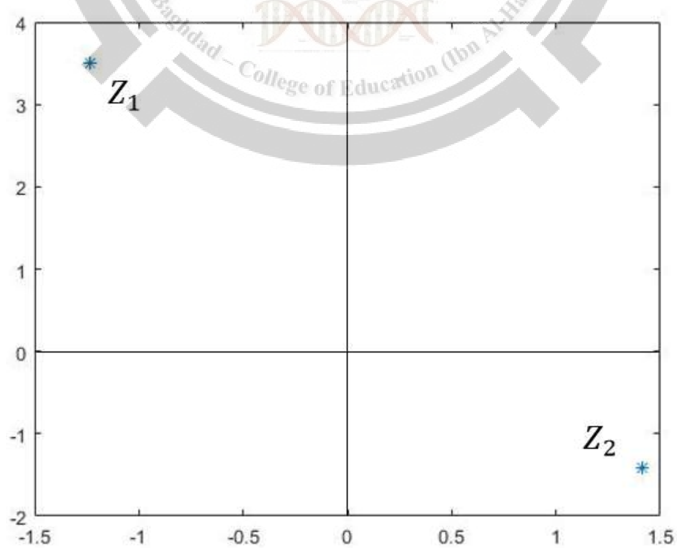
$$\theta = \tan^{-1}\frac{5}{-5} = \frac{-\pi}{4}$$

$$Z = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 5\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}$$

مثال 1.20 : ارسم الأرقام التالية بالإحداثيات المتعامدة $Z_1 = 4\,e^{i\frac{3}{5}\pi},\ Z_2 = 2\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$Z_1 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right) = -1.236 + i3.504$$

$$Z_2 = 2\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right) = -1.414 + i1.414$$



مثال 1.21 : اذا كان $Z = e^{-t}$، اثبت ان $Z^n + Z^{-n} = 2\cos nt$

$$Z^n + Z^{-n} = e^{int} + e^{-int} = \cos nt + i\sin nt + \cos nt - i\sin nt = 2\cos nt$$

1.12. القوى والجذور Powers and Roots

ليكن العدد المعقد $Z = r\ e^{i(\theta+2k\pi)}$، فأن $Z^n = r^n\ e^{in(\theta+2k\pi)}$ حيث ان n عدد موجب او سالب.
وعند استعمال هذا السياق فيمكننا تعريف التالي:

$$\boldsymbol{Z = r[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)]}$$

$$\boldsymbol{Z^n = r^n[\cos n(\theta + 2k\pi) + i\sin n(\theta + 2k\pi)],}$$
$$\boldsymbol{k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots} \quad (usually\ k = 0\ is\ fair)$$

$$\boldsymbol{Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{1}{n}(\theta + 2k\pi) + i\sin\frac{1}{n}(\theta + 2k\pi)\right], \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1}$$

$$\boldsymbol{Z^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left[\cos\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi) + i\sin\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi)\right], \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1}$$

باستعمال معادلة $Z^{\frac{1}{n}}$، يمكننا إيجاد n من الجذور، حيث يكون الفرق الزاوي بين أي جذريين متجاورين هو $\Delta\theta$:

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{n} = \frac{360}{n}$$

بالعموم، يمكننا كتابة المعادلة العامة للقوى والجذور كالتالي:

$$\boldsymbol{Z^L = r^L[\cos L(\theta + 2k\pi) + i\sin L(\theta + 2k\pi)])}$$

حيث ان

$$L = \quad n, \quad \frac{1}{n}, \quad \frac{m}{n}, \quad -n, \quad \frac{-1}{n}, \qquad \dots$$

مثال 1.22 : جد جميع الجذور للعدد $\sqrt[4]{1} = 1^{\frac{1}{4}}$

$$Z = 1, \qquad n = 4, \qquad k = 0,1,2,3$$

$$r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{0}{1} = 0 = 2\pi$$

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{1}{n}(\theta + 2k\pi) + i\sin\frac{1}{n}(\theta + 2k\pi)\right]$$

$$(1)^{\frac{1}{4}} = (1)^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{1}{4}(0 + 2k\pi) + i\sin\frac{1}{4}(0 + 2k\pi)\right]$$

$$(1)^{\frac{1}{4}} = \cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}$$

for $k = 0 \Rightarrow \sqrt[4]{1} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + i0 = 1,\ \theta = 0$

$k = 1 \Rightarrow \sqrt[4]{1} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i1 = i,\ \theta = \frac{\pi}{2}$

$k = 2 \Rightarrow \sqrt[4]{1} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i0 = -1,\ \theta = \pi$

$k = 3 \Rightarrow \sqrt[4]{1} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = 0 + i(-1) = -i,\ \theta = \frac{3\pi}{2}$

الجذور هي

1	-1
i	$-i$

- اذا كان n عدد زوجي، فسيكون نصف الجذور هي متشابهة مع اختلاف بالإشارة.

مثال 1.23 : جد جذور العدد $(1+i)^{\frac{7}{2}}$

$$Z = 1 + i,\qquad m = 7,\qquad n = 2\,,\qquad k = 0,1$$

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},\qquad \theta = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$Z^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left[\cos\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi) + i\sin\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi)\right]$$

$$(1+i)^{\frac{7}{2}} = (\sqrt{2})^{\frac{7}{2}}\left[\cos\frac{7}{2}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\frac{7}{2}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right]$$

for $k = 0 \Rightarrow (1+i)^{\frac{7}{2}} = (\sqrt{2})^{\frac{7}{2}}\left[\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}\right] = -3.1075 + i1.2872,\ \theta = \frac{7\pi}{8}$

$k = 1 \Rightarrow (1+i)^{\frac{7}{2}} = (\sqrt{2})^{\frac{7}{2}}\left[\cos\frac{63}{8} + i\sin\frac{63}{8}\right] = 3.1075 - i1.2872,\ \theta = \pi$

مثال 1.24 : حل المعادلة التالية $w^5 - w^4 + 16w - 16 = 0$

$$w(w^4 + 16) - (w^4 + 16) = 0$$

$$(w - 1)(w^4 + 16) = 0$$

Either $w - 1 = 0 \ \Rightarrow\ w = 1$

Or $w^4 + 16 = 0 \ \Rightarrow\ w = \sqrt[4]{-16}$

$$w = \sqrt[4]{-16}$$

$$Z = -16, \qquad n = 4, \qquad k = 0,1,2,3$$

$$r = \sqrt{16^2 + 0^2} = 16, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{0}{-16} = \pi$$

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{1}{n}(\theta + 2k\pi) + i\sin\frac{1}{n}(\theta + 2k\pi)\right]$$

$$(-16)^{\frac{1}{4}} = (16)^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{1}{4}(\pi + 2k\pi) + i\sin\frac{1}{4}(\pi + 2k\pi)\right]$$

$$(-16)^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2}\left[\cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}\right]$$

for $k = 0 \Rightarrow \; w = 2 + i2 = 2(1 + i)$

$k = 1 \Rightarrow \; w = -2 + i2 = 2(-1 + i)$

$k = 2 \Rightarrow \; w - 2 - i2 = 2(-1 - i)$

$k = 3 \Rightarrow \; w = 2 - i2 = 2(1 - i)$

مثال 1.25 : حل المعادلة التالية $4w^2 + 4w + i = 0$

$$w = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16i}}{8} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - i}$$

for $\sqrt{1 - i}$

$$Z = 1 - i, \qquad n = 2, \qquad k = 0,1$$

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{1}{n}(\theta + 2k\pi) + i\sin\frac{1}{n}(\theta + 2k\pi)\right]$$

$$(1 - i)^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{1}{2}(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi) + i\sin\frac{1}{2}(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)\right]$$

for $k = 0 \Rightarrow \; (1 - i)^{\frac{1}{2}} = 1.0987 - i0.4551$

$$w = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}(1.0987 - i0.4551) = \frac{1}{2} \pm 0.5493 - i0.2275 =$$

$w_1 = 1.0493 - i0.2275$

$w_2 = 0.0493 - i0.2275$

الحل هو $(0.0493, 0.2275)$, $(1.0493, 0.2275)$

مثال 1.26 : حل المعادلة التالية $Z^6 - 2Z^3 + 2 = 0$

Let $Z^3 = w$

$$\Rightarrow \quad w^2 - 2w + 2 = 0$$

$$w = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$$

$$w_1 = 1 + i, \qquad w_2 = 1 - i$$

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \qquad \theta = \pm\frac{\pi}{4}$$

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \qquad w_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z_1 = 2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right]$$

$$Z_2 = 2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{1}{3}\left(\frac{-\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\frac{1}{3}\left(\frac{-\pi}{4} + 2k\pi\right)\right]$$

for $k = 0 \rightarrow Z_1 = 1.084215 + i0.290515$

and $\rightarrow Z_2 = 1.084215 - i0.290515$

for $k = 1 \rightarrow Z_1 = -0.793701 + i793701$

and $\rightarrow Z_2 = -0.793701 - i793701$

for $k = 2 \rightarrow Z_1 = -0.290515 - i1.084215$

and $\rightarrow Z_2 = -0.290515 + i1.084215$

الواجب البيتي Home Work

س1/ جد الجذور لما يلي باستعمال الاحداثيات القطبية:

1. $\sqrt{1+i}$ — $1.0987 + i0.455$, $-1.0987 - i0.455$
2. $\sqrt{\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}}$ — $0.866025 - i0.5$, $-0.866025 + i0.5$
3. $\sqrt[3]{(1+i)^2}$ — $1.0911 + i0.633$, $-1.0911 + i0.63$, $-i1.2599$
4. $\sqrt[4]{-i}$ — $0.9239 - i0.3827$, $-0.9239 + i0.3827$, $0.3827 + i0.9239$, $-0.3827 - i0.9239$
5. $\left(\sqrt{3}-i\right)^3/\left(1-i\sqrt{3}\right)^5$ — $0.2165 + i0.125$
6. $(1+i)^{1000}$ — 2^{500}

س2/ حل المعادلات التالية:

1. $Z^2 + (3+i4)Z + (-1.75+i5.5) = 0$ $\quad Z_1 = -1.0 - i1.5, \quad Z_2 = -2 - i2.5$
2. $Z^2 + (3+i4)Z + (-2.5+i5.0) = 0$ $\quad Z_1 = -2.5 - i2.5, \quad Z_2 = -0.5 - i1.5$
3. $Z^2 + (5+i2)Z + (5.25+i5.5) = 0$ $\quad Z_1 = -2.0 - i1.5, \quad Z_2 = -3.0 - i0.5$
4. $Z^2 + (5+i2)Z + (4.5+i6.0) = 0$ $\quad Z_1 = -3.5 - i0.5, \quad Z_2 = -1.5 - i1.5$
5. $Z^2 + (6+i)Z + (8.75+i2.5) = 0$ $\quad Z_1 = -2.5 + i0, \quad Z_2 = -3.5 - i$

س3/ اثبت ان $(-1+i)^7 = 8(1+i)$.

س4/ ارسم ستة جذور للعدد 1.

الفصل الثاني

الدالة التحليلية Analytic Function

2.1. الدالة المركبة Complex Function

اذا فرضنا ان كل من Z و W هما عددان مركبان، فأن عملية ربط (اقران) العدد Z مع العدد W يدعى بالدالة، وهي معقدة ايضاً.

$$W = f(Z)$$

وتدعى القيم التي يمكن ان يأخذها العدد Z بمجال الدالة Domain (D) والقيم التي يمكن ان يأخذها العدد W بمدى الدالة Rang (R) $\{W = f(Z): Z \in D\}$.

مثال 2.1 : حدد مجال و مدى الدوال التالية:

1. $w = f(Z) = 2Z^2 + 4Z + 1$ $\quad D = \{Z: Z \in C\}$ Entire function
2. $w = f(Z) = |Z - 4|$ $\quad D = \{Z: Z \in C\}$ Entire function
3. $w = f(Z) = \dfrac{1}{Z^2 + 4}$ $\quad D = \{Z: Z \in C \backslash \pm 2i\}$

تماما كما Z ، يمكن التعبير عن الدالة المعقدة بأجزائها الحقيقية والخيالية ، $Z = x + iy$. يمكننا أن نكتب $f(Z) = w = u + iv$ ، حيث $u \& v$ هي أجزاء حقيقية وتخيليّة من W على التوالي.

$$w = f(Z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

حيث $u \& v$ هما دوال حقيقية

مثال 2.2 : اكتب الدالة التالية بصيغة $u + iv$

$$w = Z^2$$

$$w = f(Z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \qquad \& \qquad v(x, y) = 2xy$$

2.1.1. أنواع الدوال Types of functions

وفقًا لنوع مجال الدالة ومداها، يتم تصنيف الدوال بشكل عام إلى الأنواع التالية:

1. دالة ذات قيمة واحدة: هي دالة تعين قيمة واحدة لـ Z لقيمة واحدة فقط من $W = f(Z)$.

$$W = f(Z) = Z^2 + 3Z$$

2. دالة قيمة متعددة.

   a. دالة متعدد إلى واحد

   وهي دالة تقوم بتعيين عدة قيم من Z إلى قيمة W واحدة.

$$W = f(Z) = |Z|, \qquad W = f(Z) = Z^2$$

   b. دالة واحد إلى متعدد

   وهي دالة تقوم بتعيين قيمة واحدة لـ Z إلى عدة قيم لـ W .

$$w = f(Z) = \sqrt{Z}$$

3. الدالة المعكوس

إذا كان $w = f(Z)$ و$Z = g(w)$ ، فإن $g()$ هي دالة معكوسة لـ $f()$ وكتابة كـ $g() = f^{-1}()$.

$$W = f(Z) = \frac{1}{Z+2}, \qquad Z = g(W) = f^{-1}(w) = \frac{1}{W} - 2$$

4. الدالة المركبة

إذا كان $f(Z)$ و $g(Z)$ دالتان ، فإن $f[g(Z)]$ و $g[f()]$ هي دوال مركبة.

$$f(Z) = e^Z, \qquad g(Z) = z^2 + 10$$

$$f[g(Z)] = e^{Z^2+10}, \qquad g[f(Z)] = (e^Z)^2 + 10$$

2.2. الغايات Limits

ليكن $f(Z) = U(x,y) + iV(x,y)$ دالة مركبة معرفة في بعض الجوار من $Z_0 = x_0 + iy_0$ ، ثم تكون الدالة $f(Z)$ لها غاية (ليكن $W_0 = U_0 + iV_0$) عندما يقترب Z من Z_0، أي

$$\lim_{Z \to Z_0} f(Z) = W_0 = U_0 + iV_0$$

إذا وإذا فقط

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} U(x,y) = U_0 \ \ and \ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} V(x,y) = V_0$$

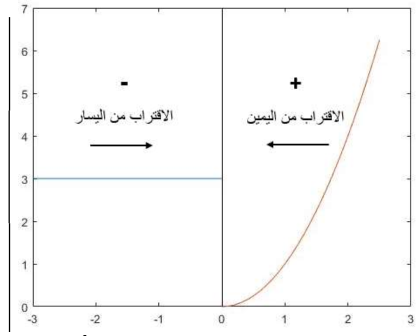
وهي قيمة فريدة عند الاقتراب من اليمين أو اليسار إلى النقطة Z_0.

مثال 2.3 : جد فيما اذا انت الدالة التالية تملك غاية عند النقطة (0,0).

$$f(Z)=\begin{cases}3i & Z<0\\ Z^2 & Z\geq 0\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} f(0)=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0^-\\ y\to 0^-}} f(0)=3i$$



لا تملك الدالة غاية لامتلاكها أكثر من قيمة عند الاقراب من اليمين واليسار.

2.2.1. خصائص الغايات Properties of limits

اذا كانت $f(Z)$ & $g(Z)$ دوال لـ Z وكان $\lim_{Z\to Z_0} f(Z)=L\ \&\ \lim_{Z\to Z_0} g(Z)=M$ فأن:

1. $\lim_{Z\to Z_0}[f(Z)\pm g(Z)]=L\pm M$

2. $\lim_{Z\to Z_0}[f(Z)\times g(Z)]=L\times M$

3. $\lim_{Z\to Z_0}\frac{f(Z)}{g(Z)}=\frac{L}{M}$

4. $\lim_{Z\to Z_0}\frac{1}{g(Z)}=\frac{1}{M}$

5. قاعدة هوسبتال

$$\lim_{Z\to Z_0}\frac{f(Z)}{g(Z)}=\lim_{Z\to Z_0}\frac{f'(Z)}{g'(Z)}\quad if\ the\ first\ limits\ dose\ not\ exist$$

مثال 2.4 : جد الغاية للدوال التالية:

1.	$\lim_{Z\to 1+i}\frac{5Z+1}{5Z+i}=\frac{5+i5+1}{5+i5+i}=\frac{6+i5}{5+i4}=\frac{1}{41}(50+i)$
2.	$\lim_{Z\to 2i}(Z^2+4Z-2)=-4+8i-2=-6+8i$
3.	$\lim_{Z\to i}\frac{iZ^3-1}{Z+i}=\frac{i(i)^3-1}{i+i}=\frac{1-1}{2i}=0$

4.	$$\lim_{Z\to 2e^{\frac{i\pi}{3}}}\frac{Z^3+8}{Z^4+4Z^2+16}=\frac{\left(2e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^3+8}{\left(2e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^4+4\left(2e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^2+16}=\frac{8e^{i\pi}+8}{16e^{\frac{i4\pi}{3}}+16e^{\frac{i2\pi}{3}}+16}$$ $$=\frac{-8+8}{16[-0.5-i0.866-0.5+i0.866+1]}=\frac{0}{0}$$ لعدم وجود الغاية، فأننا سنستخدم قاعدة هوسبتال $$f'(Z)=\frac{3Z^2}{4Z^3+8Z}=\frac{3Z}{4Z}\left(\frac{Z}{Z^2+2}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{Z}{Z^2+2}\right)$$ $$\lim_{Z\to 2e^{\frac{i\pi}{3}}}\frac{3}{4}\left(\frac{Z}{Z^2+2}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{\left(2e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^2+2}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{0.5+i0.866}{-1+i1.732}\right)=0.375-i0.217$$
5.	$$\lim_{Z\to\infty}\frac{2Z^2+5Z-3}{-Z^2+3Z-1},$$ بالقسمة على اعلى اس $$\lim_{Z\to\infty}\frac{2+\frac{5}{Z}-\frac{3}{Z^2}}{-1+\frac{3}{Z}-\frac{1}{Z^2}}=-2$$
6.	$$\lim_{Z\to 0}\frac{\log(\cos Z)}{Z^2}=\frac{0}{0}$$ لعدم وجود الغاية، فأننا سنستخدم قاعدة هوسبتال $$\lim_{Z\to 0}\frac{-\frac{\sin Z}{\cos z}}{2Z}=\lim_{Z\to 0}\left(\frac{\sin Z}{Z}\right)\times\lim_{Z\to 0}\left(-\frac{1}{2\cos Z}\right)=\lim_{Z\to 0}\left(\frac{cosZ}{1}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1\times\frac{-1}{2}=\frac{-1}{2}$$

الواجب البيتي Home Work

س1/ جد مجال الدوال التالية:

$$f(Z)=\frac{1}{Z},\qquad \frac{Z-1}{Z+1},\qquad \frac{1}{Z^2+1},\qquad \frac{Z}{Z+\bar{Z}}$$

س2/ اكتب الدالة المركبة $f[g(Z)]$ & $g[f(Z)]$

a. $g(Z)=\sqrt{1-Z},\quad f(Z)=Z-1$

b. $g(Z)=Z^2,\quad f(Z)=\frac{1}{Z-1}$

س3/ جد غاية الدوال التالية:

1.	$\lim\limits_{Z\to\infty}\dfrac{5Z-5}{-4Z+1}$	$-\dfrac{5}{4}$
2.	$\lim\limits_{Z\to 2i}\left[\dfrac{Z+2-i}{Z^2+Z-1}\right]^2$	$-0.02+i0.17$
3.	$\lim\limits_{Z\to 1}\dfrac{(Z-1)+(Z^2-1)}{Z^{16}-1}$	$\dfrac{3}{16}$
4.	$\lim\limits_{Z\to 0}\dfrac{\sin Z-\tan Z}{Z^2}$	0

2.3. الاستمرارية Continuity

يطلق على الدالة $w=f(Z)$ مستمرة في نقطة $Z=Z_0$ إذا تم تعريفها في Z_0 وجوارها وتستوفي الشروط التالية:

1. $f(Z)$ معرفة في Z_0

$$f(Z)=2Z^2-3Z+2$$
$$f(1)=2-3+2=1$$

2. الغاية $\lim\limits_{Z\to Z_0} f(Z)$ موجودة

$$\lim_{Z\to 1}(2Z^2-3Z+2)=2-3+2=1$$

3. الغاية $\lim\limits_{Z\to Z_0} f(Z)$ تساوي $f(Z_0)$

$$\lim_{Z\to 1} f(Z)=1=f(z)$$

الأنواع الأكثر شيوعا من الانقطاعات هي:

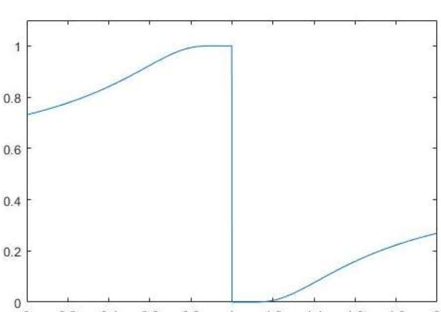
1. قيمة الدالة تميل إلى اللانهاية

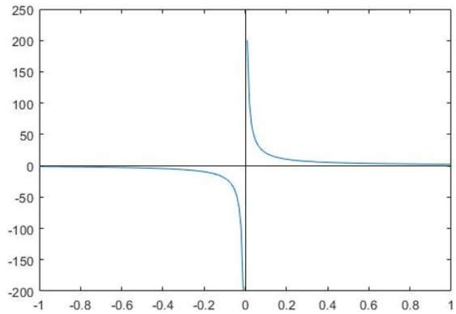
$$f(Z)=\tan(Z)\quad at\ Z=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ f(Z)=\infty$$

$$f(Z)=\frac{1}{x-1}\quad at\ Z=1\ \Rightarrow\ f(Z)=\infty$$

2. قفزة متناهية

$$\lim_{Z\to 1^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}-1}}=1,\qquad \lim_{Z\to 1^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}-1}}=0$$





3. الانقطاع القابل للإزالة

الدالة تمتلك غاية ولكنها غير معرفة في النقطة $Z = Z_0$

$$f(Z) = \frac{\sqrt{1+Z}-1}{Z},$$

$$at\ Z = 0 \ \Rightarrow\ f(Z) = \frac{0}{0},\quad undifined\ at\ Z = 0$$

$$\lim_{Z\to 0}\frac{\sqrt{1+Z}-1}{Z} = \frac{1}{2},\qquad using\ hospital\ rule$$

$$f(Z) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+Z}-1}{Z} & Z\neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & Z=0 \end{cases}$$

2.4. المشتقة Derivative

للدالة $f(Z)$ المُعرّفة في المجال D، ان مشتقتها في النقطة Z_0 (وتكتب $f'(Z_0)$) كما يلي:

$$f'(Z_0) = \lim_{Z\to Z_0}\frac{f(Z)-f(Z_0)}{Z-Z_0}$$

$$f'(Z_0) = \lim_{\Delta Z\to 0}\frac{f(Z)-f(Z_0)}{\Delta Z}$$

تكون الدالة قابلة للاشتقاق في النقطة Z_0 اذا امكن اشتقاق الدالة في Z_0.

2.5. مشتقة الدالة المركبة The Derivative of Complex Function

بما ان

$$f'(Z_0) = \lim_{\Delta Z\to 0}\frac{f(Z)-f(Z_0)}{\Delta Z}$$

وباختيار $\Delta Z = (\Delta x, 0) = \Delta x$

$$f'(Z_0) = \lim_{\Delta Z\to 0}\frac{f(Z)-f(Z_0)}{\Delta Z}$$

$$f'(Z_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{U(x+\Delta x, y) + iV(x+\Delta x, y) - U(x_0, y_0) - iV(x_0, y_0)}{\Delta x}\right]$$

$$f'(Z_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{U(x+\Delta x, y) - U(x_0, y_0)}{\Delta x} + i\frac{V(x+\Delta x, y) - V(x_0, y_0)}{\Delta x}\right]$$

$$\boldsymbol{f'(Z_0) = \frac{\partial U(x_0, y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x}} \qquad \ldots\ldots 1$$

وباختيار $\Delta Z = (0, \Delta y) = i\Delta y$

$$f'(Z_0) = \lim_{\Delta y \to 0}\left[\frac{U(x, y+\Delta y) + iV(x, y+\Delta y) - U(x_0, y_0) - iV(x_0, y_0)}{i\Delta y}\right]$$

$$f'(Z_0) = \lim_{\Delta y \to 0}\left[\frac{U(x, y+\Delta y) - U(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i\frac{V(x, y+\Delta y) - V(x_0, y_0)}{i\Delta y}\right]$$

$$\boldsymbol{f'(Z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial U(x_0, y_0)}{\partial y} + \frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial y}} \qquad \ldots\ldots 2$$

2.5.1. قوانين الاشتقاق Differentiation Formulas

1. $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$
2. $\dfrac{d}{dx}(cx) = c \;;\quad c = constant$
3. $\dfrac{d}{dx}(cx^n) = ncx^{n-1}$
4. $\dfrac{d}{dx}(u \pm v \pm w \pm \cdots) = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx} \pm \dfrac{dw}{dx} \pm \cdots$
5. $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{du}{dx}$
6. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$
7. $\dfrac{d}{dx}(uvw) = uv\dfrac{dw}{dx} + uw\dfrac{dv}{dx} + vw\dfrac{du}{dx}$
8. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$
9. $\dfrac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$

10. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ $(Chain\ rule)$

11. $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du}}$

12. $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}$

13. $\frac{d}{dx}\sin u = \cos u \frac{du}{dx}$

14. $\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$

15. $\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$

16. $\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{\log_a e}{u}\frac{du}{dx} \quad a \neq 0, 1$

17. $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{d}{dx}\log_e u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

18. $\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$

19. $\frac{d}{dx}e^u = \frac{e^u du}{dx}$

20. $\frac{d}{dx}u^v = \frac{d}{dx}e^{v\ln u} = e^{v\ln u}\frac{d}{dx}[v\ln u] = e^{v\ln u}\left[vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}\right]$

مثال 2.5 : جد مشتقة الدوال التالية عند النقطة Z_0.

1.	$f(Z) = 3Z^2 - Z^{-1}, \qquad Z_0 = i$ $f'(Z) = 6Z + Z^{-2}$ $f'(i) = 6(i) + \frac{1}{(i)^2} = -1 + i6$
2.	$f(Z) = iZ^2 + (\pi - i)Z, \qquad Z_0 = i\pi$ $f(Z)' = 2iZ + (\pi - i)$ $f'(i\pi) = 2i(i\pi) + \pi - i = -2\pi + \pi - i = -\pi - i$

2.6. قابلية الاشتقاق وشرطي كوشي-ريمان Differentiability and Cauchy-Riemann Conditions

إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق فأنها يجب ان تستوفي التالي:

$$f'(Z) = f'(Z)$$

$$U_x + iV_x = -iU_y + V_y$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{U_x} &= \boldsymbol{V_y} \\ \boldsymbol{V_x} &= -\boldsymbol{U_y} \end{aligned}\right\} \quad \text{شرطي كوشي – ريمان}$$

لذلك تكون الدالة $f(Z) = U + iV$ قابلة للاشتقاق عند النقطة Z اذا كانت مشتقاتها الجزئية $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial x}$ و $\frac{\partial V}{\partial y}$ موجودة وتحقق شرطي كوشي ريمان.

مثال 2.6 : حدد النقاط التي تكون فيها الدالة التالية قابلة للاشتقاق.

1.	$f(Z) = Z^2$ $f'(Z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ $\Rightarrow U = x^2 - y^2, \quad V = 2xy$ $U_x = 2x = V_y, \quad U_y = -2y = -V_x$ ∴ الدالة تحقق شرطي كوشي-ريمان، أي ان الدالة قابلة للاشتقاق في جميع النقاط. $f'(Z) = U_x + iV_x = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2Z$
2.	$f(Z) = \|Z\|^2$ $f(Z) = x^2 + y^2$ $\Rightarrow U = x^2 + y^2, \quad V = 0$ $U_x = 2x, \quad V_x = 0$ $U_y = 2y, \quad V_y = 0$ لهذه الدالة فأن شرطي كوشي-ريمان يتحققان فقط عند $x = y = 0$ أي $Z = 0$. $\left.\begin{aligned} U_x &= V_y \\ V_x &= -U_y \end{aligned}\right\} \quad at\ x = 0\ \&\ y = 0\ only$ ∴ الدالة $f(Z) = \|Z\|^2$ قابلة للاشتقاق عند النقطة $Z = 0$ فقط.

الواجب البيتي Home Work

س1/ جد فيما اذا كانت الدالة $f(Z) = \bar{Z}$ قابلة للاشتقاق.

س2/ للدوال التالية جد $f'(Z_0)$.

$$f(Z) = Z^2 + 1, \qquad Z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \qquad f'\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}(1+i)$$

$$fZ) = \frac{Z+1}{Z-1}, \qquad Z_0 = 1+i, \qquad f'(1+i) = 2$$

س3/ جد المشتقة للدوال التالية:

$$f(Z) = Z^6 + 2Z^3 - 3$$

$$f(Z) = (2Z+5)^8(1-2Z+Z^2)^{10}, \qquad f'(Z) = 4(14Z+21)(2Z+5)^7(Z-1)^9$$

2.7. الصيغة القطبية لمعادلات كوشي ريمان The Polar Form of Cauchy-Riemann Equations

عند استخدام الصيغة القطبية فأن

$$Z = re^{i\theta}, \qquad x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta$$

$$\& \ f(Z) = U(r,\theta) + iV(r,\theta)$$

الصيغة القطبية لمعادلتي كوشي ريمان هي

$$\boldsymbol{\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}}$$

يمكن العثور على الشكل القطبي لمعادلات كوشي-ريمان بوساطة طرق عديدة مثل:

الطريقة الاولى	$\frac{df}{dZ} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial Z}$ $\because Z = re^{i\theta} \Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial r} = e^{i\theta} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial Z} = e^{-i\theta}$ $\because f = U + iV \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial r} + i\frac{\partial V}{\partial r}$ $\Rightarrow \frac{df}{dZ} = e^{-i\theta}\left[\frac{\partial U}{\partial r} + i\frac{\partial V}{\partial r}\right] \quad \ldots\ldots 1$ $\frac{df}{dZ} = \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial Z}$ $\because Z = re^{i\theta} \Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial \theta} = ire^{i\theta} \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial Z} = -\frac{i}{r}e^{-i\theta}$ $\because f = U + iV \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta} + i\frac{\partial V}{\partial \theta}$ $\Rightarrow \frac{df}{dZ} = -\frac{i}{r}e^{-i\theta}\left[\frac{\partial U}{\partial \theta} + i\frac{\partial V}{\partial \theta}\right] \quad \ldots\ldots 2$

	بمساواة معادلة (1) مع (2)، فأننا نحصل على $$e^{-i\theta}\left[\frac{\partial U}{\partial r}+i\frac{\partial V}{\partial r}\right]=-\frac{i}{r}e^{-i\theta}\left[\frac{\partial U}{\partial \theta}+i\frac{\partial V}{\partial \theta}\right]$$ $$\frac{\partial U}{\partial r}+i\frac{\partial V}{\partial r}=-\frac{i}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$ باستعمال خواص المساواة، فأننا نحصل على $$\boldsymbol{\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}},\qquad \boldsymbol{\frac{\partial V}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}}$$
الطريقة الثانية	$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta$$ $$\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\theta\Rightarrow\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial U}{\partial r}$$ $$\frac{\partial V}{\partial \theta}=\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial V}{\partial y}r\cos\theta\Rightarrow\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$ $$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}$$ $$\Rightarrow\boldsymbol{\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}}$$ $$\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}=\frac{\partial V}{\partial x}\cos\theta\Rightarrow\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial V}{\partial r}$$ $$\frac{\partial U}{\partial \theta}=\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial U}{\partial y}r\cos\theta\Rightarrow\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$ $$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\partial U}{\partial y}$$ $$\Rightarrow\boldsymbol{\frac{\partial V}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}}$$
الطريقة الثالثة	$$f=U(r,\theta)+iV(r,\theta)$$ $$\frac{df}{dZ}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial Z}=\left[\frac{\partial U}{\partial r}+i\frac{\partial V}{\partial r}\right]\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)}$$ $$\frac{df}{dZ}=(\cos\theta-i\sin\theta)\left[\frac{\partial U}{\partial r}+i\frac{\partial V}{\partial r}\right]$$ $$\frac{df}{dZ}=\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial Z}=\left[\frac{\partial U}{\partial \theta}+i\frac{\partial V}{\partial \theta}\right]\frac{1}{(-\sin\theta+i\cos\theta)}$$

	$$\frac{df}{dZ} = \frac{-i}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)\left[\frac{\partial U}{\partial\theta} + i\frac{\partial V}{\partial\theta}\right]$$ $$\therefore\ \frac{\partial U}{\partial r} + i\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{-i}{r}\left(\frac{\partial U}{\partial\theta} + i\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)$$ $$\Rightarrow\ \boldsymbol{\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}, \qquad \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}}$$
الطريقة الرابعة	$$Z = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$$ $$U = r\cos\theta, \qquad V = r\sin\theta$$ $$\frac{\partial U}{\partial r} = \cos\theta\ \ldots\ldots 1 \qquad \frac{\partial V}{\partial r} = \sin\theta\ \ldots\ldots 2$$ $$\frac{\partial U}{\partial\theta} = -r\sin\theta \qquad \frac{\partial V}{\partial\theta} = r\cos\theta$$ $$-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta} = \sin\theta \ldots\ldots 3 \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \cos\theta \ldots\ldots 4$$ بمساواة معادلة (1) مع (4) ومعادلة (2) مع (3)، فأننا نحصل على $$\boldsymbol{\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}, \qquad \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}}$$

2.8. الدالة التحليلية Analytic Function

تكون الدالة المركبة $W = f(Z)$ تحليلية عند النقطة Z_0 إذا كانت قابلة للاشتقاق عند Z_0 وجوارها ، وإلا فإن النقطة Z_0 تسمى نقطة انفراد.

من أجل أن تكون الدالة $W = f(Z)$ تحليلية في المنطقة D ، يجب أن تستوفي الشروط التالية:

1. الدالة معرفة عند النقطة Z_0.
2. يمكن تشكيل الدالة بصيغة $W = U + iV$.
3. الدالة قابلة للاشتقاق في Z_0 وجوارها.

مثال 2.7 : اثبت ان الدالة الالية تحليلية.

$$f(Z) = Z^2 + i5Z + 3 - i$$

يمكن ملاحظة ان الدلة هي دالة تامة

$$f(Z) = (x + iy)^2 + i5(x + iy) + 3 - i$$

$$f(Z) = x^2 - y^2 + i2yx + i5x - 5y + 3 - i$$

$$f(Z) = (x^2 - y^2 - 5y + 3) + i(2yx + 5x - 1)$$

$$U = x^2 - y^2 - 5y + 3, \qquad V = 2yx + 5x - 1$$

$$U_x = 2x, \qquad V_x = 2y + 5$$

$$U_y = -2y - 5, \qquad V_y = 2x$$

شرطي كوشي ريمان تم استيفائهما

$$f'(Z_0) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = 2x + i(2y + 5) = 2(x + iy) + i5 = 2Z + i5$$

$$f'(Z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} = -i(-2y - 5) + 2x = 2Z + i5$$

مثال 2.8 : تحقق فيما اذا كانت الدالة التالية تحليلية

$$f(Z) = Z - i\bar{Z}$$

$$f(Z) = (x + iy) - i(x - iy) = x + iy - ix - y = (x - y) + i(y - x)$$

$$U = x - y, \qquad V = y - x$$

$$U_x = 1, \qquad V_x = -1$$

$$U_y = -1, \qquad V_y = 1$$

$U_x = V_y$ استوفي

$V_x = -U_y$ لم يستوفي

نظرا لعد استيفاء شرطي كوشي-ريمان، فأن الدالة غير تحليلية.

الواجب البيتي Home work

س1/ تحقق فيما إذا كانت الدوال التالية تحليلية:

$$f(Z) = -xy + \frac{i}{2}(x^2 - y^2)$$

$$f(Z) = (y + 1)^2 + i(x + 1)^2$$

$$f(Z) = x^3 - 3xy^2 + 2y - i(y^3 - 3x^{2y} + 2x - 7)$$

2.9. الدالة التوافقية Harmonic Function

تدعى الدالة المكونة من متغيرين x, y بالدالة التوافقية اذا كانت مشتقاتها الجزئية الأولى والثانية مستمرة وتستوفي المعادلة التالية:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$$

هذه المعادلة الأساسية تسمى معادلة لابلاس وهي صالحة لكل من الدوال الحقيقية والمعقدة.

نظرية: لتكن $f(Z) = f(x, y) = U(x, y) + iV(x, y)$ دالة تحليلية في المجال D، فأن كل من $U(x, y)$ و $V(x, y)$ هما دوال توافقية في D.

البرهان:

حيث ان $f(Z) = U(x, y) + iV(x, y)$ هي دالة تحليلية، لذلك فهي تحقق شرطي كوشي-ريمان:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \ldots \ldots 1$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad \ldots \ldots 2$$

بأخذ المشتقة الجزئية بالنسبة الى x للمعادلة رقم (1) وبالنسبة الى y للمعادلة رقم (2)، ينتج:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) \quad \ldots \ldots 3$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) \quad \ldots \ldots 4$$

المشتقات الجزئية U_{xx}, V_{yx}, V_{xy} و U_{yy} هي مستمرة ($f(Z)$ دالة تحليلية)، لذلك:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

بمساواة معادلة (3) مع (4)، ينتج:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

وبنفس الطريقة وبأخذ المشتقة الجزئية بالنسبة الى y لمعادلة (1) وبالنسبة الى x للمعادلة (2)، ينتج:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

مثال 2.8 : اثبت ان $\Phi(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2y$ هي الجزء الحقيقي من دالة تحليلية، وجد الجزء المركب منها (الخيالي) لهذه الدالة.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \;\rightarrow\; \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -6xy + 2 \;\rightarrow\; \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -6x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$$

$\Phi(x,y)$ هي دالة توافقية واستنادا الى النظرية فهي جزء من دالة تحليلية.

لإيجاد الجزء المركب من الدالة التحليلية، فأننا نستعمل شرطي كوشي ريمان.

$$\because U(x,y) = Re(\Phi(x,y))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad \dots\dots 1$$

$$-\frac{\partial U}{\partial y} = 6xy - 2 = \frac{\partial V}{\partial x}$$

وبتكامل معادلة رقم (1)، ينتج:

$$V = \int (3x^2 - 3y^2)\, dy + c(x) = 3x^2y - y^3 + c(x) \qquad \dots\dots 3$$

وبأخذ المشتقة لمعادلة رقم (3) بالنسبة الى x ومقارنتها مع معادلة رقم (2) لأجل إيجاد $c(x)$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 6xy - c'(x) = -\frac{\partial U}{\partial y} = 6xy - 2$$

$$\Rightarrow \; c'(x) = -2 \;\Rightarrow\; c(x) = \int -2dx = -2x + D$$

$$\therefore V(x,y) = 3x^2y - y^3 - 2x + D$$

$$\therefore f(Z) = (x^3 - 3xy^2 + 2y) + i(3x^2y - y^3 - 2x + D)$$

ان قيمة D يمكن ايجادها اذا علمنا في الأقل نقطتين من نقاط $V(x,y)$

2.10. المرافق التوافقي Harmonic Conjugate

لتكن $U(x,y)$ دالة توافقة في المنطقة D، فيوجد دالة مرافق توافقي $V(x,y)$ معرفة في المنطقة D بحيث ان $f(x,y) = U(x,y) + iV(x,y)$ هي دالة تحليلية.

ملاحظة: المرافق التوافقي لا يمت بصلة الى المرافق المعقد للعدد المركب.

مثال 2.9 : لتكن الدالة $f(Z) = x^2 - y^2 + i2xy$، هل الجزء المركب (الخيالي) هو مرافق للجزء الحقيقي (والعكس بالعكس)؟ إذا أبدلنا الجزئين أحدهما بدل الاخر، هل سيكونان مترافقان توافقيا؟

ليكون الجزء المركب مترافق توافقيا مع الجزء الحقيقي فأن الجزئين يجب ان يكونان توافقيان ويكونان دالة تحليلية.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -2y, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2$$

$\therefore U_{xx} + U_{yy} = 2 - 2 = 0,$ دالة توافقية U

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2y, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 2x, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

$\therefore V_{xx} + V_{yy} = 0 + 0 = 0,$ دالة توافقية V

$$\left.\begin{matrix} U_x = 2x = V_y \\ V_x = -2y = -U_y \end{matrix}\right\}$$ دالة تحليلية تحقق شرطي كوشي – ريمان

$\therefore$ الجزء المركب من الدالة $f(Z)$ هو مرافق توافقي للجزء الحقيقي.

اذا قمنا بأبدال الجزئين، فأن الدالة الجديدة ستكون هي:

$$f(Z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$$

$$U = 2xy, \qquad V = x^2 - y^2$$

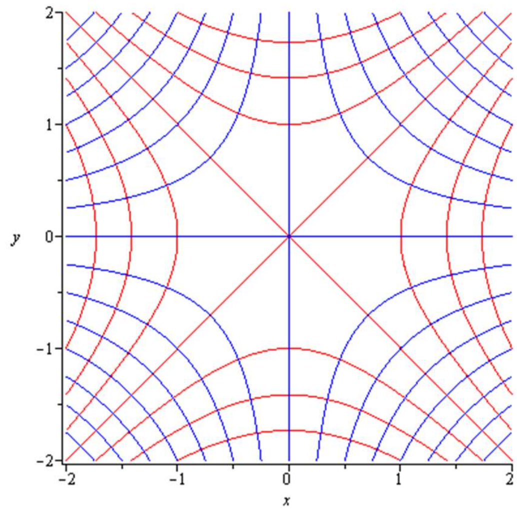
$$\left.\begin{matrix} U_x = 2y, & V_y = -2y \\ U_y = 2x, & V_x = 2x \end{matrix}\right\}$$ كلا الجزئين لا يحققان شرطي كوشي – يمان، الدالة غير تحليلية

بالنسبة للدالة الجديدة، فعلى الرغم من ان كلا الجزئين توافقيان الا ان الجزء المركب لا يترافق توافقيا مع الجز الحقيقي لكونهما لا يشكلان دالة تحليلية.

2.11. تعامد المرافق التوافقي Orthogonality of the Harmonic Conjugate

ان دوال المرافق التوافقي تمتلك خاصية مهمة والتي هي التعامد. فاذا كان لدينا دالة توافقية $U(x, y) = c_1$ ومرافقها التوافقي $V(x, y) = k_1$، فلدينا النظرية المهمة التالية:

نظرية: لتكن $f(Z) = U(x, y) + iV(x, y)$ دالة تحليلية و $c_1, c_2, c_3, \dots$ و $k_1, k_2, k_3, \dots$ ثوابت حقيقية، فان منحنيات $U = c_1, c_2, c_3, \dots c_n$ هي متعامدة على منحنيات $V = k_1, k_2, k_3, \dots k_n$.



شكل الدالة $f(Z) = Z^2$

2.12. معادلة لابلاس بالإحداثيات القطبية Laplace Equation in Polar Coordinate

الصيغة القطبية لمعادلة لابلاس هي:

$$\boldsymbol{r^2 U_{rr} + r U_r + U_{\theta\theta} = 0}$$

$$\boldsymbol{r^2 V_{rr} + r V_r + V_{\theta\theta} = 0}$$

البرهان: معادلتي كوشي-ريمان بالإحداثيات القطبية هي:

$$r U_r = V_\theta \quad \ldots\ldots 1$$

$$r^2 V_r = U_\theta \quad \ldots\ldots 2$$

بأجراء الاشتقاق الجزئي بالنسبة لـ r لمعادلة رقم (1) وبالنسبة لـθ لمعادلة رقم (2)، ينتج:

$$r U_{rr} + U_r = V_{\theta r} \quad \ldots\ldots 3$$

$$-r V_{r\theta} = U_{\theta\theta}$$

$$\Rightarrow \ V_{r\theta} = -\frac{1}{r} U_{\theta\theta} \quad \ldots\ldots 4$$

$\because$ المشتقات الجزئية مستمرة، لذلك $V_{\theta r} = V_{r\theta}$. بمساواة معادلة (3) مع (4): نحصل على:

$$r U_{rr} + U_r = -\frac{1}{r} U_{\theta\theta} \quad] \times r$$

$$\boldsymbol{r^2 U_{rr} + r U_r + U_{\theta\theta} = 0}$$

بنفس الطريقة، بأخذ المشتقات الجزئية بالنسبة لـr لمعادلة (2) وبالنسبة لـ θ لمعادلة رقم (2)، نحصل على:

$$\boldsymbol{r^2 V_{rr} + r V_r + V_{\theta\theta} = 0}$$

الواجب البيتي Home Work

س1/ اثبت ان الدالة U توافقية وجد المرافق التوافقي لها.

1. $U = 2x(1-y)$ $\qquad V = 2y - y^2 + x^2 + D$
2. $U = xe^x \cos y - ye^x \sin y$ $\qquad V = xe^x \sin y - ye^x \cos y + D$
3. $U = \sinh x \sin y$ $\qquad V = -\cosh x\, cosy + D$

الفصل الثالث

Elementary Functions الدوال الأولية

في هذا الفصل سيتم دراسة أربع من الدوال الأساسية في الفضاء المركب، والتي هي:

- الدالة الاسية
- الدالة اللوغاريتمية
- الدوال المثلثية
- الدوال الزائدية

3.1. الدالة الاسية Exponential Function

ليكن $Z = x + iy$، فأن الدالة الاسية يمكن تعريفها كالتالي:

$$\boldsymbol{e^Z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)}$$

حيث ان y تقاس بالزوايا النصف قطرية (نقية) (rad)

$$\pi = 3.14\ (rad) = 180(\text{deg})$$

احياناً يتم كتابة الدالة الاسية بالصيغة $\exp(Z)$ بدلاً عن e^Z.

3.1.1. بعض خصائص الدالة الاسية Some properties of the Exponential Function

1. $\frac{d}{dZ}(e^Z) = e^Z$
2. اذا كانت الدالة $w = f(Z)$ تحليلية في المجال D فأن e^w تحليلية أيضا في D
3. $|e^Z| = |e^{x+iy}| = |e^x e^{iy}| = e^x|(\cos y + i \sin y)| = e^x\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x$

   $|e^Z| = e^x$

   $\arg(e^z) = y + 2k\pi,\ (rad)$

   Argument of e^Z is differ from the argument of Z. i.e. $\arg(Z) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$, (deg)
4. $e^Z \neq 0$

   If $Z = x + i0 \Rightarrow \ w = e^x$

If $Z = 0 + iy \Rightarrow w = e^{iy} = \cos y + i \sin y$

If $Z = x + iy \Rightarrow w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

If $Z = 0 + i0 \Rightarrow w = e^0 = 1$

5. $\exp(Z_1) \times \exp(Z_2) = \exp(Z_1 + Z_2)$

$\exp(Z_1) / \exp(Z_2) = \exp(Z_1 - Z_2)$

$1/ \exp(Z) = \exp(-Z)$

6. $\exp(Z)^m = \exp(mZ), \quad m \in Z$

$\mathrm{Exp}(Z)^{\frac{1}{n}} = \exp\frac{1}{n}(Z + i2k\pi), \quad n, k \in Z$

$\exp(Z)^{\frac{m}{n}} = \exp\frac{m}{n}(Z + i2k\pi), \quad n, m, k \in Z$

7. $\exp(Z + i2k\pi) = \exp(Z) \times \exp(i2k\pi)$

and $\exp(i2k\pi) = e^0(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 1$

It follows that $\exp(Z + i2k\pi) = \exp(Z)$

8. $\exp(\bar{Z}) = \overline{(\exp(Z))}$

9. $e^{i\pi} + 1 = 0$

مثال 3.1 : اكتب التعابير التالية بصيغة $a + ib$.

1.	$e^{3+i4} = e^3\left(\cos\left(4 \times \frac{180}{3.14}\right) + i \sin\left(4 \times \frac{180}{3.14}\right)\right)$ $= 20(\cos 229.2 + i \sin 229.2) = 20(-0.653 - i0.757)$ $= -13.06 - i15.14$
2.	$e^i = e^0\left(\cos\left(1 \times \frac{180}{3.14}\right) + i \sin\left(1 \times \frac{180}{3.14}\right)\right) = \cos 57.296 + i \sin 57.296$ $= 0.540 + i0.842$
3.	$e^{e^i} = e^{0.540+i0.842} = e^{0.54}\left(\cos\left(0.842 \times \frac{180}{3.14}\right) + i \sin\left(0.842 \times \frac{180}{3.14}\right)\right)$ $= 1.716(\cos 48.243 + i \sin 48.243) = 1.716(0.666 + i0.746)$ $= 1.143 + i1.280$
4.	$e^{Z^2} = e^{x^2-y^2+i2xy} = e^{x^2-y^2}e^{i2xy} = e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + i \sin 2xy)$ $= e^{x^2-y^2}\cos 2xy + ie^{x^2-y^2}\sin 2xy$
5.	$e^{i^{\frac{1}{2}}}, \quad let\ Z = i^{\frac{1}{2}}$ $r = 1, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad n = 2, \quad k = 0,1$

$$Z = (1)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) + i\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right]$$

$$for\ \ k=0, \qquad \Rightarrow \quad Z = 0.7071 + i0.7071$$

$$for\ \ k=1, \qquad \Rightarrow \quad Z = -0.7071 - i0.7071$$

$$e^{0.7071+\quad .7071} = e^{0.7071}e^{i0.7071}$$

$$= e^{0.7071}\left(\cos\left(0.7071\times\frac{180}{3.14}\right) + i\sin\left(0.7071\times\frac{180}{3.14}\right)\right)$$

$$= 1.542 + 1.318$$

$$e^{-0.7071-i0.7071} = e^{-0.7071}e^{-i0.7071}$$

$$= e^{-0.7071}\left(\cos\left(-0.7071\times\frac{180}{3.14}\right) + i\sin\left(-0.7071\times\frac{180}{3.14}\right)\right)$$

$$= 0.375 - i0.320$$

الواجب البيتي Home Work

س1/ : اكتب التعابير التالية بصيغة $a+ib$.

1.	e^{3-i4}	$-13.129 + i15.201$
2.	$e^{\frac{1}{1-i}}$	$1.447 + i0.790$
3.	$e^{-e^{-i}}$	$0.389 + i0.434$
4.	$e^{\frac{2+i\pi}{4}}$	$\sqrt{e^{i}}$
5.	$e^{e^{Z}}$	
6.	$e^{(1+i)^{\frac{1}{2}}}$	$2.708 + i1.291$ $0.3 - i0.144$

3.2. الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function

يجب أن يكون للدالة العكسية للدالة الأسية خاصية قيم من واحد إلى متعدد. للعثور على هذه الدالة، نبدأ من تعريف الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية في القيم الحقيقية:

$$w = logZ \quad \Leftrightarrow \quad Z = e^{w}$$

$$\because w = U + iV$$

$$Z = e^{w}$$

$$r(\cos(\theta+2k\pi) + i\sin(\theta+2k\pi)) = e^{U}(\cos V + i\sin V)$$

$$\Rightarrow r = e^{U} \ \Rightarrow \ \ U = \log r$$

$$\&\ \ V = \theta + 2k\pi = \arg(Z)$$

$$\boldsymbol{w = \log Z = U + iV = \log r + i\,(\theta + 2k\pi)\,, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$$

- من هذا التعريف، نجد أن هناك قيم لانهائية لـ $\log Z$ التي تختلف بمقدار $2k\pi i$ ، كل قيمة لـ k تعطي فرع من السلوكيات $\log Z$.
- بالنسبة إلى $k = 0$ ، قيمة $\log Z$ عندها تُسمى القيمة الأساسية.
- نحن نعني بـ $\log Z$ بالدالة $\ln Z$، بينما $\log_{10} Z$ يعني اللوغاريتم المتعارف عليه للأساس 10.

3.2.1. بعض خصائص دالة اللوغاريتمية Some Properties of the Logarithmic Function

1. $\frac{d}{dz}(\log Z) = \frac{1}{Z}$
2. $\log Z_1 + \log Z_2 = \log(Z_1 Z_2) = \log(r_1 r_2) + i[\theta_1 + \theta_2 + 2k\pi]$
3. $\log Z_1 - \log Z_2 = \log\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + i[\theta_1 - \theta_2 + 2k\pi]$
4. $\log Z^k = k \log Z$
5. $e^{\log Z} = Z$
6. $\log e^Z = Z + 2k\pi i$

3.3. الأسس (القوى) المركبة Complex Exponents

Let $w = \log Z$ ……1

And $Z = e^w$ ……2

Substituting eq. 1 in 2 we get:

$$Z = e^{\log Z}$$

$$(Z)^w = \left(e^{\log Z}\right)^w$$

$$\boldsymbol{Z^w = e^{w \log Z}}$$

مثال 3.2 : اذا علمت ان $Z^w = e^{w \log}$ جد قيمة ما يلي:

1.	i^i $Let\ Z = i\ \&\ w = i$ $i^i = e^{i \log i}$

	$\log i = \log 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$ $i^i = e^{i\left(i\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0.208$
2.	$(1+i)^i$ $\Rightarrow \quad Z = (1+i), \qquad w = i$ $\log Z = \log(1+i)$ $r = \sqrt{2}, \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$ $\log(1+i) = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} = 0.347 + i0.785$ $(1+i)^i = e^{i\log(1+i)} = e^{i(0.347+i0.785)} = e^{-0.785+i0.347}$ $(1+i)^i = e^{-0.785}.e^{i0.347} = 0.456\left[\cos 0.347 \times \frac{180}{3.14} + i\sin 0.347 \times \frac{180}{3.14}\right]$ $(1+i)^i = 0.456[0.94 + i0.34]$ $(1+i)^i = 0.429 + i0.155$

الواجب البيتي Home Work

س1/ اذا علمت ان $Z^w = e^{w\log Z}$ جد قيمة ما يلي:

1.	$\log(-i4)$	$\log 4 + i\frac{3\pi}{2}$
2.	$\log(2-i2)$	$\log 2\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4}$
3.	$\log e^{i^{\frac{1}{2}}}$	$1.542 + i1.318$
		$0.375 - i0.320$
4.	$\log(\sqrt{3}-i)$	$0.693 - i0.524$
5.	$(1+i)^{1-i}$	
6.	$e^{\log i}$	i
7.	$\log e^{\log(1+i\sqrt{3})}$	$0.693 + i1.047$

3.4. الدوال المثلثية Trigonometric Functions

في الفضاء الحقيقي يمكن تعريف الجيب والجيب التمام باستخدام متطابقة أويلر على النحو التالي:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad \ldots\ldots 1$$

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x \quad \ldots\ldots 2$$

بجمع معادلة رقم (1) مع (2)، ينتج:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

بطرح معادلة رقم (1) مع (2)، ينتج:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

ان هذه العلاقات هي صحيحة أيضا في الفضاء المركب، أي:

$$\cos Z = \frac{e^{iZ} + e^{-iZ}}{2}, \qquad \sin Z = \frac{e^{iZ} - e^{-iZ}}{2i}$$

3.4.1. بعض خصائص الدوال المثلثية Some Properties of the Trigonometric Functions

1. $\sin(-Z) = -\sin Z$ دالة فردية
2. $\cos(-Z) = \cos Z$ دالة زوجية
3. $\sin^2 Z + \cos^2 Z = 1$
4. $\sin(Z_1 \pm Z_2) = \sin Z_1 \cos Z_2 \pm \cos Z_1 \sin Z_2$ نفس الاشارة
5. $\cos(Z_1 \pm Z_2) = \cos Z_1 \cos Z_2 \mp \sin Z_1 \sin Z_2$ عكس الاشارة
6. $\frac{d}{dZ}(\sin Z) = \cos Z$
7. $\frac{d}{dz}(\cos Z) = -\sin Z$
8. $\cos(2Z) = \cos^2 Z - \sin^2 Z$
9. $\sin(2Z) = 2\sin Z \cos Z$
10. $\frac{d}{dZ}(\tan Z) = \sec^2 Z, \qquad \frac{d}{dZ}(\cot Z) = -\csc^2 Z$
11. $\frac{d}{dZ}(\sec Z) = \sec Z \tan Z, \qquad \frac{d}{dZ}(\csc Z) = -\csc Z \cot Z$
12. $\overline{\cos Z} = \cos \bar{Z}, \qquad \overline{\sin Z} = \sin \bar{Z}$
13. $\sin Z = 0, \quad if\ Z = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
14. $\cos Z = 0, \quad if\ Z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
15. $\sin(Z + 2\pi) = \sin Z, \quad \cos(Z + 2\pi) = \cos Z$

16. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - Z\right) = \cos Z$

3.4.2. الدوال المثلثية العكسية Inverse Trigonometric Functions

لإيجاد تعريف للدوال المثلثية العكسية فأننا نستعمل متطابقة اويلر:

$$Let\ Z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}, \qquad \cos^{-1} Z = w$$

$$\Rightarrow e^{2i} \quad - 2Ze^{iw} + 1 = 0$$

والتي حلها هو:

$$e^{iw} = \frac{-(-2Z) \pm \sqrt{(2Z)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2} = \frac{2Z \pm \sqrt{4Z^2 - 4}}{2} = \frac{2Z \pm 2\sqrt{Z^2 - 1}}{2}$$

$$e^{iw} = Z \pm \sqrt{Z^2 - 1}$$

وباختيار الجزء الموجب من الحل لكونه الفرع الذي يجعل قيمة $\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$، ينتج:

$$\Rightarrow e^{iw} = Z + \sqrt{Z^2 - 1}$$

$$\log e^{iw} = \log\left(Z + \sqrt{Z^2 - 1}\right)$$

$$\Rightarrow w = \frac{1}{i} \log\left(Z + \sqrt{Z^2 - 1}\right)$$

$$\boldsymbol{\cos^{-1} Z = \frac{1}{i} \log\left(Z + \sqrt{Z^2 - 1}\right)},$$ دالة متعددة القيم

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد:

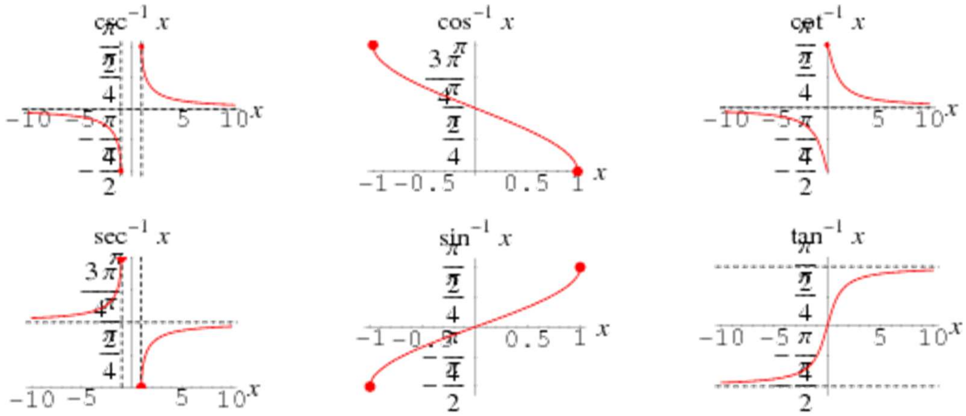
$$\boldsymbol{\sin^{-1} Z = \frac{1}{i} \log\left(iZ + \sqrt{1 - Z^2}\right)}$$

$$\boldsymbol{\tan^{-1} Z = \frac{i}{2} \log\left(\frac{i + Z}{i - Z}\right)}$$

$$\boldsymbol{\cot^{-1} Z = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{Z + i}{Z - i}\right)}$$

$$\boldsymbol{\sec^{-1} Z = \frac{1}{i} \log\left(\frac{1 + \sqrt{1 - Z^2}}{Z}\right)}$$

$$\boldsymbol{\csc^{-1} Z = \frac{1}{i} \log\left(\frac{i + \sqrt{Z^2 - 1}}{Z}\right)}$$



ومشتقاتها هي:

$$\frac{d}{dz}(\cos^{-1} Z) = \frac{-1}{\sqrt{1 - Z^2}}$$

$$\frac{d}{dz}(\sin^{-1} Z) = \frac{1}{\sqrt{1 - Z^2}}$$

$$\frac{d}{dz}(\tan^{-1} Z) = \frac{1}{1 + Z^2}\ , \qquad Z \neq \pm i$$

$$\frac{d}{dz}(\sec^{-1} Z) = \frac{1}{Z\sqrt{Z^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dz}(\csc^{-1} Z) = \frac{-1}{Z\sqrt{Z^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dz}(\cot^{-1} Z) = \frac{-1}{1 + Z^2}\ , \qquad Z \neq \pm i$$

3.5. الدوال الزائدية Hyperbolic Function

يمكن تعريف الدوال الزائدية بوساطة الدوال الاسية وبنفس الأسلوب المتبع في الفضاء الحقيقي:

$$\cosh Z = \frac{e^Z + e^{-Z}}{2}, \qquad \sinh Z = \frac{e^Z - e^{-Z}}{2}$$

3.5.1. بعض خصائص الدوال الزائدية Some Properties of the Hyperbolic Functions

1. $\sinh(-Z) = -\sinh Z$ دالة فردية
2. $\cosh(-Z) = \cosh Z$ دالة زوجية
3. $\cosh^2 Z - \sinh^2 Z = 1$
4. $\sinh(Z_1 \pm Z_2) = \sinh Z_1 \cosh Z_2 \pm \cosh Z_1 \sinh Z_2$
5. $\cosh(Z_1 \pm Z_2) = \cosh Z_1 \cos Z_2 \pm \sinh Z_1 \sin Z_2$
6. $\frac{d}{dZ}(\sinh Z) = \cosh Z,$ $\frac{d}{dz}(\cosh Z) = \sinh Z$
7. 10. $\frac{d}{dZ}(\tanh Z) = \operatorname{sech}^2 Z,$ $\frac{d}{dz}(\coth Z) = -\operatorname{csch}^2 Z$

3.5.2. العلاقة بين الدوال المثلثية والزائدية The Relationship Between Trigonometric and Hyperbolic Functions

حيث ان:

$$\cos Z = \frac{e^{iZ} + e^{-iZ}}{2}, \quad \sin Z = \frac{e^{iZ} - e^{-iZ}}{2i}$$

بتعويض iZ بدل Z، فأننا نحصل على

$$\cos iZ = \frac{e^{i.iZ} + e^{-i.iZ}}{2}, \quad \sin iZ = \frac{e^{i.iZ} - e^{-i.iZ}}{2i}$$

$$\cos iZ = \frac{e^{-Z} + e^{Z}}{2}, \quad \sin iZ = \frac{e^{-Z} - e^{Z}}{2i}$$

$$\boldsymbol{\cos iZ = \cosh Z, \quad \sin iZ = i \sinh Z}$$

وبنفس الطريقة فأننا يمكننا اثبات ان:

$$\boldsymbol{\cosh iZ = \cos Z, \quad \sinh iZ = i \sin Z}$$

ويمكننا استعمال العلاقات أعلاه لإيجاد ان:

$$\boldsymbol{\sin Z = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y}$$

$$\boldsymbol{\cos Z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y}$$

$$\boldsymbol{\sinh Z = \sinh(x+iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y}$$

$$\boldsymbol{\cosh Z = \cosh(x+iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y}$$

also

$$|\sinh Z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

$$|\cosh Z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$$

$$|\sin Z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

$$|\cos Z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

مثال 3.3 : اثبت صحة العلاقة التالية

$$\mathbf{\sin Z = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y}$$

$$As: \cos iy = \cosh(y), \qquad \sin iy = i \sinh y$$

$$\therefore \sin Z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

مثال 3.4 : استعمال العلاقة $\cos Z = \frac{e^{iZ}+e^{-iZ}}{2}$ اثبت ان

$$\mathbf{\cos Z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y}$$

$$\cos Z = \cos(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{i(-x-iy)}}{2} = \frac{1}{2}\left[e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^{y}(\cos x - i \sin x)\right]$$

$$= \cos x \left[\frac{e^{-Z}+e^{Z}}{2}\right] - i \sin x \left[\frac{e^{-Z}-e^{Z}}{2}\right] = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

مثال 3.4 : اثبت صحة العلاقة التالية $|\sin Z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$

$$|\sin Z|^2 = |\sin(x+iy)|^2 = |\sin x \cos iy + i \cos x \sin iy|^2$$

$$since \quad \cos iy = \cosh y, \sin iy = i \sinh y$$

$$|\sin Z|^2 = |\sin x \cosh y + \cos x \sinh y|^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y$$
$$= \sin^2 x \cosh^2 y + (1 - \sin^2 x) \sinh^2 y$$
$$= \sin^2 x \cosh^2 y + \sinh^2 y - \sin^2 x \sinh^2 y$$
$$= \sin^2 x (\cosh^2 y - \sinh^2 y) + \sinh^2 y = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

3.5.2. الدوال الزائدية العكسية Inverse Hyperbolic Function

$$Let\ Z = \sinh w \quad \Rightarrow \quad w = \sinh^{-1} Z$$

$$\because \sin(iw) = i \sinh w \quad \Rightarrow \quad \sinh w = \frac{1}{i} \sin(iw) = Z$$

$$\Rightarrow \sin(iw) = iZ$$

$$iw = \sin^{-1} iZ$$

$$iw = \frac{1}{i} \log\left(i(iZ) + \sqrt{1-(iZ)^2}\right)$$

$$w = -\log\left(-Z + \sqrt{1+Z^2}\right)$$

$$w = \log\left(\frac{1}{-Z + \sqrt{1+Z^2}}\right)$$

وباستعمال قاعدة القسمة، ينتج:

$$w = \log\left(Z + \sqrt{1+Z^2}\right)$$

$$\boldsymbol{\sinh^{-1} Z = \log\left(Z + \sqrt{1+Z^2}\right)}$$

وبنفس الطريقة يمكننا ايجاد

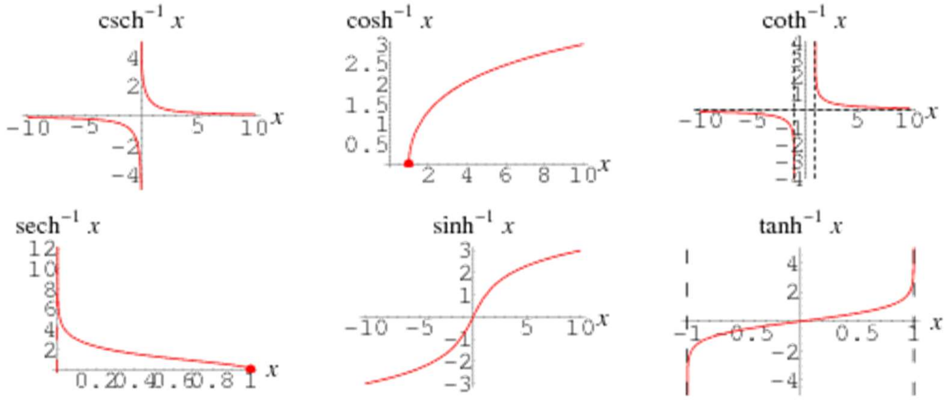
$$\boldsymbol{\cosh^{-1} Z = \log\left(Z + \sqrt{Z^2-1}\right)}$$

$$\boldsymbol{\tanh^{-1} Z = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right), \qquad Z \neq \pm 1}$$

$$\boldsymbol{\coth^{-1} Z = \frac{1}{2} \log\left(\frac{Z+1}{Z-1}\right) = tanh\left(\frac{1}{z}\right), \qquad Z \neq \pm 1}$$

$$\boldsymbol{\operatorname{sech}^{-1} Z = \log\left(\frac{1+\sqrt{1-Z^2}}{Z}\right) = cosh\ \left(\frac{1}{Z}\right), \qquad Z \neq 0}$$

$$\boldsymbol{\operatorname{csch}^{-1} Z = \log\left(\frac{1+\sqrt{1+Z^2}}{Z}\right) = sinh\ \left(\frac{1}{Z}\right), \qquad Z \neq 0}$$



ومشتقاتها هي:

$$\frac{d}{dz}(\sinh^{-1} Z) = \frac{1}{\sqrt{1+Z^2}}$$

$$\frac{d}{dz}(\cosh^{-1} Z) = \frac{1}{\sqrt{Z^2-1}}$$

$$\frac{d}{dz}(\tanh^{-1} Z) = \frac{1}{1-Z^2}\,, \quad Z \neq \pm i$$

$$\frac{d}{dz}(\coth^{-1} Z) = \frac{1}{1-Z^2}\,, \quad Z \neq \pm i$$

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{sech}^{-1} Z) = \frac{-1}{Z\sqrt{1-Z^2}}$$

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{csch}^{-1} Z) = \frac{-1}{Z\sqrt{Z^2+1}}$$

مثال 3.5 : جد قيمة ما يلي

1.	$\mathbf{\sin(\boldsymbol{i}1.8185)}$ $\sin(0+1.8185i) = \sin 0 \cos i1.8185 + \sin i1.8185 \cos 0$ $= 0 \times \cos i1.8185 + i \sinh 1.8185 \times 1 = i3$
2.	$\mathbf{\sin^{-1} \boldsymbol{i}3}$ Since $\sin^{-1} Z = \frac{1}{i}\log\left[iZ + \sqrt{1-Z^2}\right]$ $\sin^{-1} i3 = \frac{1}{i}\log\left[i(i3) + \sqrt{1-(i3)^2}\right] = \frac{1}{i}\log\left[-3+\sqrt{10}\right]$ $= \frac{1}{i}\log[-3+3.1623] = \frac{1}{i}\log[0.1623] = \frac{1}{i}(-1.8185)$ $= i1.8185$

3.	**cosh 2** $$cosh2 = \frac{e^2 + e^{-2}}{2} = \frac{7.389 + 0.135}{2} = \frac{7.524}{2} = 3.762$$
4.	$\mathbf{cosh^{-1} 3.762}$ Since $\cosh^{-1} Z = \log\left(Z + \sqrt{Z^2 - 1}\right)$ $\cosh^{-1} 3.762$ $= \log\left(3.762 + \sqrt{(3.762)^2 - 1}\right)$ $= \log\left(3.762 + \sqrt{13.153}\right) = \log(3.762 + 3.627) = \log(7.389)$ $= 1.9999 \approx 2$
5.	$\mathbf{sec(1 - i)}$ $$\sec(1 - i) = \frac{1}{\cos(1 - i)} = \frac{1}{\cos 1 \cosh 1 + i \sin 1 \sinh 1} = \frac{1}{0.8337 + i0.9889}$$ $$= \frac{0.8337 - i0.9889}{0.8337^2 + 0.9889^2} = \frac{0.8337 - i0.9889}{1.6730} = 0.4983 - i0.5911$$
6.	$\mathbf{tan(2 - i)}$ $$\tan(2 - i) = \frac{\sin(2 - i)}{\cos(2 - i)} = \frac{\sin 2 \cosh 1 - i \cos 2 \sinh 1}{\cos 2 \cosh 1 + i \sin 2 \sinh 1}$$ $$= \frac{\sin 2 \frac{e^1 + e^{-1}}{2} - i \cos 2 \frac{e^1 - e^{-1}}{2}}{\cos 2 \frac{e^1 + e^{-1}}{2} + i \sin 2 \frac{e^1 - e^{-1}}{2}}$$ $$= \frac{0.909 \times 1.543 - i1.175 \times (-0.416)}{(-0.416) \times 1.543 + i1.175 \times 0.909} = \frac{1.403 + i0.488}{-0.642 + i1.068}$$ $$= \frac{-0.901 + 0.521 - i1.498 - i0.313}{0.6426^2 + 1.068^2} = \frac{-0.38 - i1.811}{1.553}$$ $= -0.245 - i1.166$
7.	$\mathbf{sinh^{-1} \log i}$ $$\log(0 + i) = \log 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}, \quad r = 1, \quad \theta = \cos^{-1}\frac{x}{r} = \cos^{-1}\frac{0}{1} = \frac{\pi}{2}$$ حيث ان $$\sinh^{-1} Z = \log\left[Z + \sqrt{1 + Z^2}\right]$$

	$\sinh^{-1} i\frac{\pi}{2} = \log\left[i\frac{\pi}{2} + \sqrt{1 + \left(i\frac{\pi}{2}\right)^2}\right] = \log\left[i\frac{\pi}{2} + \sqrt{-0.571}\right]$ $= \log[i1.571 + i0.756] = \log[2.327i] = \log 2.327 + i\frac{\pi}{2}$ $= 0.845 + i\frac{\pi}{2}$
8.	$\boldsymbol{\cos(e^{1+i})}$ $\cos(e^{1+i}) = \cos(e^1 e^i) = \cos\left(e\left(\cos 1 \times \frac{180}{3.14} + i\sin 1 \times \frac{180}{3.14}\right)\right)$ $= \cos(1.4687 + i2.2874)$ $= \cos 1.4687 \cosh 2.2874 - i \sin 1.4687 \sinh 2.2874$ $= 0.101 \times 4.9754 - i4.8739 \times 0.9948 = 0.5070 - i4.8486$

الواجب البيتي Home Work

س1/ باستعمال العلاقات الاسية، جد ما يلي:

$$\cosh i6 \ \ \& \ \cosh^{-1}(Results)$$

$$\sinh 4 \ \ \& \ \sinh^{-1}(Results)$$

$$\tanh 1 \ \ \& \ \tanh^{-1}(Results)$$

$$\tan\left[i\log\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)\right] \ \& \ \tan^{-1}(Results)$$

س2/ جد قيمة ما يلي:

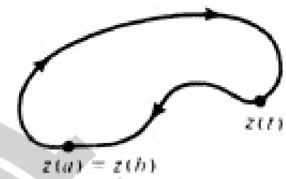
1. $\sin\left(i^{\frac{1}{3}}\right)$ $\quad 0.8590 + i0.3376$
2. $e^{\cos(1+i)}$ $\quad -2.0976 + i4.8660$
3. $\tan[1 + i\sqrt{3}]^{\frac{1}{2}}$ $\quad 0.9595 + i0.1649$

الفصل الرابع

التكامل المركب Complex Integral

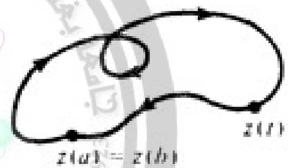
في هذا الفصل سنتعامل مع التعاريف الأساسية التالية:

1. المسار (المنحني) المفتوح: وهو المسار الذي لا تلتقي نهايتي طرفيه.
2. المسار (المنحني) المغلق: وهو المسار الذي تلتقي نهايتي طرفيه.
3. المسار (المنحني) البسيط: وهو المسار الذي لا يقاطع نفسه.
4. المسار (المنحني) المتعدد: وهو المسار الذي يقاطع نفسه.



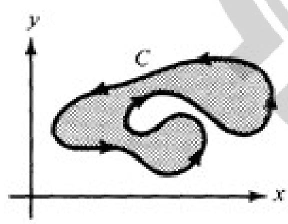
مسار بسيط مغلق

مسار بسيط مفتوح

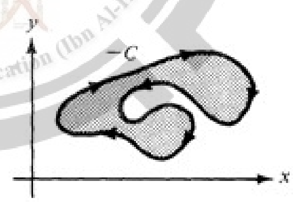


مسار متعدد مغلق

مسار متعدد مفتوح



الاتجاه الموجب للمسار (عكس عقارب اساعة)

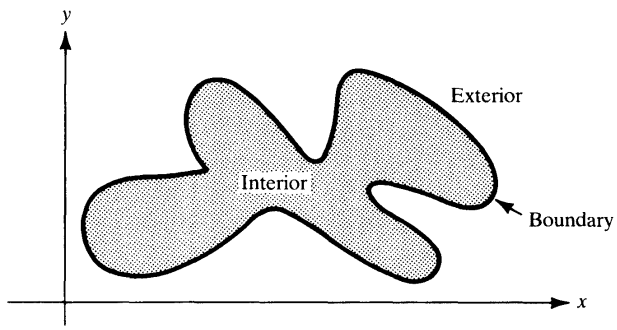


الاتجاه السالب للمسار (مع عقارب الساعة)

4.1. نظرية منحني جوردن Jordan Curve Theorem

ليكن C مسار مغلق بسيط في المستوي Z، فأن المسار C يقسم المستوي Z الى ثلاث مناطق وهي:

1. النقاط التي تمثل المنحني C نفسها (النقاط الحدودية).
2. النقاط التي تقع داخل المنحني (النقاط الداخلية).
3. النقاد التي تقع خارج المنحني (النقاط الخارجية).



4.2. المعادلات البارامترية Parametric Equations

اذا كان Z دالة من متغيرين x & y والتي هي بدورها متغيرين لمتغير اخر ولكن t، أي:

$$Z(x,y) = x(t) + iy(t)$$

ان المتغير t هو متغير بارامتري لكل من x & y و $x(t)$& $y(t)$ يدعيان بالمعادلات البارامترية.

4.3. التكامل المركب Complex Integral

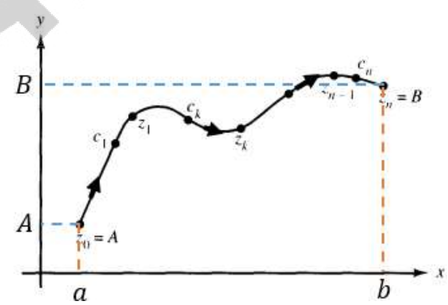
ان تكامل الدالة $f(Z)$ على المسار C (من النقطة a الى النقطة b) هو $F(Z)$، وكالتالي:

$$\int_a^b f(Z)dZ = F(b) - F(a)$$

ان تكامل الدالة ذات المتغيرين $f(x,y)$ هو في العادة دالة بارامترية، يحدد فيها حدود التكامل اعتمادا على مسار التكامل:

$$\int_a^b f(x,y)dx$$

$$\int_A^B f(x,y)dy$$



4.3.1. بعض خصائص التكامل المركب Some Properties of the Complex integral

1. $\int_c f(Z)dZ = \int_c Udx - \int_c Vdy + i\int_c Udy + i\int_c Vdx$

2. $\int_a^b f(Z)dZ = -\int_b^a f(Z)dZ$

3. $\int_a^b kf(Z)dZ = k\int_a^b f(Z)dZ$, where k is constant for Z

4. $\int_c [f(Z) + g(Z)]dZ = \int_c f(Z)dZ + \int_c g(Z)dZ$

5. $\int_c f(t)dt = \int_c U(t)dt + i\int_c V(t)dt$

6. $\left|\int_c f(Z)dZ\right| \le \int_c |f(Z)|dZ$

7. $Re\left(\int_c f(t)dt\right) = \int_c U(t)dt = \int_c Re\big(f(t)\big)dt$

مثال 4.1 : للتكامل I جد قيمته ضمن الحدود $0 \le Z \le \pi + 2i$

$$I = \int_0^{\pi+2i} \cos\left(\frac{Z}{2}\right) dZ$$

$$\int_0^{\pi+2i} \frac{2}{2}\cos\left(\frac{Z}{2}\right) dZ$$

$$I = 2\sin\left(\frac{Z}{2}\right)\Big|_0^{\pi+2i}$$

$$I = 2\left[\sin\left(\frac{\pi+2i}{2}\right) - \sin\left(\frac{0}{2}\right)\right]$$

$$I = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\right)$$

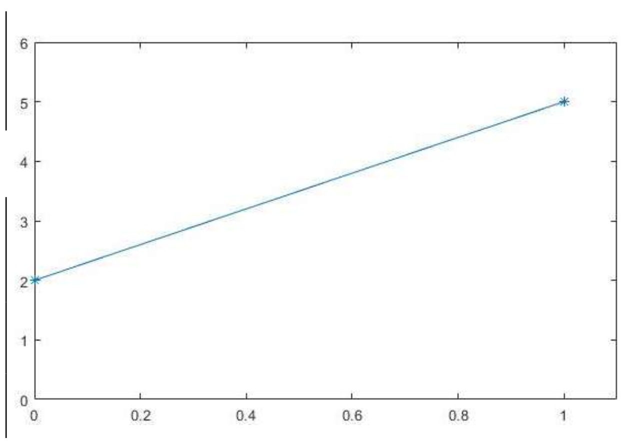
$$I = 2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cosh 1 + i\sinh 1\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$I = 2[1 \times 1.543 + i1.175 \times 0]$$

$$I = 3.086 \approx 3$$

مثال 4.2 : للمنحني الموضح فيما ادناه، جد قيمة التكامل I ضمن الفترة $2i \le Z \le 1 + 5i$.

$$I = \int_{2i}^{1+5i} Z^2 dZ$$



من الرسم:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(5-2)}{1-0} = 3, \qquad b = 2$$

$\because y = mx + b,$ معادلة خط مستقيم

$$\Rightarrow \quad y = 3x + 2$$

حيث $Z = (x + iy)$

بالتعويض بدل عن y بـ x في Z، ينتج:

$$Z = (1+3i)x + 2i, \qquad dZ = (1+3i)dx$$

بالتعويض عن قيمة Z و dZ في معادلة التكامل I، ينتج:

$$I = (1+3i)\int_0^1 \big((1+3i)x + 2i\big)^2 dx$$

$$I = (1+3i)\int_0^1 \big((-8+6i)x^2 + 4i(1+3i)x - 4\big)dx$$

$$I = (1+3i)\left[\frac{-8+6i}{3}x^3\Big|_0^1 + 2i(1+3i)x^2|_0^1 - 4x|_0^1\right]$$

$$I = (1+3i)\left[\frac{-8+6i}{3} + \frac{6i(1+3i)}{3} - \frac{12}{3}\right]$$

$$I = (1+3i)\frac{(-38+12i)}{3}$$

$$I = \frac{1}{3}(-74-102i)$$

مثال 4.3 : جد قيمة التكامل I على المسار $Z = t + it^2,\ \ 0 \le t \le 1$

$$I = \int_c Z^2 dZ$$

$$I = \int_0^1 (t+it^2)^2\, d(t+it^2)$$

$$I = \int_0^1 (t^2 + i2t^3 - t^4)(1+2it)dt$$

$$I = \int_0^1 (t^2 + i2t^3 - t^4 + i2t^3 - 4t^4 - i2t^5)dt$$

$$I = \int_0^1 (t^2 - 5t^4)dt + i\int_0^1 (4t^3 - 2t^5)dt$$

$$I = \left[\frac{t^3}{3} - t^5\right]_0^1 + i\left[t^4 - \frac{1}{3}t^6\right]_0^1$$

$$I = \left[\frac{1}{3} - 1\right] + i\left[1 - \frac{1}{3}\right] = -\frac{2}{3} + i\frac{2}{3}$$

$$I = \frac{2}{3}(i - 1)$$

مثال 4.3 : جد قيمة التكامل I على المسار $Z(t) = e^{it} = \cos t + i\sin t\,,\ \ 0 \le t \le 2\pi$

$$I = \int_c \frac{dZ}{Z}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d(\cos t + i\sin t)}{\cos t + i\sin t}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t + i\cos t}{\cos t + i\sin t} \times \frac{\cos t - i\sin t}{\cos t - i\sin t}\, dt$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t\cos t + i\sin^2 t + i\cos^2 t + \cos t\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt$$

$$I = \int_0^{2\pi} i(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \int_0^{2\pi} i\, dt$$

$$I = it|_0^{2\pi} = i(2\pi - 0)$$

$$I = i2\pi$$

او

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d(e^{it})}{e^{it}} = \log(e^{it})\Big|_0^{2\pi} = \log(\cos t + i\sin t)|_0^{2\pi}$$

$$I = \left[\log\left(\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\right) + i\tan^{-1}\frac{\sin t}{\cos t}\right]_0^{2\pi}$$

$$I = [\log(1) + i\tan^{-1}\tan t]_0^{2\pi}$$

$$I = (0 + it)|_0^{2\pi}$$

$$I = i2\pi$$

او

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d(e^{it})}{e^{it}} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}dt = \int_0^{2\pi} i\, dt$$

$$I = it|_0^{2\pi} = i(2\pi - 0)$$

$$I = i2\pi$$

4.3.2. نظرية كوشي-كورسا Cauchy-Gorsat Theorem

لتكن الدالة $f(Z)$ تحليلية في المجال البسيط المتصل D، وليكن c مسار بسيط مغلق يقع داخل المجال D.

$$\int_c f(Z)dZ = 0$$

4.4. صيغتي كوشي التكاملية Cauchy's Integral Formulas

لتكن الدالة $f(Z)$ تحليلية في المجال البسيط المتصل D، وليكن c مسار بسيط مغلق موجب الاتجاه يقع داخل المجال D. إذا كانت النقطة Z_0 داخلية بالنسبة للمسار c، فأن:

صيغة كوشي التكاملية الاولى

$$\boldsymbol{f(Z_0) = \frac{1}{i2\pi}\int_c \frac{f(Z)}{Z - Z_0} dZ},$$

ولأي قيمة صحيحة لـ $n \geq 0$، يكون:

صيغة كوشي التكاملية الثانية

$$\boldsymbol{f^{(n)}(Z_0) = \frac{n!}{i2\pi}\int_c \frac{f(Z)}{(Z - Z_0)^{n+1}} dZ},$$

مثال 4.5 : جد قيمة التكامل I عندما يكون المسار هو:

a. the circle $|Z| = 2$.   B. the circle $|Z - 3| = 1$

$$I = \int_c \frac{e^{2Z} dZ}{(Z+1)^4}$$

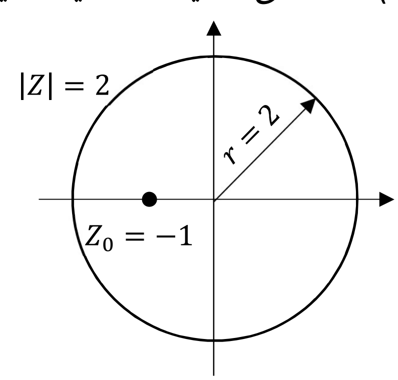
a) استنادا الى الصيغة التكاملية الثانية لكوشي، يمكننا إيجاد ان $f(Z) = e^{2Z}$ دالة تحليلية، وان $Z_0 = -1$، $n = 3$.

$$f^{(1)} = 2e^{2Z}, \qquad f^{(2)} = 4e^{2Z}, \qquad f^{(3)} = 8e^{2Z}$$

$$\therefore f^{(3)}(-1) = 8e^{2(-1)} = 8e^{-2}$$

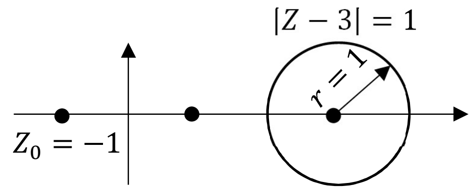
$$f^{(3)}(-1) = \frac{3!}{i2\pi}\int \frac{e^{2Z} dZ}{(Z+1)^4}$$

$$8e^{-2} = \frac{3}{i\pi}\int \frac{e^{2Z} dZ}{(Z+1)^4}$$



$$I=\int_c \frac{e^{2Z}dZ}{(Z+1)^4}=i\frac{8}{3}\pi e^{-2}$$

b) استنادا الى الصيغة التكاملية الثانية لكوشي، يمكننا إيجاد ان $f(Z)=e^{2Z}$ دالة تحليلية، وان $Z_0=$ -1، $n=3$



$\because Z_0=-1$ نقطة شاذة وهي تقع خارج مسار التكامل، لذا واستنادا الى نظرية كوشي-كورسا فأن:

$$I=\int_c \frac{e^{2Z}dZ}{(Z+1)^4}=0$$

مثال 4.5 : جد قيمة التكامل I عندما يكون المسار هو:

a. $|Z-i|=1$ b. $|Z+i|=1$

$$I=\int \frac{e^Z dZ}{Z^2+1}$$

a) بأعاده صياغة شكل التكامل ليتطابق مع الصيغة التكاملية الأولى لكوشي، ينتج:

$$I=\int \frac{e^Z dZ}{Z^2+1}=\int \frac{e^Z dZ}{(Z+i)(Z-i)}$$

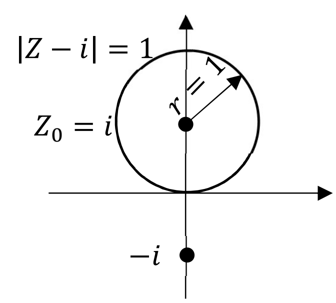
$$\Rightarrow I=\int \frac{\frac{e^Z}{Z+i}dZ}{(Z-i)}$$

استنادا الى الصيغة التكاملية الثانية لكوشي، يمكننا ان نجد $f(Z)=\frac{e^Z}{Z+i}$ هي دالة تحليلية وان $Z_0=i$

$$f(Z_0)=\frac{1}{i2\pi}\int_c \frac{f(Z)}{Z-Z_0}dZ$$

$$\frac{e^i}{i+i}=\frac{1}{i2\pi}\int_c \frac{\frac{e^Z}{Z+i}}{Z-i}dZ$$

$$I=\int_c \frac{\frac{e^Z}{Z+i}}{Z-i}dZ=\frac{i2\pi e^i}{2i}$$



$$I=\pi e^i$$

اذا اخترنا الصيغة التالية للتكامل $I = \int \frac{\frac{e^Z}{Z-i}dZ}{(Z+i)} \Leftarrow$ فأن $Z_0 = -i$ تقع خارج مسار التكامل، لذا فأن نتيجة التكامل استنادا الى نظرية كوشي-كرسا ستكون صفر.

b) بأعاده صياغة شكل التكامل ليتطابق مع الصيغة التكاملية الأولى لكوشي، ينتج:

$$I = \int \frac{e^Z dZ}{Z^2+1} = \int \frac{e^Z dZ}{(Z+i)(Z-i)}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{\frac{e^Z}{Z-i}dZ}{(Z+i)}$$

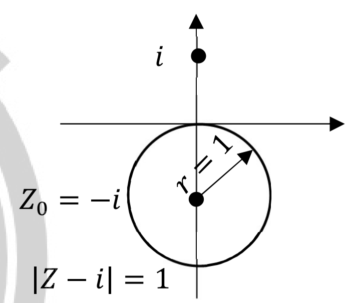
استنادا الى الصيغة التكاملية الثانية لكوشي، يمكننا ان نجد $f(Z) = \frac{e^Z}{Z-i}$ هي دالة تحليلية وان $Z_0 = -i$.

$$f(Z_0) = \frac{1}{i2\pi}\int_c \frac{f(Z)}{Z-Z_0}dZ$$

$$\frac{e^{-i}}{-i-i} = \frac{1}{i2\pi}\int_c \frac{\frac{e^Z}{Z-i}}{Z+i}dZ$$

$$I = \int_c \frac{\frac{e^Z}{Z+i}}{Z-i}dZ = \frac{i2\pi e^i}{-2i}$$

$$I = -\pi e^i$$



اذا اخترنا الصيغة التالية للتكامل $I = \int \frac{\frac{e^Z}{Z+i}dZ}{(Z-i)} \Leftarrow$ فأن $Z_0 = i$ تقع خارج مسار التكامل، لذا فأن نتيجة التكامل استنادا الى نظرية كوشي-كرسا ستكون صفر.

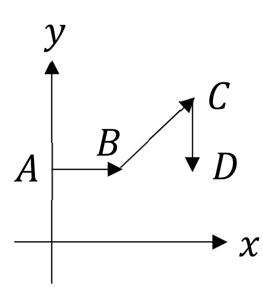
مثال 4.6 : جد قيمة التكامل $\int_c \bar{Z}dZ$، حيث ان $Z = x + iy$ على المسار $ABCD$ حيث ان $A(0,1), B(2,1), C(3,2), D(3,1)$.

معادلات المسار هي:

$$y = 1 \quad : \quad AB$$

$$y = x - 1 \quad : \quad BC$$

$$x = 3 \quad : \quad CD$$



$$I=\int_c \bar{Z}dZ=\int_{AB}\bar{Z}dZ+\int_{BC}\bar{Z}dZ+\int_{CD}\bar{Z}dZ$$

$$I=\int_{AB}(x-iy)d(x+iy)+\int_{BC}(x-iy)d(x+iy)+\int_{CD}(x-iy)d(x+iy)$$

$$I=\int_{AB}(x-iy)(dx+idy)+\int_{BC}(x-iy)(dx+idy)+\int_{CD}(x-iy)(dx+idy)$$

$$I=\int_{AB}xdx+\int_{AB}ydy-i\int_{AB}ydx+i\int_{AB}xdy+\int_{BC}xdx+\int_{BC}ydy-i\int_{BC}ydx$$
$$+i\int_{BC}xdy+\int_{CD}xdx+\int_{CD}ydy-i\int_{CD}ydx+i\int_{CD}xdy$$

التكامل $\int_{AB} ydy = 0$ و $\int_{AB} xdy = 0$ كون ان $dy = 0$ لان المسار افقي وبدون أي تغيير في قيمة y، وأيضا لدينا $\int_{CD} xdx = 0$ و $\int_{CD} ydx = 0$ كون ان $dx = 0$ لان المسار عمودي وبدون أي تغيير في قيمة x.

$$I=\int_0^2 xdx-i\int_0^2 ydx+\int_2^3 xdx+\int_2^3 xdx-\int_2^3 dx-i\int_2^3 xdx+i\int_2^3 dx+i\int_2^3 xdx$$
$$+\int_2^1 ydy+i\int_2^1 3dy$$

$$I=\frac{x^2}{2}\bigg|_0^2-ix|_0^2+x^2|_2^3-x|_2^3+ix^2|_2^3+\frac{y^2}{2}\bigg|_2^1+i3y|_2^1$$

$$I=2-i2+9-4-1+i+\frac{1}{2}-2+i3-i6$$

$$I=\frac{9}{2}-i4$$

4.5. نظرية موريرا Morera's Theorem

لتكن الدالة $f(Z)$ مستمرة في المجال المتصل البسيط D، فاذا كان $\int_c f(Z)dZ = 0$ لكل مسار مغلق في D، فأن $f(Z)$ هي دالة تحليلية في المجال D.

ان نظرية موريرا هي النظرية العكسي لنظرية كوشي-كورسا.

4.5. النظرية الأساسية في الجبر Fundamental Theorem of Algebra

اذا كانت $p(Z)$ هي دالة متعددة الحدود لدرجة $n \geq 1$، فأن $p(Z)$ لديها في الأقل جذر واحد صفري.

$$p(Z) = a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \cdots + a_n Z^n = 0$$

الواجب البيتي Home Work

س1/ احسب قيمة التكاملات التالية على المسار $y = 1 - x^2$.

1. $\int_{0,1}^{1,0} xydx$ $\qquad \frac{1}{4}$
2. $\int_{0,1}^{1,0} xydy$ $\qquad -\frac{4}{15}$

س2/ احسب قيمة التكامل $\int_c Z^2 dZ$ حيث ان $Z = x + iy$ على المسار $y = 2x(2 - x)$ و $1 \leq x \leq 2$. $[-\frac{86}{3} - 6i]$

س3/ احسب قيمة التكامل $\int_{0,0}^{1,2} ZdZ$ حيث ان $Z = x + iy$ على المسار $y = x^2$. $[-1.5 + 2i]$

س4/ احسب قيمة التكامل $I = \int_c (x^2 + y^2) dZ$ على المسار $1 \leq t \leq 3$, $x = t^2,\ y = \frac{1}{t}$.

$[\frac{728}{3} + \log 9 - i\frac{728}{81} = 244.8639 - i8.9877]$

الفصل الخامس

المتتابعات والمتسلسلات Sequences and Series

5.1. المتتابعات بالصيغة المعقدة Sequences in Complex Form

من الناحية الشكلية، التسلسل المعقد هو دالة مجالها هو الأعداد الصحيحة الموجبة ويكون نطاقها مجموعة فرعية من الأعداد المركبة. فيما يلي أمثلة على المتسلسلات:

$$f(n) = \left(2 - \frac{1}{n}\right) + i\left(5 + \frac{1}{n}\right), \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

$$g(n) = e^{i\frac{\pi n}{4}}, \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

$$h(n) = 5 + i3 + \left(\frac{1}{n} + i\right)^n, \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

$$r(n) = \left(\frac{1}{n} + \frac{i}{2}\right)^n, \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

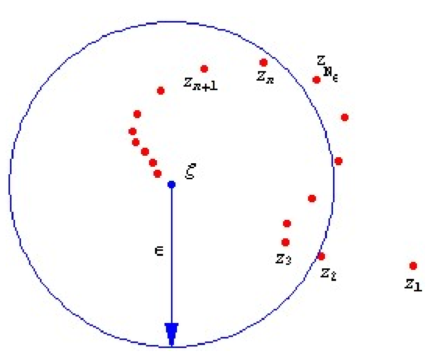
تتصرف المتتابعات $f(n)$ و $g(n)$ بشكل مختلف مع زيادة مقدار n . إن حدود المتتابعة $f(n)$ تقترب من $2 + 5i = (2,5)$ ، لكن الحدود الموجودة في g لا تقترب من أي رقم معين، حيث تتأرجح حول الجذور الثمانية على دائرة الوحدة. بشكل غير رسمي، فإن المتتابعة $\{Z_n\}_1^\infty$ تمتلك قيمة مقدارها ξ عندما تتجه غايتها لـ n الى المالانهاية، يمكن ان نجعل قيم حدود Z_n قريبة جدا من المقدار ξ بجعل قيمة n كبيرة بمقدار كافي. عندما يحدث هذا، فيمكن ان نكتب:

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = \xi \quad or \quad Z_n \to \xi \ as\ n \to \infty$$

إذا كان $\lim_{n\to\infty} Z_n = \xi$ فأننا نقول ان المتتابعة $\{Z_n\}_1^\infty$ تنفرج الى ξ

5.1.1 غاية المتتابعات Limit of a Sequences

ان الغاية $\lim_{n\to\infty} Z_n = \xi$ تعني ان لاي عدد حقيقي $\epsilon > 0$ يوجد مقابلة عدد صحيح موجب N_ϵ (والذي تعتمد قيمته على ϵ) بحيث ان $Z_n \in D_\epsilon(\xi)$ عندما يكون $n > N_\epsilon$. علما ان $|\xi - Z_n| < \epsilon$ عندما $n > N_\epsilon$. الشكل المجاور يوضح انفراج المتتابعات.



نظرية 5.1: ليكن $Z_n = x_n + iy_n$ و $\xi = u + iv$ فأن

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = \xi, \qquad iff$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = u \qquad and \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = v.$$

مثال 5.1: جد غاية المتتابعة $\{Z_n\} = \left\{\frac{\sqrt{n}+i(n+1)}{n}\right\}$

ابتداءً نعيد كتابة المتتابعة Z_n بدلالة جزءه الحقيقي والخيالي وكالتالي

$$Z_n = x_n + iy_n = \frac{\sqrt{n} + i(n+1)}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} + i\frac{n+1}{n}$$

وبالتالي فأن الغاية للجزء الحقيقي والخيالي هي

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \ \ and \ \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

أي ان الغاية للمتتابعة Z_n هي

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} + i(n+1)}{n} = 0 + i = i$$

مثال 5.2: اثبت ان المتتابعة $\{Z_n\} = \{(1+i)^n\}$ تتباعد.

$$Z_n = (1+i)^n = x_n + iy_n$$

$$Z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left[\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right] = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{4} + i\left(\sqrt{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{4}$$

نظرا لان كلا من جزئي المتتابعة الحقيقي $\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{4}$ والخيالي $\left(\sqrt{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{4}$ يظهر تذبذب تباعديا (سعة الموجة $\left(\sqrt{2}\right)^n$) اذ ان قيمة المتتابعة تتغير باستمرار بسبب سلوك الدوال الجيبية، لذا فأننا نستنتج ان $Z_n = (1+i)^n$ يتباعد.

5.2 المتسلسلات المركبة Complex Series

واحدة من أهم المفاهيم في التحليل في الفضاء (حقيقية أو معقدة) هي نظرية تسمح لنا بإضافة عدد غير منتهي من الحدود. لفهم هذه الفكرة، نبدأ بالمتتابعة $\{Z_n\}$ ، ونكوّن تتابعا جديدًا $\{S_n\}$ ، ويسمى بمتتابعة المجاميع الجزئية، كما يلي.

$$S_1 = Z_1,$$

$$S_2 = Z_1 + Z_2,$$

$$S_3 = Z_1 + Z_2 + Z_3,$$

$$\vdots$$

$$S_n = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k,$$

5.2.1. المتسلسلات اللانهائية Infinite Series

ان الصيغة الرسمية $\sum_{k=1}^{\infty} Z_k = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ تدعى بالمتسلسلات اللانهائية، وتدعى الحدود $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots,$ بحدود المتسلسلة.

وعند وجود عدد مركب ليكن S لغاية المتسلسلة

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} Z_k$$

عندها نقول ان المتسلسلات اللانهائية $\sum_{k=1}^{n} Z_k$ تتقارب عند القيمة S، وان S هو مجموع المتسلسلة اللانهائية. عند حدوث ذلك فيمكن ان نكتب ان

$$S = \sum_{k=1}^{n} Z_k$$

ان المتسلسلة $\sum_{k=1}^{n} Z_k$ تكون متقاربة بشكل مطلق عندما تكون المتسلسلة للقيمة المطلقة (الحقيقة) للمتسلسلة $\sum_{k=1}^{n} |Z_k|$ متقاربة. وعند عدم حدوث التقارب فأننا نقول ان المتسلسلة متباعدة.

لا يؤثر تقارب او تباعد أول اعداد من حدود المتسلسلة، وفي هذا الصدد، لا يعتبر مؤشر البداية للمتسلسلة (اول حد نبتدأ به) ذا أهمية .وهكذا، فإننا سوف نخلص ومن دون تشك أنه إذا كانت المتسلسلة $\sum_{k=n+1}^{\infty} |Z_k|$ تتقارب، فأن المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} |Z_k|$ تتقارب أيضا، حيث ان $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ هو أي مجموعة محددة من حدود المتسلسلة. ونفس الملاحظة تبقى سليمة فيما يخص تباعد المتسلسلات.

نظرية 5.2: ليكن $Z_n = x_n + iy_n$ و $S = u + iv$ فأن

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) \qquad (converges)$$

فقط وإذا فقط كان كلا

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}x_n \quad and \quad v=\sum_{n=1}^{\infty}y_n \qquad (converge).$$

نظرية 5.3: إذا كان $\sum_{n=1}^{\infty}Z_n$ هي متسلسلة متقاربة، فأن $\lim_{n\to\infty}Z_n=0$.

مثال 5.3 : بين ان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+in(-1)^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}+i\,\frac{(-1)^n}{n}\right]$ هي متقاربة.

اننا نعلم ان المتسلسلة الحقيقية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ هما متسلسلتان متقاربتان. واستنادا الى النظرية 5.1 فأن المتسلسلة المركبة تكون متقاربة.

مثال 5.4 : بين ان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|(1+i)|^n$ هي متسلسلة متباعدة.

على فرض ان $Z_n=(1+i)^n$ فمكننا ان نلاحظ ان

$$\lim_{n\to\infty}|Z_n|=\lim_{n\to\infty}|(1+i)^n|=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n=\infty$$

لكون ان $\lim_{n\to\infty}|Z_n|\neq 0$ ، واستنادا الى النظرية 5.3 فأن المتسلسلة هي متباعدة.

نظرية 5.4 : ليكن $\sum_{n=1}^{\infty}Z_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ هما متسلسلتان متقاربتان، وليكن c عدد مركب، فأن

$$\sum_{n=1}^{\infty}cZ_n=c\sum_{n=1}^{\infty}Z_n$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Z_n+w_n)=\sum_{n=1}^{\infty}Z_n+\sum_{n=1}^{\infty}w_n$$

5.3. متسلسلات تايلور ومكلورين Taylor and Maclaurin Series

لنفترض أن الدالة المعقد $f(Z)$ هي تحليلية في بعض المناطق من المستوى المعقد ولتكن Z_0 نقطة داخل تلك المنطقة. فأن $f(Z)$ تمتلك متسلسلات قوى بمعاملات يمكن احتسابها بوساطة احتساب مشتقات الدالة عند تلك النقطة، ان متسلسلة تايلور للدالة تعطى بالعلاقة التالية.

$$f(Z)=f(Z_0)+\frac{f'(Z_0)}{1!}(Z-Z_0)+\frac{f''(Z_0)}{2!}(Z-Z_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(Z_0)}{n!}(Z-Z_0)^n+\cdots$$

وعند تحديد قيمة Z_0 للصفر لنجعل المتسلسلة تحتسب عند نقطة الأصل، عندها سنحصل على متسلسلة مكلورين وكما في العلاقة

$$f(Z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}Z + \frac{f''(0)}{2!}Z^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}Z^n + \cdots$$

5.3.1. نظرية متسلسلات القوى Theorems on Power Series

أهم حقيقة حول متسلسلة القوى المتقاربة التي يجب أن تبقيها في ذهنك هي أنه في نطاق دائرة التقارب، يمكنك اشتقاق المتسلسلة بأجراء الاشتقاق لكل حد على حدة، او اجراء التكامل لمتسلسلة القوى بأجراء التكامل لكل حد على حدة على طول أي المسار يقع على ضمن نصف قطر التكامل.

مثال 5.6 : جد متسلسلة تايلور للدالة $f(Z) = \frac{1}{1-Z+Z^2}$ حول نقطة الأصل.

سنحتسب المشتقتين الأولى فقط. بدايتا يجب ان نحتسب

$$f(0) = \frac{1}{1-0+0^2} = 1$$

وللمشتقة الأولى فأن

$$f'(Z) = \frac{d}{dZ}\left(\frac{1}{1-Z+Z^2}\right) = \frac{-1}{(1-Z+Z^2)^2}(-1+2Z)$$

$$\Rightarrow f'(0) = 1$$

وللمشتقة الثانية فأن

$$f''(Z) = \frac{d}{dZ}\left(\frac{1}{(1-Z+Z^2)^2}(-1+2Z)\right)$$
$$= \frac{2}{(1-Z+Z^2)^2} - \frac{2}{(1-Z+Z^2)^3}(-1+2Z)^2$$

$$\Rightarrow f''(0) = 0$$

وأخيرا، فأن معامل المشتقة الثالثة

$$f'''(Z) = \frac{d}{dZ}\left(\frac{2}{(1-Z+Z^2)^3} - \frac{2}{(1-Z+Z^2)^2}(-1+2Z)^2\right)$$
$$= \frac{6(-1+2Z)^3}{(1-Z+Z^2)^4} - \frac{12(-1+2Z)}{(1-Z+Z^2)^3}$$

$$\Rightarrow f'''(0) = 6$$

وعليه فأن المتسلسلة بعد تعويض قيم المعاملات هي

$$f(Z) = f(0) + Zf'(0) + \frac{Z^2}{2!} f''(0) + \frac{Z^3}{3!} f'''(0) + \cdots$$

$$f(Z) = 1 + Z + Z^3 + \cdots$$

5.4. متسلسلات لورنت Laurent Series

متسلسلة لورنت عبارة عن تمثيل متسلسل لدالة المتغير المعقد $f(Z)$. هناك فرق كبير ستلاحظه عند مقارنة متسلسلة لورنت مع متسلسلة تايلور أو متسلسلة القوى هو أن متسلسلة لورنت تتضمن حدود ذات قوى (أسس) سالبة.

من حيث المبدأ، يمكن أن تتراوح القوى (الأسس) إلى الأسفل لتصل الى $-\infty$ ، ولكن في العديد من الحالات، إن لم يكن معظمها، يتم تضمين بعض الحدود ذات القوة السالبة فقط. لذلك، وبشكل عام، فأن متسلسلة لورنت للدالة المركبة $f(Z)$ حول النقطة $Z = Z_0$ تعطى بالعلاقة

$$f(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (Z - Z_0)^n$$

ان معاملات المتسلسلة يتم احتسابها بوساطة الصيغة التكاملية لكاوشي Cauchy، التي ناقشناها في الفصل الرابع. أي

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(Z)dZ}{(Z - Z_0)^{n+1}}, \qquad for\ n = 0,1,2, \dots$$

يؤخذ التكامل على طول منحنيات التي تحدد حلقات مغلقة في داخلها النقطة Z_0. في المعادلة a_n ، يكون المنحنى المستخدم للتكامل هو المنحنى الخارجي الذي يحدد الحلقة.

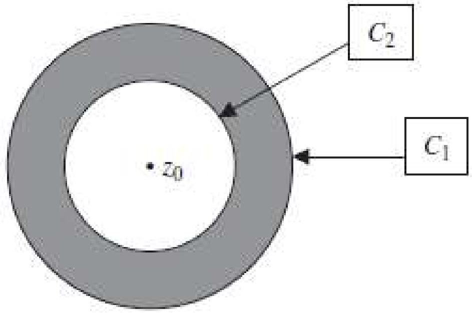
يتم حساب المعاملات السالبة في المتسلسلة باستخدام التكامل

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint f(Z)(Z - Z_0)^{n-1} dZ, \qquad for\ n = 0,1,2, \dots$$

في هذه الحالة، يتم استخدام المنحنى الداخلي (انظر الشكل أدناه). من خلال تشويه نظرية المسار، نعلم أنه يمكننا استخدام أي دائرة متحدة المركز تحيط بالنقطة المفردة Z_0 لحساب التكامل. ونتيجة لذلك، تكون الصيغة في المعادلة a_n صالحة بشكل عام لـ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

يمكن كتابة سلسلة لورنت بالشكل التالي

$$f(Z) = a_0 + a_1(Z - Z_0) + a_2(Z - Z_0)^2 + \cdots + \frac{a_{-1}}{Z - Z_0} + \frac{a_{-2}}{(Z - Z_0)^2} + \cdots$$



يسمى مجموع الحدود ذات المؤشرات السالبة بالجزء الاساسي من السلسلة:

$$\frac{a_{-1}}{Z - Z_0} + \frac{a_{-2}}{(Z - Z_0)^2} + \cdots$$

اننا نطلق على النقاط Z_0 التي تفسح المجال لحدود بقوى سلبية لـ $Z - Z_0$ في متسلسلة لورنت بنقاط الانفراد او التفرد. بشكل أوضح فأن نقاط الانفراد تمثل النقاط التي لا يمكن احتساب قيمة للدالة وبنفس الوقت فان الدالة عند هذه النقاط غير قابلة للاشتقاق.

ان الجزء التحليلي من المتسلسلة تعطى بجزء من المتسلسلة والذي يشبه متسلسلات متعددة القوى.

$$a_0 + a_1(Z - Z_0) + a_2(Z - Z_0)^2 + \cdots$$

5.4.1. الدوال التامة Entire Functions

التقينا لأول مرة مفهوم الدالة التامة في الفصل الثاني. الآن بعد أن أدخلنا مفهوم سلسلة لورانت، لدينا طريقة منظمة لتحديد ما إذا كانت الدالة تامة. ان الدالة التامة هي تحليلية في جميع أنحاء المستوي المركب بأكمله. لا يمكن أن تحتوي متسلسلة لوران لدالة تامة على جزء أساسي.

ويمكن التعبير بطريقة أخرى، أن الدالة التامة يمكن تمثيلها بمتسلسلة تايلور مع نصف قطر لانهائي من التقارب. نصف قطر التقارب لا نهائي لان الدالة تحليلية على المستوى المركب بأكمله.

5.4.2. نظرية ليوفيل Liouvilles Theorem

إذا كانت الدالة $f(Z)$ هي دالة تامة وان جميع قيم Z هي مقيدة في المستوي المركب، فأن الدالة $f(Z)$ هي مقدار ثابت.

الفصل السادس

الأقطاب والرواسب Poles and Residues

6.1. الرواسب Residues

ان النقطة Z_0 هي نقطة مفردة لدالة $f(Z)$ إذا لم تكن الدالة $f(Z)$ تحليلية في Z_0 ، ولكنها تحليلية في النقاط المجاورة للنقطة Z_0. يقال إن النقطة المفردة Z_0 من الدالة $f(Z)$ معزولة إذا كانت النقاط المجاورة للنقطة Z_0 لا تحتوي على نقاط مفردة لـ $f(Z)$ باستثناء النقطة Z_0. بمعنى آخر، تكون الدالة $f(Z)$ تحليليًا في بعض المناطق $0 < |Z - Z_0| < \xi$.

مثال 6.1 : جد النقاط المفردة للدوال التالية

.1	$$f(Z) = \frac{1}{Z(Z^2+4)}$$ لديها نقاط مفردة في $Z = 0$ و $Z = 2i$ و $Z = 2i$
.2	كل النقاط الحقيقية السالبة على خط الاعداد هي نقاط مفردة للدالة $\log Z$، ولكن لا يوجد نقاط مفردة معزولة.

لنفرض ان Z_0 هي نقطة مفردة معزولة للدالة $f(Z)$. وعليه توجد متسلسلة لورنت للدالة

$$f(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (Z - Z_0)^n$$

سليمة ضمن الفترة $0 < |Z - Z_0| < \xi$، لقيمة معينة موجبة لـξ . ان المعامل a_{-1} للحد $(Z - Z_0)^{-1}$ يدعى راسب الدالة $f(Z)$ عند النقطة Z_0، ويكتب عادةً

$$\underset{Z=Z_0}{Res} f(Z)$$

والان، لم نعطي اهتمام خاص لـa_{-1} بحيث نعطيه اسم خاص؟ حسنا، لاحظ عندما يكون c هو أي منحني مغلق موجب الاتجاه ضمن الفترة $0 < |Z - Z_0| < \xi$ ويحتوي بداخلة النقطة Z_0، فأن

$$a_{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_c f(Z) dZ$$

وهذا التكامل يمثل المفتاح لاحتساب العديد من التكاملات المركبة.

مثال 6.2 : حدد رواسب الدالة $f(Z) = e^{\frac{1}{Z}}$

بدايةً يجب إيجاد متسلسلة لورنت حول نقطة 0. حيث نعلم مسبقا ان

$$e^{\frac{1}{Z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} Z^{-n}$$

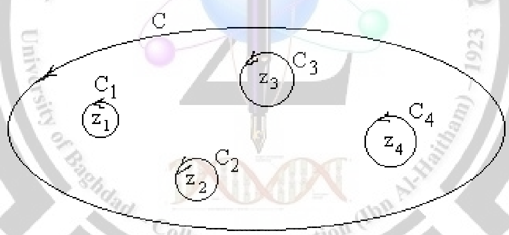
لكل قيم Z. وعليه

$$e^{\frac{1}{Z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} Z^{-n} = 1 + \frac{1}{Z} + \frac{1}{2!\,Z^2} + \cdots$$

فأن الراسب هو $a_{-1} = 1$.

6.1.1. نظرية الرواسب Residue Theorem

لنفترض أن لدينا دالة $f(Z)$ وهي تحليلية في كل مكان باستثناء النقاط المفردة المعزولة وليكن c منحنى مغلق بسيط (موجب الاتجاه) والذي تكون فيه الدالة $f(Z)$ تحليليًا وعلية سيكون هناك عدد محدد من النقاط المفردة للدالة $f(Z)$ بداخل المنحني c. لندعهم بـ $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ لكل $k = 1, 2, \dots, n$، وليكن c_k دائرة موجبة الاتجاه مركزها عن النقطة Z_k بنصف قطر صغير بحيث يبقى داخل المنحني c وبدون وجود نقاط انفراد أخرى غير التي تمركز عليها بداخله.



فأن

$$\int_c f(Z)dZ = \int_{c_1} f(Z)dZ + \int_{c_2} f(Z)dZ + \cdots + \int_{c_n} f(Z)dZ$$

$$\int_c f(Z)dZ = 2i\pi \underset{Z=Z_1}{Res} f(Z) + 2i\pi \underset{Z=Z_2}{Res} f(Z) + \cdots + 2i\pi \underset{Z=Z_n}{Res} f(Z)$$

$$\int_c f(Z)dZ = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \underset{Z=Z_n}{Res} f(Z)$$

هذه هي نظرية الرواسب الشهيرة. والتي تنص على أن تكامل الدالة $f(Z)$ هو ببساطة $2i\pi$ أضعاف مجموع الرواسب في النقاط المفردة المغلقة بواسطة المنحني المغلق c.

6.2. الأقطاب وأنواع نقاط الانفراد Poles and Types of Singularities

إن النوع الأول من الانفراد الذي نواجهه يدعى "التفرد القابل للإزالة"، لأنه عبارة عن نقطة $Z \to Z_0$ التي لا يمكن احتساب قيمة الدالة لها، ولكن في نفس الوقت فأننا يمكننا احتساب قيمة الغاية $\lim_{Z \to Z_0} f(Z)$ لها عند تلك النقطة. على سبيل المثال، الدالة $f(Z) = \frac{\sin Z}{Z}$. حيث قيمة الدالة $f(0)$ غير محددة، ولكن $\lim_{Z \to 0} f(Z) = 1$.

عند فهم هذا، فأنت تفهم مفهوم التفرد القابل للإزالة.

لنفترض أن الجزء الرئيسي من سلسلة لورنت يحتوي فقط على عدد محدد من الحدود:

$$\frac{a_{-1}}{Z - Z_0} + \frac{a_{-2}}{(Z - Z_0)^2} + \cdots + \frac{a_{-n}}{(Z - Z_0)^n}$$

فأن النقطة $Z = Z_0$ تدعى بالقطب من الرتبة n . ان القطب يسبب بعدم إمكانية احتساب قيمة الدالة عند النقطة $Z = Z_0$. إذا كانت علامة a_{-1} هي المعامل غير الصفري الوحيد في الجزء الرئيسي من المتسلسلة، فنحن نقول إن $Z = Z_0$ هو قطب بسيط.

التفرد الأساسي هو الذي ينتج عنه عدد لا حصر له من حدود متسلسلات القوى ذات الاس السالب في متسلسلة لوران. وهذا هو، الجزء الرئيسي من متسلسلة لوران هو غير محدد.

نقطة التفرع $Z = Z_0$ هي نقطة دالة متعددة القيم حيث تقوم الدالة بتغيير القيمة عندما ينحني المنحنى مرة واحدة حول Z_0.