المرحلة الثانية / قسم الكيمياء / الرياضيات
(الفصل الاول)

التفاضل الجزئي Partial differntation

يوجد نوعين من الاشتقاق ١- أعتيادي ٢- جزئي

الاشتقاق الاعتيادي :- لتكن $y = f(x)$ دالة للمتغير x فقط حيث يدعى x بمتغير مستقل و y بمتغير معتمد فأن هذه الدالة يمكن أشتقاقها أشتقاق عادي لأن المتغير المستقل واحد فقط ويرمز له بالرمز d

Example :-

$$y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dy = 2x\,dx$$

وتدعى المعادلة التي تحتوي على أشتقاق بالمعادلة التفاضلية والتي يمكن كتابتها بالشكل

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = F(x) \Rightarrow dy = F(x)\,dx$$

الاشتقاق الجزئي

لتكن Z دالة لأكثر من متغير مستقل واحد مثلاً $Z = f(x,y)$. هنا المتغير المستقل هو x ، y والمعتمد Z فأن هذه الدالة يمكن أشتقاقها جزئياً لـ x مرة و y مرة أخرى حيث يرمز للاشتقاق هنا ∂

وعليه فأن المشتقات الجزئية لـ x ولـ y هي $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y$ ، $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x$

وبصورة عامة فأن الدالة التي فيها n من المتغيرات المستقلة لها n من المشتقات الجزئية ويتم أيجاد المشتقة الجزئية لأحد المتغيرات بأعتبار المتغيرات الاخرى ثوابت

4-) $\int x^2 e^x dx$ $\qquad u = x^2 \qquad dv = e^x dx$

$du = 2x \qquad v = e^x$

$= x^2 e^x - \int 2x e^x dx$

نأخذ udv مره أخرى لأن x^2 أصبح x ويجب ان

أتخلص من x $\qquad u = 2x \qquad dv = e^x dx$

$du = 2dx \qquad v = e^x$

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - [2x e^x - \int 2 e^x dx] = x^2 e^x - 2x e^x - 2e^x + C$

رفع الدوال المثلثيه لقوى معينه أو ضربها

(Power and products of trigonometric functions)

1- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx$ $\qquad$ قانون ضعف الزاويه

$= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin 2x) + C$

-- $\int \sin^3 x \, dx = \int \sin x \, \sin^2 x \, dx$

$= \int \sin x \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx$

$= \frac{1}{2} \int (\sin x - \sin x \cos 2x) dx$

$\boxed{\sin x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin(3x) + \sin(-x))}$ حفظ

$= \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{4} \int [\sin 3x + \sin(-x))] dx$

$$= -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{1}{4}\cos(-x) + C$$

3-) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\, dx$$ قانون ضعف الزاوية

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

4-) $\int \cos^3 x \, dx = \int \cos x \cdot \cos^2 x \, dx$

$$= \int \cos x \cdot \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\, dx$$

$$= \int \frac{1}{2}\cos x \, dx + \frac{1}{2}\int \cos x \cos 2x \, dx$$

$$\boxed{\cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2}\left(\cos 3x + \cos(-x)\right)}$$ من المتطابقة

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\left(\cos 3x + \cos(-x)\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}\int \cos 3x \, dx + \frac{1}{4}\int \cos(-x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin x + C$$

5-) $\int \sin x \cos x \, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C$

or $= \frac{-\cos^2 x}{2} + C$

(هنا لدينا أثنان من الدوال المثلثية فتكون طريقة التكامل بأن نضع أحد الدوال المثلثية داخل قوس كالآتي $\sin x (\cos x)$ ونلاحظ مشتقة داخل القوس هل موجوده خارج القوس فنرى هنا مشتقة $\cos x$ هي $(-\sin x)$ لدينا $\sin x$ وليس لدينا (-1) نضرب ونقسم في -1 أي $\frac{-1}{-1}\int \sin x (\cos x)$ أذن أصبحت مشتقة داخل القوس موجوده في الخارج أذن نضيف أس على القوس ونقسم على الأس الجديد أي يكون ناتج التكامل هو $\frac{-\cos^2 x}{2} + C$ ويجوز العكس أي نضع داخل القوس الدالة الاخرى ونتبع نفس الطريقة

ex:- $\int \sin^3 x \cos x \, dx = \int (\sin x)^3 \cos x \, dx$

$= \frac{(\sin x)^4}{4} + C$

$\int \sin^3 2x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \frac{(\sin 2x)^4}{4} + C$

$= \frac{1}{8} (\sin 2x)^4 + C$

6- $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int (\sin x \cos x)^2 dx$

$\sin x \cos x = \frac{1}{2} (\sin 0 + \sin 2x)$ من المتطابقة

$= \frac{1}{4} \int (\sin 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) dx$

$$= \frac{1}{8}X - \frac{1}{32}\sin 4X + C$$

7- $\int \cos^3 X \sin X \, dX = -\frac{\cos^4 X}{4} + C$

المتطابقات الاتية للحفظ

1- $\sin X \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(X-y) + \sin(X+y)\right]$

2- $\sin X \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(X-y) + \cos(X+y)\right]$

3- $\cos X \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(X-y) + \cos(X+y)\right]$

4- $\sin^2 X = \frac{1}{2}(1 - \cos 2X)$

5- $\cos^2 X = \frac{1}{2}(1 + \cos 2X)$

6- $\sin(-X) = -\sin X$, $\cos(-X) = \cos X$

Partial fractions تجزئة الكسور

تستخدم هذه الطريقة عندما يكون أس المقام أكبر من الاس في البسط . وهناك عدة حالات هي

1- اذا كان المقام من الدرجة الاولى فأن الفرض نكون A مثلاً المقام هو $(X-a)^n$ نجزئها

$$\frac{A}{(X-a)} + \frac{B}{(X-a)^2} + \frac{C}{(X-a)^3} + \cdots + \frac{E}{(X-a)^n}$$

Example :- $\int \frac{X^2+5X+2}{(X-1)^3}$

$$\frac{x^2+5x+2}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + B(x-1) + C}{(x-1)^3}$$

$$\therefore x^2+5x+2 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C$$

$$= Ax^2 - 2Ax + A + Bx - B + C$$

$$= Ax^2 + (-2A+B)x + (A-B+C)$$

$\therefore A = 1$, $-2A+B = 5 \Rightarrow B = 5+2A \Rightarrow B = 7$

$A - B + C = 2 \Rightarrow C = 2 + B - A \Rightarrow C = 8$

$\therefore$

$$\frac{x^2+5x+2}{(x-1)^3} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{7}{(x-1)^2} + \frac{8}{(x-1)^3}$$

$$\therefore \int \frac{x^2+5x+2}{(x-1)^3} = \int \frac{1}{(x-1)}\,dx + \int \frac{7}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{8}{(x-1)^3}\,dx$$

$$= \ln|x-1| + \frac{-7}{(x-1)} + \frac{-4}{(x-1)^2} + C$$

ب - اذا كانت داخل القوس من الدرجة الثانية فأن الفرض تكون $Ax+B$ كما في المثال الاتي

$$\int \frac{2x^2-5}{(x^2+3)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+3)} + \frac{Cx+D}{(x^2+3)^2}$$

$$\frac{2x^2-5}{(x^2+3)^2} = \frac{(Ax+B)(x^2+3) + Cx+D}{(x^2+3)^2}$$

$$2x^2-5=(Ax+B)(x^2+3)+(Cx+D)$$

$$2x^2-5=Ax^3+Bx^2+3Ax+3B+Cx+D$$

$$2x^2-5=Ax^3+Bx^2+(3A+C)x+(3B+D)$$

$$\therefore A=0 \;,\; B=2 \;,\; 3A+C=0 \;\therefore\; C=0$$

$$3B+D=-5 \Longrightarrow D=-1$$

$$\therefore \frac{2x^2-5}{(x^2+3)^2}=\frac{2}{x^2+3}+\frac{-11}{(x^2+3)^2}$$

$$\therefore \int \frac{2x^2-5}{(x^2+3)^2}\,dx=\int \frac{2}{x^2+3}\,dx-\int \frac{11}{(x^2+3)^2}\,dx$$

Example:- $\displaystyle\int \frac{2x^2+3}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$

$$=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}$$

$$2x^2+3=Ax^2-2Ax+A+Bx^2-Bx+Cx$$

$$A+B=2 \;,\; -2A-B+C=0 \;,\; A=3 \Longrightarrow B=-1,\; C=5$$

$$\therefore \frac{2x^2+3}{x(x-1)^2}=\frac{3}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{2x^2+3}{x(x-1)^2}=\int \frac{3}{x}\,dx-\int \frac{1}{x-1}\,dx+\int \frac{5}{(x-1)^2}\,dx$$

$$=3\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{5}{(x-1)}+C$$

أمثلة

1- $\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{1}{(x-2)(x+2)}\,dx$

$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$1 = Ax + 2A + Bx - 2B \quad , A+B=0 \quad , 2A-2B=1$

$\Rightarrow B=-A \qquad \therefore A = \frac{1}{4} \; , B = -\frac{1}{4}$

$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{1/4}{x-2}\,dx - \int \frac{1/4}{x+2}\,dx$

$= \frac{1}{4}\ln|x+2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$

2- $\int \frac{x^2+5x+2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

$= \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}$

$x^2+5x+2 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx + Bx + C$

$A+B=1 \; , C+B=5 \; , A+C=2$

$\therefore A=-1 \; , B=2 \; , C=3$

$\therefore \int \frac{x^2+5x+2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \int \frac{-1}{(x+1)}\,dx + \int \frac{2x+3}{x^2+1}\,dx$

$= -\ln|x+1| + \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{3}{x^2+1}\,dx$

$= -\ln|x+1| + \ln|x^2+1| + 3\tan^{-1}x + C$

since $\int (\tan^{-1}x)' = \frac{1}{x^2+1}\,dx$

4- $\int \frac{x^5+2}{x^2-1}\,dx$

نلاحظ أن أس البسط أكبر من أس المقام لذا سوف نستخدم القسمة الطويلة

$$\begin{array}{r|l} & x^3+x \\ \hline x^2-1 & x^5+2 \\ & \mp x^5 \pm x^3 \\ \hline & +x^3+2 \\ & \mp x^3 \pm x \\ \hline & 2+x \end{array}$$

$$\int \frac{x^5+2}{x^2-1}\,dx = \int \left(x^3+x+\frac{x+2}{x^2-1}\right)dx$$

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \qquad \therefore A = -\frac{1}{2},\ B = \frac{3}{2}$$

$$\int \frac{x^5+2}{x^2-1}\,dx = \int \left(x^3+x-\frac{1/2}{x+1}+\frac{3/2}{x-1}\right)dx$$

$$= \frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln|x-1|+C$$

5- $\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{Ax^2+Ax+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+x+1)}$

$\therefore A=1,\ B=-1,\ C=-1$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)} = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x^2+x+1}\right)dx = \ln|x| - \int \frac{(x+1)}{x^2+x+1}\,dx$$

$$\int \frac{(x+1)}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}[2x+1]+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] + C$$

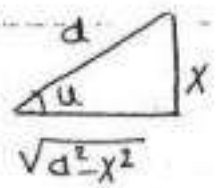
$$\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] + C$$

Trigonometric Substitutions — التعويضات المثلثية

تستخدم هذه الطريقة عندما يوجد جذر وتأخذ ثلاث حالات

هي

1- $\sqrt{a^2-x^2}$

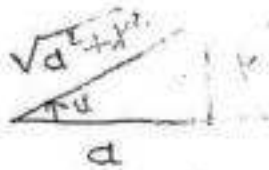


$\sin u = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a\sin u$ الفرضية هي

$\sqrt{a^2-x^2} = a\cos u$

2- $\sqrt{a^2+x^2}$

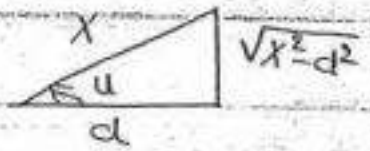
$\tan u = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a\tan u$



$\sqrt{a^2+x^2} = a\sec u$

3- $\sqrt{x^2-d^2}$

$\sec u = \frac{x}{d} \Rightarrow x = d\sec u$

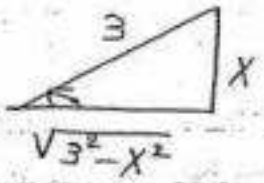


$\sqrt{x^2-d^2} = d\tan u$

Examples

1- $\int \frac{dx}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$3\sin u = x \quad , \quad 3\cos u\, du = dx$



$$\int \frac{dx}{(\sqrt{9-x^2})^3} = \int \frac{3\cos u\, du}{(\sqrt{3^2-3^2\sin^2 u})^3} = \int \frac{3\cos u\, du}{(3\sqrt{1-\sin^2 u})^3}$$

$$= \int \frac{3\cos u\, du}{(3\cos u)^3} \qquad (\cos^2 x + \sin^2 x = 1)$$

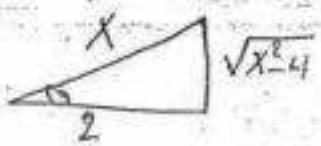
$$= \int \frac{3\cos u\, du}{3^3\cos^3 u} = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\cos^2 u}\, du = \frac{1}{9}\int \sec^2 u\, du$$

$$= \frac{1}{9}\tan u + C = \frac{x}{9\sqrt{9-x^2}} + C$$

2- $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$ $\quad 2\sec u = x$

$2\sec u \tan u\, du = dx$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{2\sec u \tan u\, du}{(2\sec u)^2 \cdot \sqrt{(2\sec^2 u)-4}}$$



مثال :- جد كل المشتقات الجزئية الممكنة

1- $w = f(x,y) = x^3 - 2x^2y + y^2 - 4$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 3x^2 - 4xy + 0 - 0 = 3x^2 - 4xy$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 0 - 2x^2 + 2y - 0 = -2x^2 + 2y$$

2- $w = \tan\left(\frac{y^2}{x}\right)$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = w_x = \sec^2\left(\frac{y^2}{x}\right) \cdot \frac{x \cdot 0 - y^2 \cdot 1}{x^2} = \sec^2\left(\frac{y^2}{x^2}\right) \cdot \frac{-y^2}{x^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = w_y = \sec^2\left(\frac{y^2}{x}\right) \cdot \frac{x \cdot 2y - y^2 \cdot 0}{x^2} = \sec^2\left(\frac{y^2}{x}\right) \cdot \frac{2y}{x}$$

3- $f(x,y) = e^x \cos y$ find f_x , f_y

$f_x = e^x \cos y$ $\quad f_y = e^x \sin y$

3- find f_x , f_y , f_z

$f(x,y,z) = x^2 z - y^2$

$f_x = 2xz - 0$, $f_y = 0 - 2y$, $f_z = x^2$

تمارين

جد المشتقات الجزئية لكل مما يأتي

1- $w = x^4 - 5x^3y^3 + y^5 - 20$

$w_x = 4x^3 - 15x^2y^3$, $w_y = -15x^3y^2 + 5y^4$

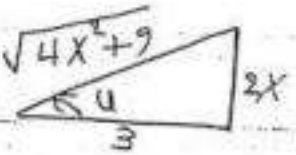
$$= \int \frac{2\sec u \tan u \, du}{4\sec^2 u \sqrt{4(\sec^2 u - 1)}} = \int \frac{\tan u \, du}{2\sec u \cdot 2\tan u}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sec u} du = \frac{1}{4}\int \cos u \, du = \frac{1}{4}\sin u + C$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} + C$$

3- $$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \int \frac{3/2 \sec^2 u \, du}{\frac{3}{2}\tan u \cdot \sqrt{9\tan^2 u + 9}}$$

$$= \int \frac{\sec^2 u \, du}{\tan u \cdot 3 \cdot \sec u}$$



$$= \int \frac{\sec u \, du}{3\tan u} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sin u} du = \frac{1}{3}\int \csc u \, du$$

$$= \frac{1}{3}\ln|\csc u - \cot u| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+9}}{2x} - \frac{3}{2x}\right| + C$$

Numerical integration التكامل المحدد

وهو نفس التكامل السابق الاختلاف يكون بأن التكامل له حدود وليس فارغ وعند أيجاد التكامل يجب ان نعوض القيمة العليا ثم القيمة السفلى من الحدود

Examples

1- $$\int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{1}{3}(3^3 - 0^3) = \frac{1}{3}\cdot 27 = 9$$

2- $\int_0^5 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^5 = \frac{2^5-2^0}{\ln 2} = \frac{32-1}{\ln 2} = \frac{31}{\ln 2}$

3- $\int_0^{10} e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int_0^{10} 2e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}\Big|_0^{10} = \frac{1}{2}(e^{20} - e^{0})$

$= \frac{1}{2}(e^{20} - 1)$

4- $\int_{10}^{\pi/4} \tan x \, dx = \ln|\cos x| \Big|_{10}^{\frac{\pi}{4}}$

$= \ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \ln|\cos 10| = \ln\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| - 1$

5- $\int_0^1 x e^x dx = x e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$

$= x e^x - e^x\Big|_0^1$

$= (1e^1 - e^1) - (0e^0 - e^0)$

$= (e^1 - e^1) - (0 - 1) = 1$

$u = x \quad du = dx$

$dv = e^x dx \quad v = e^x$

6- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cot\theta \, d\theta = \ln|\sin\theta| \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| - \ln\left|\sin\frac{-\pi}{2}\right|$

$= \ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| + \ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right|$

$= 2\ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| = 2\ln|1| = 2 \cdot 0 = 0$

أمثلة على التكاملات المكرره

1- $\int_0^{\pi}\int_0^{x} x \sin y \, dy \, dx = \int_0^{\pi}\left[\int_0^{x} x \sin y \, dy\right] dx$

$= \int_0^{\pi} (-x\cos y)\Big|_0^{x} dx = \int_0^{\pi}(-x\cos x + x)\, dx$

$= -\int_0^{\pi} x\cos x \, dx + \int_0^{\pi} x \, dx$

$u = x \quad dv = \cos x \, dx$

$du = dx \quad v = -\sin x$

$= -\left[x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x \, dx\right] + \int_0^{\pi} x \, dx$

$= -x\sin x - \cos x + \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = (-\pi\cdot 0 - (-1) + \frac{\pi^2}{2})$

$= (0 - 1 + 0) = 2 + \frac{\pi^2}{2}$ وحده مربعه

2- $\int_0^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{x+y} \, dx \, dy = \int_0^{\ln 8}\left[\int_0^{\ln y} e^{x+y} \, dx\right] dy$

$= \int_0^{\ln 8} e^{x+y}\Big|_0^{\ln y} dy = \int_0^{\ln 8}(e^{\ln y + x} - e^{y}) \, dy$

$= \int_0^{\ln 8}(y e^{y} - e^{y}) \, dy \qquad u = y \quad du = dy, \; dv = e^{y} dy, \; v = e^{y}$

$= \int_0^{\ln 8} y e^{y} dy - \int_0^{\ln 8} e^{y} dy = y e^{y}\Big|_0^{\ln 8} - \int_0^{\ln 8} e^{y} dy - \int_0^{\ln 8} e^{y} dy$

$= y e^{y}\Big|_0^{\ln 8} - 2\int_0^{\ln 8} e^{y} dy = (y e^{y} - 2e^{y})\Big]_0^{\ln 8} = (\ln 8 \, e^{\ln 8} - 2 e^{\ln 8}) -$

$(0 - 2e^{0})$

$$= 8\ln 8 - 16 + 2 = 8\ln 8 - 14$$

3- $$\int_{-1}^{1}\left[\int_{0}^{2}(1-6x^2y)\,dx\right]dy = \int_{-1}^{1}(x-2x^3y)\Big|_{0}^{2}dy = \int_{-1}^{1}(2-16y)\,dy$$

$$= 2y - 8y^2\Big|_{-1}^{1} = 2-8-(-2-8) = 2-8+2+8 = 4$$ وحده مربعه

4- $$\int_0^2\int_0^{4-y^2}\int_0^{y} dz\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^{4-y^2} z\Big|_0^{y} dx\,dy = \int_0^2\int_0^{4-y^2}(y-0)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 yx\Big|_0^{4-y^2} dy = \int_0^2 (y*(4-y^2)-0)\,dy = \int_0^2 (4y-y^3)\,dy$$

$$= 2y^2 - \frac{y^4}{4}\Big|_0^2 = 8-4 = 4$$ وحده مكعبه

5- $$\int_{-2}^{1}\int_0^{2x}\int_0^{2-x} dz\,dy\,dx = \int_{-2}^{1}\int_0^{2x} z\Big|_0^{2-x} dy\,dx = \int_{-2}^{1}\int_0^{2x}(2-x)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{1}(2y-xy)\Big|_0^{2x} dx = \int_{-2}^{1}(4x-2x^2)\,dx$$

$$= 2x^2 - \frac{2}{3}x^3\Big|_{-2}^{1} = \left(2-\frac{2}{3}\right)-\left(8-\frac{-8*2}{3}\right)$$

$$= 2-\frac{2}{3}-8+\frac{16}{3}$$

$$= -6-\frac{18}{3} = -6-6 = |-12| = 12$$ وحده مكعبه

6- $$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x}\int_{4x^2}^{5-x^2} dz\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x} z\Big|_{4x^2}^{5-x^2} dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x} (5-x^2-4x^2)\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x} (5-5x^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (5y-5x^2y)\Big|_{0}^{1-x} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (5(1-x)-5x^2(1-x))\,dx = \int_{-1}^{1} (5-5x-5x^2+5x^3)\,dx$$

$$= 5x - \frac{5x^2}{2} - \frac{5}{3}x^3 + \frac{5}{4}x^4 \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(5-\frac{5}{2}-\frac{5}{3}+\frac{5}{4}\right)-\left(-5-\frac{5}{2}+\frac{5}{3}+\frac{5}{4}\right) = ?$$ وحده مكعبه

7- $$\int_{0}^{1}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\int_{x-y}^{x+y+1} dz\,dy\,dx$$

$$\int_{0}^{1}\int_{-\frac{1}{2}}^{0} z\Big|_{x-y}^{x+y+1} dy\,dx = \int_{0}^{1}\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left[(x+y+1)-(x-y)\right] dy\,dx$$

$$= \int_{0}^{1}\int_{-\frac{1}{2}}^{0} (1+2y)\,dy\,dx = \int_{0}^{1} (y+y^2)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} dx$$

$$= \int_{0}^{1} 0-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}x\Big|_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{4}$$ وحده مكعبه

الاحداثيات القطبية

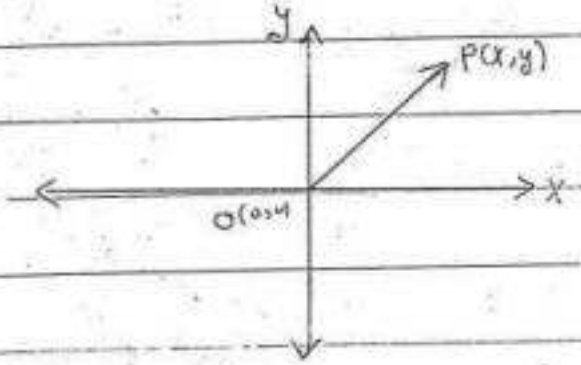
المرحلة الثانية / قسم الكيمياء / الرياضيات

(الفصل الثاني)

الاحداثيات القطبية Polar coordinates

التمثيل القطبي

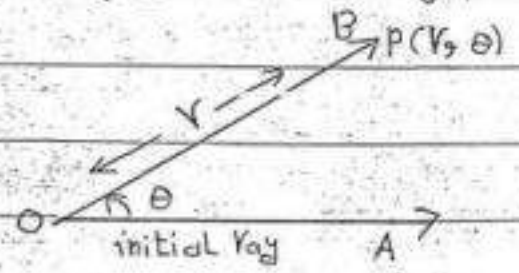
تعرفنا سابقاً على كيفية تمثيل نقطة (x,y) في المستوي الديكارتي بواسطة الاحداثيات الديكارتية (cartesian coord.). هناك طريقة أخرى لتمثيل النقطة بواسطة الاحداثيات القطبية (Polar coordinates) وتسمى بالتمثيل القطبي وتعتمد على المتغيرين (r,θ)



لتكن O هي نقطة في المستوي وتمثل نقطة الاصل وتسمى القطب (Pole). سوف نرسم شعاع أفقي من القطب الى النقطة A يسمى بالمحور القطبي أو الشعاع الابتدائي (intial ray). هذا الشعاع متجه الى اليمين وبأتجاه الموجب لمحور X لذلك فكل نقطة في المستوي سوف تتعين بالنسبة الى O والشعاع OA.

لنفرض ان B أية نقطة في المستوي تختلف عن نقطة الاصل O و r هو البعد من النقطة O الى B و θ هي الزاوية المحصورة بين المحور القطبي OA والشعاع OB وبأتجاه معاكس لحركة عقرب الساعة

لذلك فإن B يمكن تعيينه بالمتغيرين θ و r حيث أن r أكبر من الصفر $0 \le \theta \le 2\pi$ و $r > 0$



ملاحظة :-

١- يدعى نقطة الاصل في هذا النظام بالقطب ويرمز لها بـ O

٢- يدعى محور X الموجب بالمحور القطبي

٣- تمثل النقطة في المستوي بشكل زوج مرتب من الاعداد الحقيقية ويرمز له $P(r, \theta)$

θ هي زاوية بأتجاه معين من المحور القطبي

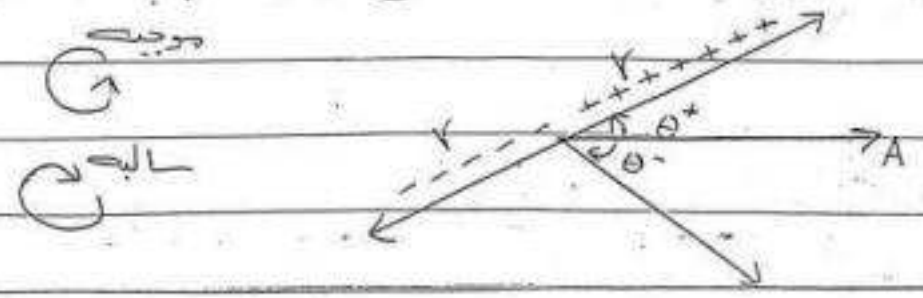
r هي بعد بأتجاه معين من نقطة الاصل الى نقطة معينة في المستوي

٤- θ موجبة اذا قيست بأتجاه معاكس لحركة عقرب الساعة

٥- θ سالبة اذا قيست بأتجاه عقرب الساعة

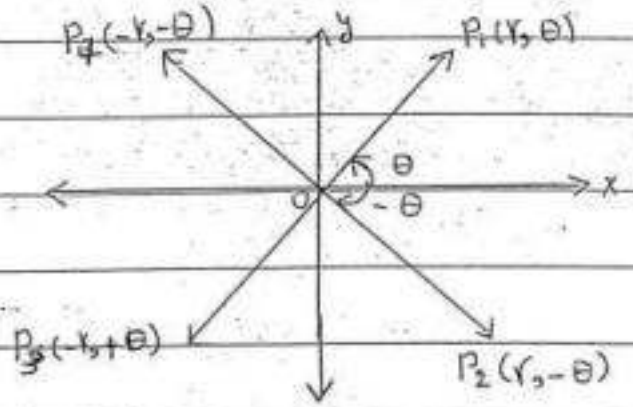
٦- r موجبة اذا قيست على ضلع الزاوية

٧- r سالبة اذا قيست على امتداد ضلع الزاوية وبأتجاه معاكس



٨- مواقع النقط في المستوي بصورة عامة تكون بالشكل

$P_1(r, \theta)$ ، $P_2(r, -\theta)$ ، $P_3(-r, \theta)$ ، $P_4(-r, -\theta)$

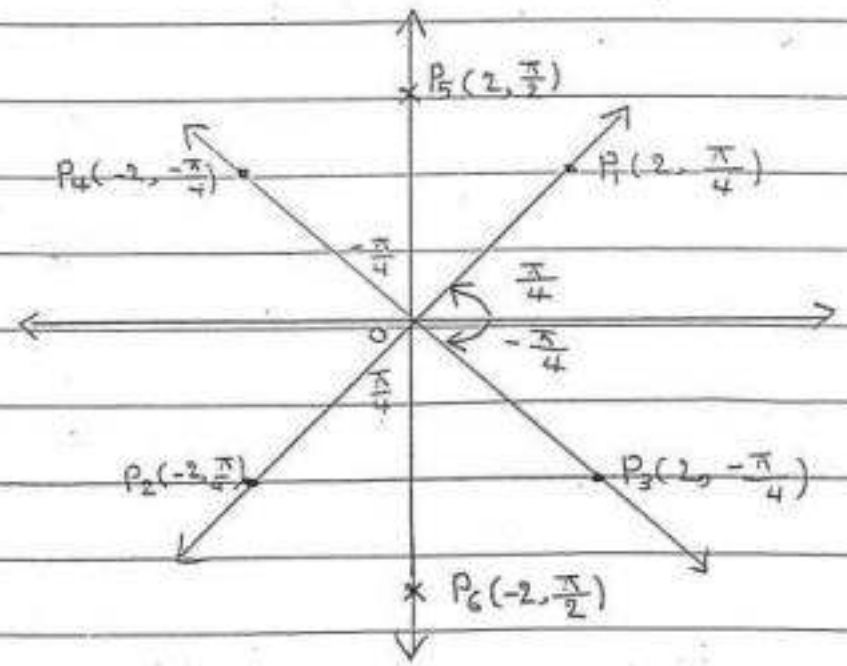


Example :- plot the following Points :

عين النقاط الآتية

$P_1(2, \frac{\pi}{4})$ ، $P_2(-2, \frac{\pi}{4})$ ، $P_3(2, -\frac{\pi}{4})$ ، $P_4(-2, -\frac{\pi}{4})$

$P_5(2, \frac{\pi}{2})$ ، $P_6(-2, \frac{\pi}{2})$



ملاحظة :-

انه كل زوج مرتب في المستوي الديكارتي يعين نقطة واحدة فقط وكل نقطة في المستوي تتعين من زوج مرتب واحد فقط ولكن في الاحداثيات القطبية كل زوج مرتب يعين نقطة واحدة في المستوي القطبي الا أن العكس غير صحيح اي أن كل نقطة في المستوي القطبي يمكن تمثيلها بعدد غير منتهي من الاحداثيات القطبية

Example :- find all Polar coordinates of the Point $(2, 30)$

جد الاحداثيات القطبية للنقطة $(2, 30)$

بإضافة دورة كاملة $(2, 30) = (2, 390)$

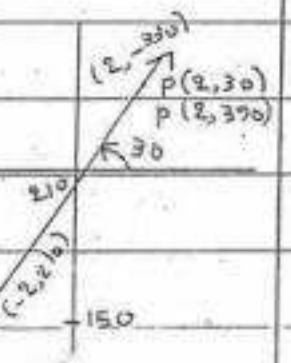
بطرح دورة كاملة $(2, 30) = (2, -330)$

الزاوية على امتداد الشعاع $(-2, 210)$

المعاكس $(30 + \pi)$

القياس السالب للزاوية على امتداد المحور المعاكس $(-2, -150)$

$(30 - \pi)$



بصورة عامة $(2, 30) = (2, 30 + 2n\pi)$ (r موجبة)

$(-2, 30) = (-2, (30 + \pi) + 2n\pi)$ (r سالبة)

$n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

أذن لإيجاد التمثيلات المختلفة لأي نقطة $P(r, \theta)$ يكون بالشكل التالي عندما r موجبة $P(r, \theta) = (r, \theta + 2n\pi)$

عندما r سالبة $P(r, \theta) = (-r, (\theta + \pi) + 2n\pi)$ $n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

ملاحظة :

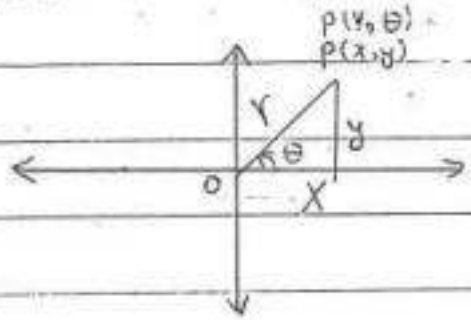
1- اذا كانت $r=0$ لأي قيمة θ فأن النقطة $(0,\theta)$ تمثل نقطة الاصل

2- اذا كانت $r=d$ بحيث ان d ثابت لكل قيم θ فأن المعادلة تمثل معادلة دائرة نصف قطرها يساوي d

3- اذا كانت $\theta = A$ بحيث A زاوية لأي قيمة لـ r فأن المعادلة تمثل معادلة مستقيم يمر من نقطة الاصل

التحويل من الاحداثيات القطبية الى الديكارتية وبالعكس

Transformation from Polar coordinates to cartesian and conversely



$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta$$
(1)

$$x^2+y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta$$
$$= r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$
$$= r^2$$
$$r^2 = x^2+y^2 \Rightarrow r = \mp\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$
(2)

2- $w = \ln \sqrt{x^2+y^2}$

$$w_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$w_y = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y$$

3- $f(x,y) = \cos x + x^2 \sin y$

$f_x = -\sin x + 2x \sin y \qquad f_y = x^2 \cos y$

4- $f(x,y,z,w) = x^2 e^{2y+3z} \cos(uw)$

$f_x = 2x e^{2y+3z} \cos(uw)$

$f_y = x^2 \cos(uw) \cdot e^{2y+3z} \cdot 2$

$f_z = x^2 \cos(uw) \cdot e^{2y+3z} \cdot 3$

$f_w = x^2 e^{2y+3z} \cdot -\sin(uw) \cdot u$

5- $f(r,\theta,z) = \dfrac{r(2-\cos 2\theta)}{r^2+z^2} = \dfrac{2r - r\cos\theta}{r^2+z^2}$

$$f_r = \frac{(r^2+z^2) \cdot (2-\cos 2\theta) - r(2-\cos 2\theta) \cdot 2r}{(r^2+z^2)^2}$$

لتحويل من التمثيل القطبي الى الديكارتي نستخدم العلاقة رقم ①

وبالعكس لتحويل من الديكارتي الى القطبي نستخدم العلاقة رقم ②

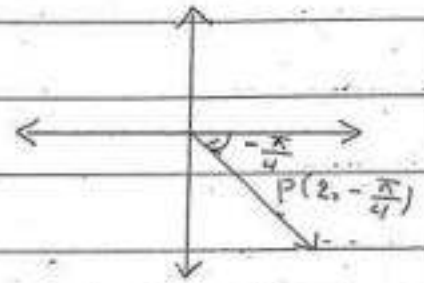
Example:- Plot the point $(2, -\frac{\pi}{4})$ and find cartesian coordinates of this point

عين النقطة ثم جد التمثيل الديكارتي

$X = r\cos\theta = 2\cos(-\frac{\pi}{4}) = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$y = r\sin\theta = 2\sin(-\frac{\pi}{4}) = -2\sin\frac{\pi}{4} = -2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

$(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$



Example:- Plot the point $(-2, -\frac{\pi}{3})$ and find cartesian coordinates of this point (واجب)

Example:- Plot the point $(1,1)$ and find polar coordinates of this point

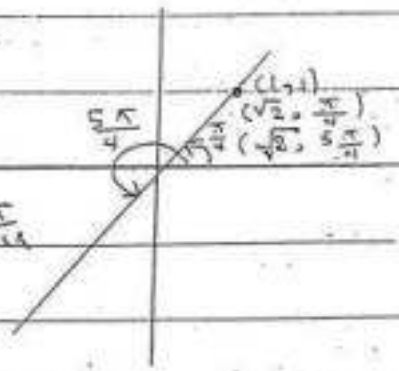
$r^2 = x^2 + y^2 = 1+1 = 2$, $r = \mp\sqrt{2}$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

$(r, \theta) = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}), (-\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$ $\pi + \frac{\pi}{4}$

لا نستطيع ان نقبل $(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ لذا

سوف نقوم بزيادة π



Example :- Trans from to polar coordinates

$(-1, -\sqrt{3})$ (واجب)

حول الى الصيغة القطبية

ملاحظة

يمكن تحويل المعادلات القطبية الى معادلات ديكارتية وبالعكس وذلك بأستخدام القوانين السابقة للتحويل

Example :- find a polar equation to the cartesian equation $x^2+y^2-4x=0$

جد المعادلة القطبية الى المعادلة الديكارتية

Soultion :- $r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 4r\cos\theta = 0$

$r^2(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}) - 4r\cos\theta = 0$

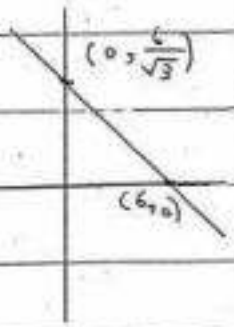
$r^2 - 4r\cos\theta = 0 \qquad r(r - 4\cos\theta) = 0$

$r = 0$ تمثل نقطة الاصل

or $r - 4\cos\theta = 0 \Rightarrow r = 4\cos\theta$

معادلة دائرة بالصيغة القطبية

Example :- find cartesian equation to the a polar equation $r\cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = 3$



$r(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{3}) = 3$

$r(\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta) = 3$

$\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 3 \Rightarrow x + \sqrt{3}y = 6$

~~Example 2:- Trans from to Polar coordinates~~

Example :- Find cartesian equation to the Polar equation $r^2 = 2\sin 2\theta$ (واجب)

$\sin 60 = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60 = \sin 30 = \frac{1}{2}$ ملاحظة

$\sin 0 = \cos 90 = 0$, $\cos 0 = \sin 90 = 1$

$\sin 45 = \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 37 = \sin 53 = 0.8$

$\sin 37 = \cos 53 = 0.6$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

عكس

$\cos(A \mp B) = \cos A \cos B \pm \sin A \sin B)$

نفسها

$\sin(A \mp B) = \sin A \cos B \mp \cos A \sin B)$

$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$, $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta$ مجموعة تمارين

$2\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta) \Rightarrow (2\cos^2\theta - 1) = \cos 2\theta$

Q:- Find all Polar coordinates of each point

أوجد كل الاحداثيات القطبية

a- $(3, \frac{\pi}{4})$, b- $(-3, \frac{\pi}{4})$, c- $(3, -\frac{\pi}{4})$, d- $(-3, -\frac{\pi}{4})$

Soultion :- a- $(3, \frac{\pi}{4})$

a- $(3, \frac{\pi}{4}) = (3, \frac{\pi}{4} + 2n\pi)$

$n = 0 \Rightarrow (3, \frac{\pi}{4} + 0) = (3, \frac{\pi}{4})$

$n = -1 \Rightarrow (3, \frac{\pi}{4} - 2\pi) = (3, \frac{-7\pi}{4}) = (3, -315)$

عندما r سالبة

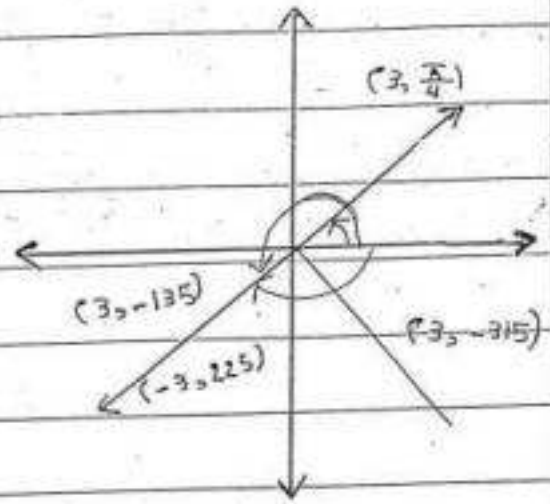
b- $(-3, \frac{\pi}{4}) = (-3, (\frac{\pi}{4}+\pi) + 2n\pi)$

$n=0 \Rightarrow (-3, \frac{5\pi}{4}+0) = (-3, 225)$

$n=-1 \Rightarrow (-3, \frac{\pi}{4}+\pi) - 2\pi$

$= (-3, \frac{5\pi}{4} - 2\pi) = (-3, \frac{-3\pi}{4})$

$= (-3, -135)$



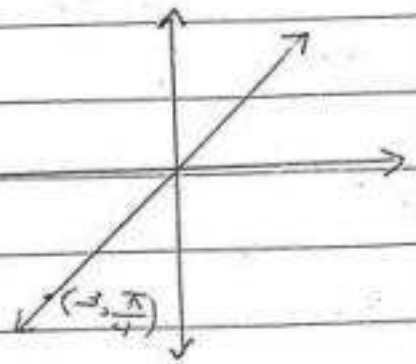
b- $(-3, \frac{\pi}{4})$ عندما r موجبة

$(-3, \frac{\pi}{4} + 2n\pi)$

$n=0 \Rightarrow (+3, \frac{\pi}{4}+0) = (+3, \frac{\pi}{4})$

$n=-1 \Rightarrow (+3, \frac{\pi}{4} - 2\pi) = (+3, \frac{-7\pi}{4})$

$= (+3, 315)$



$(-(3, \frac{-\pi}{4})$

$(3, \frac{-\pi}{4} + 2n\pi)$ عندما r موجبة

$n=0 \Rightarrow (3, \frac{-\pi}{4})$

$n=+1 \Rightarrow (3, \frac{-\pi}{4} + 2\pi) \Rightarrow (3, \frac{7\pi}{4})$

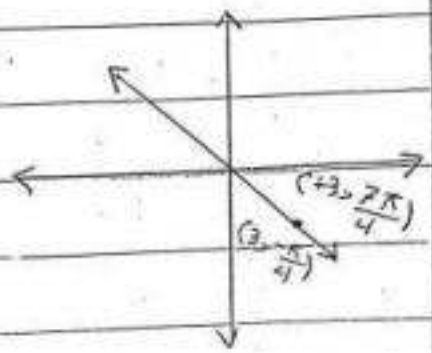
عندما r سالبة

d- $(-3, (\frac{-\pi}{4}+\pi) + 2n\pi)$

$n=0 \Rightarrow (-3, \frac{3\pi}{4})$

$n=-1 \Rightarrow (-3, \frac{-\pi}{4}+\pi-2\pi)$

$= (-3, \frac{-1+4-8\pi}{4}) = (-3, \frac{-5\pi}{4})$



Q2:- Graph the following

1- $r = a$ 2- $r < 2$ 3- $r > 2$ 4- $1 < r < 2$

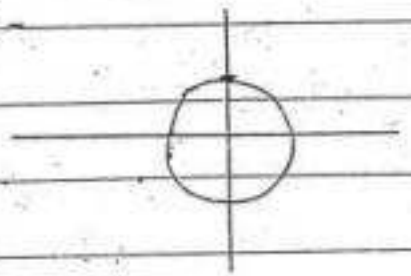
5- $0^\circ \le \theta \le 30^\circ$, $r \ge 0$

6- $\theta = 120^\circ$, $r \le -2$ 7- $\theta = 60$, $-1 \le r \le 3$

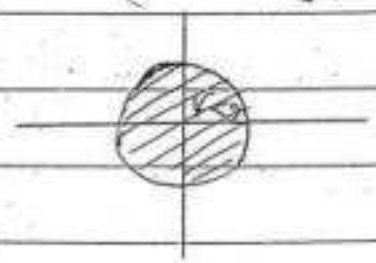
8- $\theta = \frac{3\pi}{4}$, $r \ge -1$

ملاحظة بالحالات الاربعة الاولى مادام لم يعطي قيم لـ θ فقط قيم لـ r اي اذن القيم لـ r هي لكل قيم θ المحصورة بين $(0, 2\pi)$.

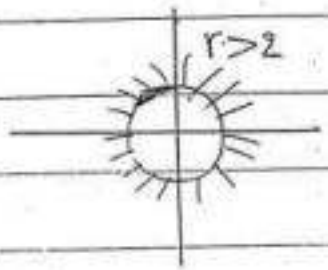
1-



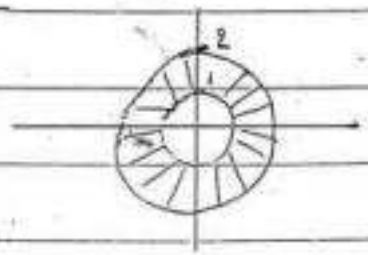
2-



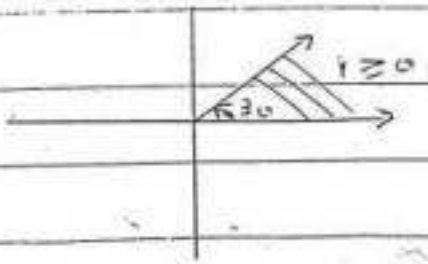
3-



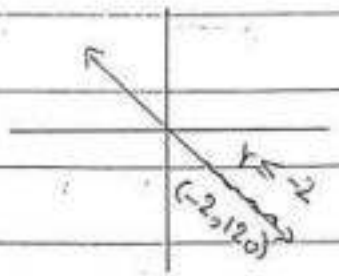
4-



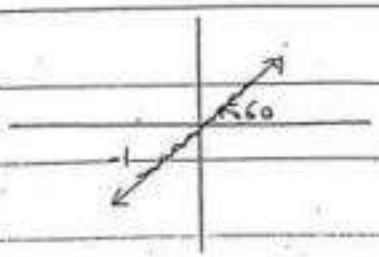
5-



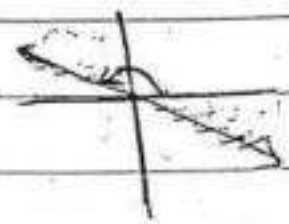
6-



7-



8-



المصفوفات والعمليات على المصفوفات
(matrices) (الفصل الثالث)

تعريف :- المرحلة الثانية/قسم الكيمياء/رياضيات

المصفوفة ترتيب مستطيل الشكل من اعداد حقيقية او معقدة وتسمى هذه الاعداد بعناصر المصفوفة وتكون مرتبة بشكل صفوف وأعمدة ونرمز للمصفوفة بالقوسين [ ] أو ( ) . فلو رجعنا الى معلوماتنا الى منظومة المعادلات سوف نلاحظ بالامكان كتابة منظومة المعادلات بشكل مصفوفة كالاتي $AX = B$ حيث A هي مصفوفة المعاملات وتكتب بالشكل

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

:

المصفوفات الخاصة :-

1- اذا كانت جميع عناصر المصفوفة أصفار تسمى المصفوفة الصفرية $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2- المصفوفة B ، $B = b_{ij}$ بحيث $m \times n$ تسمى مصفوفة مربعة اذا كانت $m = n$ حيث m هو عدد الصفوف و n هو عدد الاعمدة .

بحيث المصفوفة : هي عدد الصفوف والاعمدة ونرمز لها بالرمز $m \times n$

٣- المصفوفة $1 \times n$ تسمى مصفوفة سطر $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix}$

٤- المصفوفة $m \times 1$ تسمى مصفوفة عمود $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{bmatrix}$

٥- المصفوفة المربعة $A = a_{ij}$ / A تسمى مصفوفة مثلثة سفلى اذا كانت العناصر فوق القطر الرئيسي أصفار.

مصفوفة مثلثة سفلى:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

وتسمى مصفوفة مثلثة عليا اذا كانت العناصر تحت القطر الرئيسي للمصفوفة أصفار.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

٦- تسمى المصفوفة المربعة التي تكون فيها العناصر المتناظرة مع القطر الرئيسي متساوية مصفوفة متناظرة (قطرية)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

٧- يقال للمصفوفة القطرية $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ التي تكون قيمة كل عنصر من عناصر قطرها مساوية للواحد بأنها المصفوفة المحايدة من الرتبة n و تعامل معاملة الواحد. (n دليل رتبة المصفوفة)

/- منقول المصفوفة: وهي المصفوفة الناتجة من تبديل الصفوف / الاعمدة. فاذا كانت لدينا المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ فان منقولها سيكون المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ونرمز لمنقول المصفوفة بالرمز A^T

ملاحظة/ منقول المصفوفة المتناظرة يساويها

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&0&5\\3&5&4\end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&0&5\\3&5&4\end{bmatrix}$$

٩- يقال للمصفوفة المربعة $A=[a_{ij}]$ التي تكون فيها جميع العناصر الواقعة على القطر الرئيسي تساوي اي ان $a_{ij}=c$ لكل $i=j$ وان $a_{ij}=0$ لكل $i\neq j$ بأنها مصفوفة عددية. $A=\begin{bmatrix}-2&0\\0&-2\end{bmatrix}$ و $I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

العمليات على المصفوفات:

١- جمع المصفوفات:

اذا كانت كل من $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ مصفوفة من النمط $m\times n$ فان حاصل جمع A و B هو المصفوفة $C=[c_{ij}]$ المعرفة بالصيغة

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \qquad (1\le i\le m \text{ و } 1\le j\le n)$$

اي أننا حصلنا على C بواسطة جمع العناصر المتناظرة في A و B

مثال:- لتكن $A=\begin{bmatrix}1&-2&4\\2&-1&3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0&2&-4\\1&3&1\end{bmatrix}$

فان $A+B=\begin{bmatrix}1+0&-2+2&4-4\\2+1&-1+3&3+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&2&4\end{bmatrix}$

نبرهن (خواص الجمع المصفوفي)

أ- $A+B=B+A$

ب- $A+(B+C)=(A+B)+C$

ج- توجد مصفوفة وحيدة من النمط $m\times n$ نرمز لها بالرمز O بحيث أن

$A+O=A$

لكل مصفوفة A من النمط $m\times n$ يقال للمصفوفة O بالمصفوفة الصفرية من النمط $m\times n$

د- لكل مصفوفة A من النمط $m\times n$ ∴ مصفوفة وحيدة D من النوع $m\times n$ بحيث أن $A+D=O$

سنكتب D بالشكل $-A$ ∴ $A+(-A)=O$

يقال للمصفوفة $-A$ بأنها سالبة A

٢- الضرب العددي

اذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة من النمط $m\times n$ وكان r عدداً حقيقياً فأن المضاعف العددي للمصفوفة A في r، rA هو المصفوفة $B=[b_{ij}]$ من النمط $m\times n$، حيث أن $(1\le i\le m, 1\le j\le n)$ و $b_{ij}=ra_{ij}$

اي أننا حصلنا على B بواسطة ضرب كل عنصر من عناصر A في r

مثال: اذا كانت $r=-3$ وكانت $A=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

فأن $rA=\begin{bmatrix} -12 & 6 & -9 \\ -6 & 15 & 0 \\ -9 & -18 & -6 \end{bmatrix}$

مبرهنة (خواص الضرب العددي)

ليكن كل من r و s عدداً حقيقياً ولتكن كل من A و B مصفوفة، فأن

$r=1$, $s=2$; $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

$r(sA)=1\cdot\left(2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right)=1\cdot\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

$(rs)A=(1\cdot 2)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

أ- $r(sA)=(rs)A$

ب- $(r+s)A=rA+sA$

جـ- $r(A+B)=rA+rB$

د- $A(rB)=r(AB)=(rA)B$

٢- ضرب المصفوفات

اذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة من الصنف $m\times p$ و $B=[b_{ij}]$ مصفوفة من الصنف $p\times n$ فأن جداء المصفوفة A والمصفوفة B هو المصفوفة $C=[c_{ij}]$ من الصنف $m\times n$ والمعرفة بالصيغة

$c_{ij}=a_{i1}b_{1i}+a_{i2}b_{2i}+\dots+a_{ip}b_{pi}$

حيث ان $(1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$

(يجب ان تتحقق القاعدة التالية

عدد أعمدة الاولى = عدد صفوف الثانية)

مثلاً:

$[\ ]_{1\times 2}\ [\ ]_{2\times 3}=[\ ]_{1\times 3}$

[illegible]

$$f_\theta = \frac{-r}{r^2+z^2} \cdot -\sin 2\theta \cdot 2 = \frac{2r\sin 2\theta}{r^2+z^2}$$

$$f_z = \frac{(r^2+z^2)\cdot 0 - r(2-\cos 2\theta)\cdot 2z}{(r^2+z^2)^2} = \frac{-2zr(2-\cos 2\theta)}{(r^2+z^2)^2}$$

6- $f(x, y, u, v) = \dfrac{x^2+y^2}{u^2+v^2}$

$$f_x = \frac{2x}{u^2+v^2} \quad , \quad f_y = \frac{2y}{u^2+v^2}$$

$$f_u = \frac{(u^2+v^2)\cdot 0 - (x^2+y^2)\cdot 2u}{(u^2+v^2)^2} = \frac{-2u(x^2+y^2)}{(u^2+v^2)^2}$$

$$f_v = \frac{(u^2+v^2)\cdot 0 - (x^2+y^2)\cdot 2v}{(u^2+v^2)^2} = \frac{-2v(x^2+y^2)}{(u^2+v^2)^2}$$

التكاملات المضاعفة Multiple Integrals

بما أن التكامل هو عملية عكس المشتقة فأن التكاملات المكرره هي عمليات عكس المشتقات الجزئيه

التكامل المكرر مرتين double Integrals

لتكن f ، $f: D \to E$ داله بحيث $w = f(x,y)$ ولها مشتقات جزئيه f_x ، f_y فأن تكامل هذه الداله هو تكامل مكرر مرتين ويكتب بالشكل

$\iint f(x,y)\, dy\, dx$ أو $\iint f(x,y)\, dx\, dy$

أما أذا كانت داله بالنسبه الى ثلاثه متغيرات أي أن $w = f(x,y,z)$

مثال :-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} , \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$AB = \begin{bmatrix} (1)(-2)+(2)(4)+(-1)(2) & (1)(5)+(2)(-3)+(-1)(1) \\ (3)(-2)+(1)(4)+(4)(2) & (3)(5)+(1)(-3)+(4)(1) \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

مبرهنة (خواص الضرب المصفوفي)

أ- اذا كانت A و B و C مصفوفات اصنافها مناسبة فأن

$$A(BC) = (AB)C$$

ب- اذا كانت A ، B و C مصفوفات اصنافها مناسبة فأن

$$(A+B)C = AC + BC$$

جـ- اذا كانت A ، B و C مصفوفات اصنافها مناسبة فأن

$$A(B+C) = AB + AC$$

مبرهنة (خواص منقول المصفوفة)

لتكن كل من A و B مصفوفة ولتكن r عدداً حقيقياً فأن

أ- $(A^T)^T = A$ جـ- $(AB)^T = B^T A^T$

ب- $(A+B)^T = A^T + B^T$ د- $(rA)^T = rA^T$

المحددات :- Determinants

تعريف :- لتكن $A=[a_{ij}]$ مصفوفة من المرتبة $n\times n$ يعرف محدد A $(|A|)$ بأنه

$$|A|=\sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

حيث يؤخذ المجموع على جميع التباديل $j_1j_2\cdots j_n$ للمجموعة $S=\{1,2,\dots,n\}$ وتأخذ الاشارة + او - تبعاً لكون التبديل $j_1j_2\cdots j_n$ زوجياً او فردياً في كل حد $(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ من حدود $|A|$. تكون رموز الصف في تسلسلها الطبيعي ، بينما تكون رموز العمود في الترتيب $j_1j_2\cdots j_n$ وطالما ان توجد هناك حدود مكررة ، وعليه فأن كل حد من $|A|$ موجداً n من عناصر A مع الاشارة المناسبة ، آخذين عنصراً واحداً فقط من كل صف وعنصراً واحداً فقط من كل عمود ، وبما أن الجمع مأخوذ على التباديل كافة للمجموعة $S=\{1,2,\dots,n\}$ فأن عدد حدود $|A|$ يساوي $n!$

مثال :- اذا كانت $A=[a_{11}]$ مصفوفة من المرتبة 1×1 فأن المجموعة S_1 لها تبديل واحد فقط هو التبديل المحايد 1 ، والذي يكون زوجياً وعليه فأن $|A|=a_{11}$

مثال :- اذا كانت $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ مصفوفة من المرتبة 2×2

$$\therefore |A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

مثال: اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$|A| = (2)(5) - (-3)(4) = 22$

مثال: اذا كانت $A = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$

لغرض حساب $|A|$ توجد طريقتان

1- طريقة الاقطار: في هذه الطريقة نضيف العمودين الاول والثاني الى اليمين من المصفوفة ثم نصل الاقطار من أعلى اليسار الى أسفل اليمين بأشارة موجبة ومن أعلى اليمين الى أسفل اليسار بأشارة سالبة ثم نجمع حواصل الضرب

مثال: أحسب محدد المصفوفة $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -3 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$|A| = (-3)(1)(3) + (-1)(0)(1) + (2)(-2)(2) - (2)(1)(1) - (-3)(0)(2) - (-1)(-2)(3)$

$= -9 - 8 - 2 - 6 = -25$

ب- طريقة التباديل: تتضمن الآتي

١- توزع الاشارات بالتتابع على عناصر الصف الاول في المصفوفة

٢- نأخذ العنصر مع أشارته ونهمل الصف والعمود الذي يحتويه

٣- نسجل ما تبقى من المصفوفة في كل مرة مضروباً بالعنصر الذي أخذناه بحيث يكون الجزء النهائي من المصفوفة هو مصفوفة من السعة 2X2 والتي نحسب قيمة محددها بطرح حاصل ضرب القطر الايمن من حاصل ضرب القطر الايسر

ملاحظة: يكون المحدد وحيد للمصفوفة

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$|A| = (3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (2) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (3) \cdot (3) - (-1)(-6) + (2)(-5)$$

$$= 9 - 6 - 10 = -7$$

خواص المحددات:

١- اذا كانت A اي مصفوفة مربعة تحتوي على صف أو عمود عناصره أصفار فأن $det(A) = 0$

٢- اذا كانت A مصفوفة مثلثة عليا أو سفلى فأن $det(A)$ هو حاصل

ضرب عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة

٣- اذا كانت B مصفوفة ناتجة من ضرب المصفوفة A بعدد وليكن k فأن $\det(B) = k \det(A)$

٤- اذا كانت B مصفوفة ناتجة من أبدال صفوف المصفوفة A فأن $\det(B) = -\det(A)$

٥- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

٦- $|A + B| \neq |A| + |B|$

معكوس المصفوفة :-

لتكن A مصفوفة مربعة . يقال لـ A بأنها قابلة للانعكاس اذا وجدت مصفوفة أخرى B بحيث أن $A \cdot B = I_n$ اي أن حاصل ضرب المصفوفة A مع المصفوفة B يعطي مصفوفة محايدة وتسمى المصفوفة B معكوس A ونرمز للمعكوس بـ A^{-1}

مثال :- $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

مثال :- اذا كانت لدينا $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ جد A^{-1}

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}$

$\det(A) = (2 \times 3) - (-5)(-1) = 6 - 5 = 1 \neq 0$, adj

$B_{11} = |3| = 3$, $B_{12} = -|-1| = 1$

$B_{21} = -|-5| = 5$, $B_{22} = |2| = 2$

$\therefore B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $B^t = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

سوف نأخذ طريقة المصفوفة المتممة

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{addj}(A)$$

وخطوات هذه الطريقة هو الاتي

١- ايجاد محدد المصفوفة فأذا كان المحدد اوي صفر فليس للمصفوفة معكوس عدا ذلك ننتقل الى الخطوة الثانية

٢- نقوم بتوزيع الاشارة على جميع عناصر المصفوفة

~~٣- نأخذ الصف الاول للمصفوفة المتممة بعد اهمال~~

٣- نأخذ الاشارة دون العنصر لتكوين المحددات الجزئية فسنحصل على عناصر الصف الاول للمصفوفة المتممة بعد اهمال الصف والعمود وهكذا لبقية الصفوف

٤- بعد تكوين المصفوفة المتممة نأخذ منقوطا والذي سنرمز له $C^T = \operatorname{addj}(A)$

ثم نطبق القاعدة $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{addj}(A)$

Example:- Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, Find A^{-1}

$$|A| = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & + & + & - & - & - \end{matrix} \\ \left|\begin{matrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 4 & 3 \end{matrix} \end{array} \qquad A = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= (1)(0)(1) + (2)(-1)(4) + (-3)(-2)(3) - (-3)(0)(4) -$$

$$(1)(-1)(3) - (2)(-2)(1) = -8 + 18 + 3 + 4 = 17$$

المحدد يساوي صفر اذن لها معكوس

$$C_{11} = +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad , \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{13} = +\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -6 \quad , \quad C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

$$C_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad , \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = +5$$

$$C_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad , \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = +7$$

$$C_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \\ -11 & -11 & 5 \\ -2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 3 & -11 & -2 \\ 2 & -11 & 7 \\ -6 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \text{adj}(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A)$$

$$= \frac{1}{17} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -11 & -2 \\ 2 & -11 & 7 \\ -6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{17} & \frac{-11}{17} & \frac{-2}{17} \\ \frac{2}{17} & \frac{-11}{17} & \frac{7}{17} \\ \frac{-6}{17} & \frac{5}{17} & \frac{4}{17} \end{bmatrix}$$

problems

Q1: If $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ prove that $A + A + A = 3A$

Q2: If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times4}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}_{3\times4}$

Find $A+B$, $A-B$, $4B-2A$, $4A$

Q3: If $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

Show that $(A+B)^2 = A^2 + B^2$

Q4: Let $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Find 1- adj (A) 2- $|A|$

3- prove $A \cdot \text{adj}(A) = |A| \cdot I_n$

Q5: Find A^{-1}, B^{-1} $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Q6: Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Find $(A \cdot B) \cdot C$ (واجب)

(14 حل تمارين المصفوفات

Q_1:- If $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ prove that $A + A + A = 3A$

$$(A+A)+A = \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Q_2:- If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 4}$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

Find $A+B$, $A-B$, $4B-2A$, $4 \cdot A$

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2)(2)+(0)(6) & (2)(0)+(0)(-2) \\ (6)(2)+(-2)(6) & (6)(0)+(-2)(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & +4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1)(1)+(-1)(2) & (1)(-1)+(-1)(-1) \\ (2)(1)+(-1)(2) & (2)(-1)+(-1)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(1)+(1)(4) & (1)(1)+(1)(-1) \\ (4)(1)+(-1)(4) & (4)(1)+(-1)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = (A+B)^2$$

ولها مشتقات جزئية f_x ، f_y ، f_z فأن التكامل المكرر ثلاث مرات يكتب بالشكل $\iiint f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$ أو $\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

أو $\iiint f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$

وهكذا التكامل المكرر n من المرات $\iiint \cdots \int f(x,y,z,\ldots,v)\,dx\,dy\,dz \cdots dV$

طريقة التكاملات المكرره

نستخدم كل طرق وخواص التكامل السابقة وعندما نكامل بالنسبة للمتغير معين سنعامل بقية المتغيرات كثوابت وكما يلي

$$\int \underbrace{\left[\int f(x,y)\,dx\right]}_{①}\,dy = \int g(x,y)\,dy = h(x,y) + C$$

1- نكامل بالنسبة الى x ونعامل y والبقية ثوابت

2- نكامل بالنسبة الى y الداله الناتجه من التكامل الاول ونعامل x والبقية ثوابت وتنتج داله جديده

Integration التكامل

توجد تكاملات مباشره وسهله ومنها (حفظا)

1-) $\int k\,dx = kx + C$ k constant ثابت

2-) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$

3-) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4-) $\int e^x dx = e^x + C$

المعادلات الوسيطية
(الفصل الخامس)

أن الصيغة العامة للمعادلة المنحني هي $F(x,y)=0$ أو $y=F(x)$ أو $x=g(y)$ وهذه المعادلات هي معادلات تبين مسار جسم معين للمستوي الثنائي (x,y) حيث كل من x,y هي صفات يعتمد عليها الجسم خلال الحركة ولكن في أحيان أخرى لا نظهر المعادلة بهذه الصيغة أنما نظهر معتمدة على متغير جديد مثل $y=h(x)$ ، $x=g(t)$ حيث ان (t) هو متغير وسيط يربط (x) مع (y) يمكن الاستغناء عنه والعوده الى المعادلة الاصلية.

مثال :- جسم يتحرك على المنحني $y=t^2-2t+3$ ، $x=t-1$. جد المعادلة الكارتيزية التي تمثل حركة هذا الجسم ثم أرسم مساره وحدد الموقع عند الانطلاق

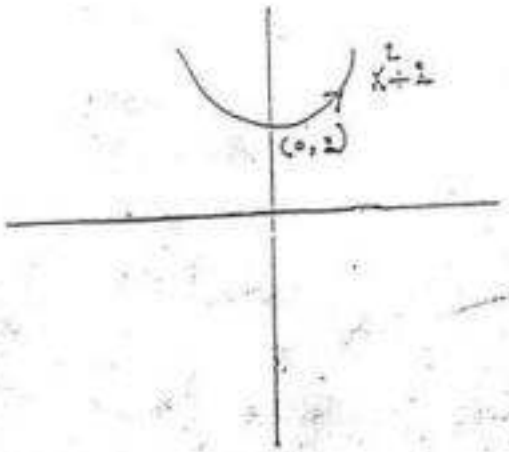
$$x=t-1 \Rightarrow t=x+1$$

$$y=t^2-2t+3=(x+1)^2-2(x+1)+3=x^2+2x+1-2x-2+3$$

$$y=x^2+2$$

$t=0 \qquad x=t-1=0-1=-1$

$y=t^2-2t+3=3 \Rightarrow (-1,3)$



مثال :- جد معادلة المنحني $X = a\cos\theta$ ، $y = b\sin\theta$ ، $a > b$

$a, b > 0$ ، θ هي الوسيط

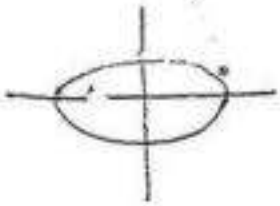
الحل :-

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

معادلة قطع ناقص

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

الرسم على محور (X) لأن $a > b$



مثال :- جد معادلة المنحني $X = a\tan\theta$ ، $y = b\sec\theta$ ، $a, b > 0$

و θ هي الوسيط

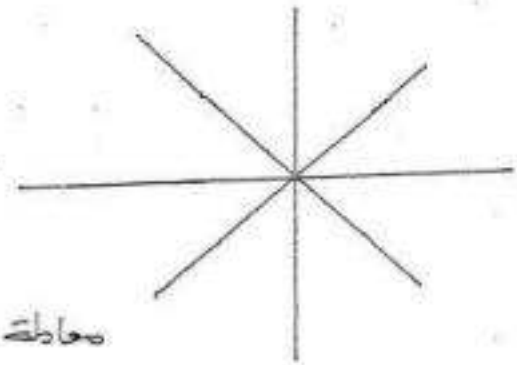
الحل :-

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{X}{a}\right)^2 = 1$$



$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{X^2}{a^2} = 1$$ معادلة قطع زائد

مثال :- جد معادلة الوسيط للقطع المكافئ $y^2 = 4PX$ اذا علمت أن المتغير للوسيط $t = \frac{dy}{dX}$

$$y^2 = 4PX$$

$$\cancel{2y\,dy = 4P\,dX} \Rightarrow 2y\frac{dy}{dX} = 4P\frac{dX}{dX} \Rightarrow 2yt = 4P$$

$$y = \frac{4P}{2t} \Rightarrow y = \frac{2P}{t} \Rightarrow \frac{4P^2}{t^2} = 4PX \Rightarrow X = \frac{P}{t^2}$$

$$\therefore y = 4PX$$

مثال جد معادلة المنحني $X = a\cos\theta$ ، $y = a\sin\theta$ حيث

$a > 0$ و θ هي الوسيط

$$\cos\theta = \frac{X}{a} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{a}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow X^2 + y^2 = a^2$$

معادلة دائرة مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها a

الاشتقاق Differentiation (حفظ)

نلاحظ ان نوع هذا الاشتقاق هو الاشتقاق الاعتيادي الذي فيه متغير مستقل واحد ومتغير واحد معتمد واحد فقط وعليه فأن

1- $f(x) = C \Rightarrow \frac{df}{dx} = f'(x) = 0$ (C ثابت)

2- $f(x) = X \Rightarrow f'(x) = 1$

3- $f(x) = X^2 \Rightarrow f'(x) = 2X$

4- $f(x) = X^n \Rightarrow f'(x) = nX^{n-1}$

5- $f(x) = d_n X^n + d_{n-1} X^{n-1} + \cdots + d_2 X^2 + d_1 X + d_0$

$$f'(x) = d_n \cdot nX^{n-1} + d_n (n-1) X^{n-2} + \cdots + d_2 \cdot 2 \cdot X + d_1 \cdot 1$$

6- $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

7- $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$

8- $[f(x)\cdot g(x)] = f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)$

مشتقه حاصل ضرب دالتين = الاولى × مشتقه الثانيه + الثانيه × مشتقه الاولى

9- $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

مشتقه قسمه دالتين = [المقام × مشتقه البسط - البسط × مشتقه المقام] / المقام تربيع

10- $\left[\frac{1}{g(x)}\right]' = \frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$

11- $f(x) = (P(x))^n \Rightarrow f'(x) = n(P(x))^{n-1}\cdot P'(x)$

مشتقه قوس مرفوع لقوه معينه = الاس × القوس مرفوع للاس

ناقص واحد × مشتقه داخل القوس

أمثلة

1- $f(x) = 1 - x \Rightarrow f'(x) = 0 - 1 = -1$

2- $f(x) = 3(1+x) \Rightarrow f'(x) = 0 + 3 = 3$

3- $f(x) = 11x^5 - 6x^3 + 8 \Rightarrow f'(x) = 55x^4 - 30x^2$

4- $f(x) = \frac{3}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-6x}{x^4} = \frac{-6}{x^3}$

5- $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x$

$f'(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

6- $f(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^4} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x^3}$

7- $f(x) = \frac{(x^2+2)}{x^5} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^5\cdot(2x) - (x^2+2)(5x^4)}{(x^5)^2}$

$f(x) = (x^3-1)\cdot(x-2)$

$f'(x) = (x^3-1)\cdot 1 + (x-2)\cdot 3x^2 = x^3-1+3x^3-6x^2$

$= 4x^3-6x^2-1$

- $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$

- $f(x) = \sqrt{2x^2-4} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(2x^2-4)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4x$

- $f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$

12 - $f(x) = 7x^3 - x \Rightarrow f'(x) = 21x^2 - 1$

13 - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\cdot 1 = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

14 - $f(x) = x^3 + \sqrt{2x} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2 = 3x^2 + (2x)^{-\frac{1}{2}}$

15 - $f(x) = (2x^7 - 6x^2)\cdot(x + \frac{3}{x})$

$f'(x) = (2x^7-6x^2)\cdot(1+\frac{3}{x^2}) + (x+\frac{3}{x})\cdot(14x^6-12x)$

16 - $f(x) = (1+\frac{3}{x})(1+\frac{1}{x^2})$

$f'(x) = (1+\frac{3}{x})\cdot(0+\frac{2x}{x^4}) + (1+\frac{1}{x^2})(0+\frac{3}{x^2})$

(17) $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$

$f(x) = [(x+1)(x+2)] \cdot (x+3)$

$f'(x) = [(x+1)(x+2)] \cdot 1 + (x+3)[(x+1) \cdot 1 + (x+2) \cdot 1]$

or $f(x) = (x^2+3x+2)(x+3)$

$f'(x) = (x^2+3x+2) \cdot 1 + (x+3) \cdot (2x+3)$

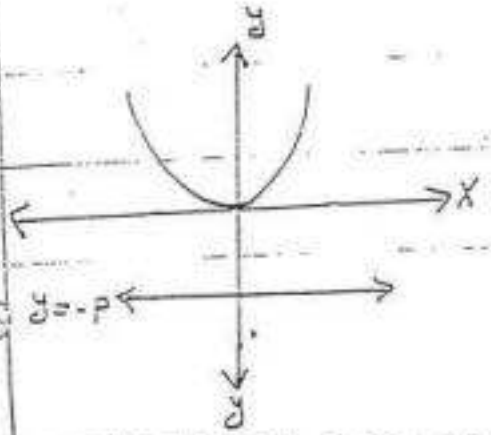
Translations القطوع

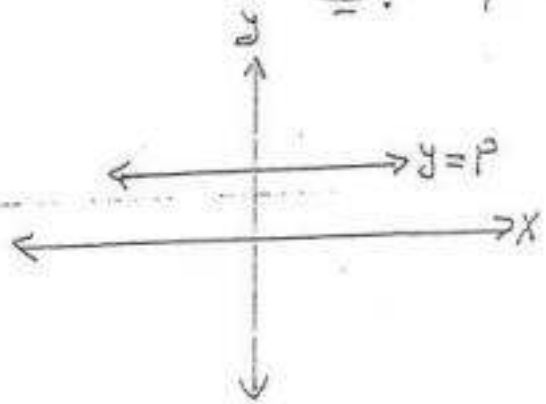
(حفظ الحالات والقوانين الأساسية لكل قطع)

(1) The Parabola القطع المكافئ

وهو القطع الذي معادلته هي $y^2 = 4px$ أو $x^2 = 4py$

ويرسم كما يلي





$x^2 = -4py$

البؤره $(0, -p)$

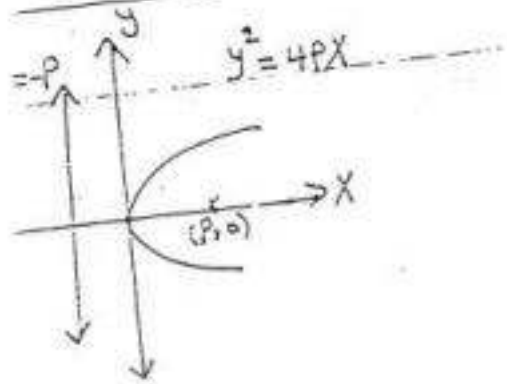
الدليل $y = p$

$x^2 = 4py$

البؤره $(0, p)$

الدليل $y = -p$

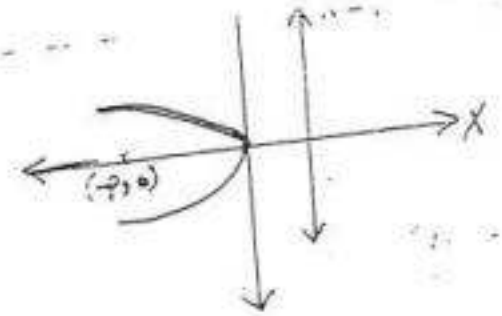
$y^2 = 4PX$



البؤره $(P,0)$ ،

الدليل $X=-P$

$y^2=-4PX$



البؤره $(-P,0)$

الدليل $X=P$

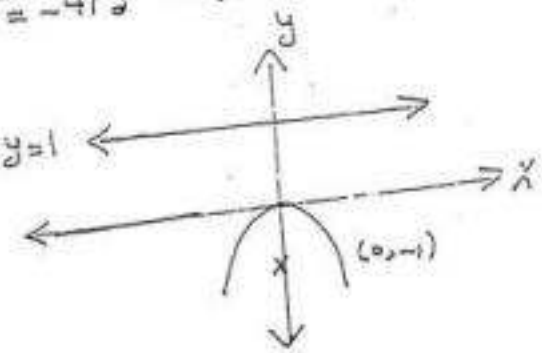
مثال :- أرسم القطع المكافئ

1- $X^2=-4y$

من المقارنه $X^2=-4Py$ فأن $P=1$

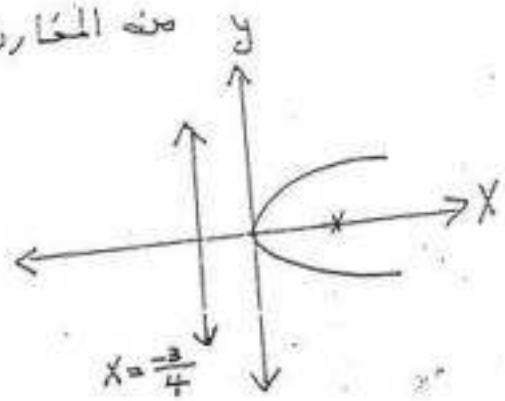
البؤره $(0,-1)$

الدليل $y=1$



2- $y^2=3X$

من المقارنه مع $y^2=4PX$ فأن $P=\frac{3}{4}$ وعليه



② The ellipse القطع الناقص

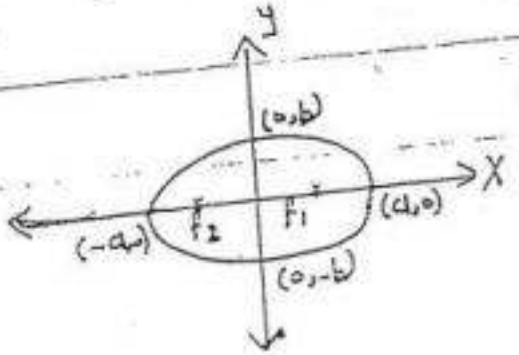
معادلته أما $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ أو $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}$

$a>b$

$a<b$

يثبت ان 2a طول المحور الكبير ، 2b طول المحور الصغير

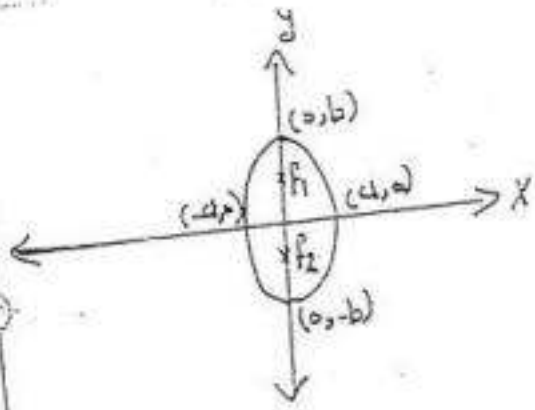
$c^2 = a^2 - b^2$



البؤره الاولى $f_1 = (c,0)$

البؤره الثانيه $f_2 = (-c,0)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



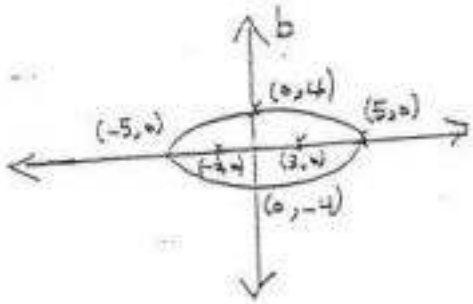
$f_1 = (0,c)$ ، $f_2 = (0,-c)$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

مثال :- أرسم القطع الناقص

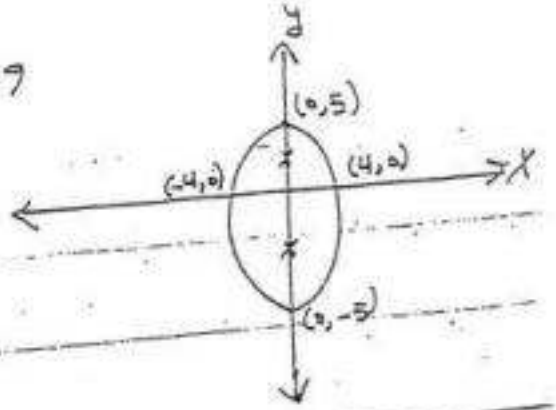
1- $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ $\quad a^2 = 25$ ، $b^2 = 16$ $\quad \boxed{b = 4}$

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$ $\quad \therefore c = 3$



2- $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ $\quad a^2 = 25$ ، $b^2 = 16$

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$

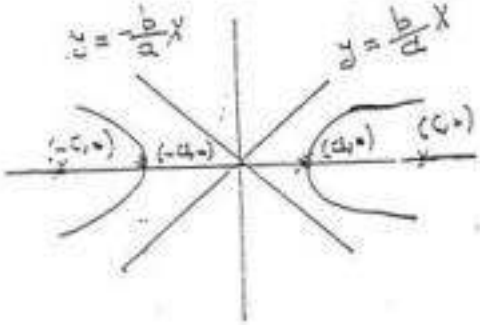


③ The hyperbola — القطع الزائد

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{or} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

تكون البؤره له $c^2 = a^2 + b^2$ ومنه نحصل على

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

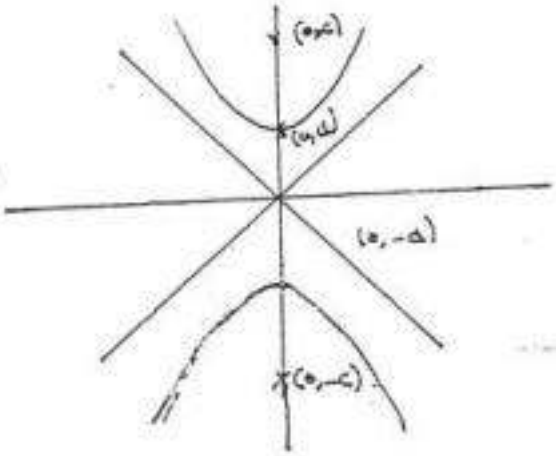


البؤره $f_1(c,0)$, $f_2(-c,0)$

الدليل $y = \mp \frac{b}{a}x$

الرأس $V_1(a,0)$, $V_2(-a,0)$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



البؤره $f_1(0,c)$, $f_2(0,-c)$

الدليل $x = \mp \frac{b}{a}y$

الرأس $V_1(0,a)$, $V_2(0,-a)$

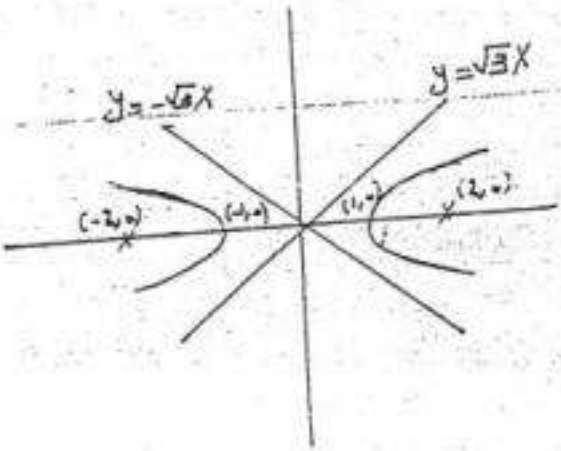
مثال: أرسم القطع الزائد الآتي

1- $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$

$a = 1$, $b = \sqrt{3}$ $\quad c^2 = 1 + 3 = 4 \quad \therefore \quad c = 2$

$f_1(-2,0)$, $f_2(2,0)$ $\quad V_1(-1,0)$, $V_2(1,0)$

$$y = \mp \frac{\sqrt{3}}{1} x = \mp\sqrt{3}\, x$$

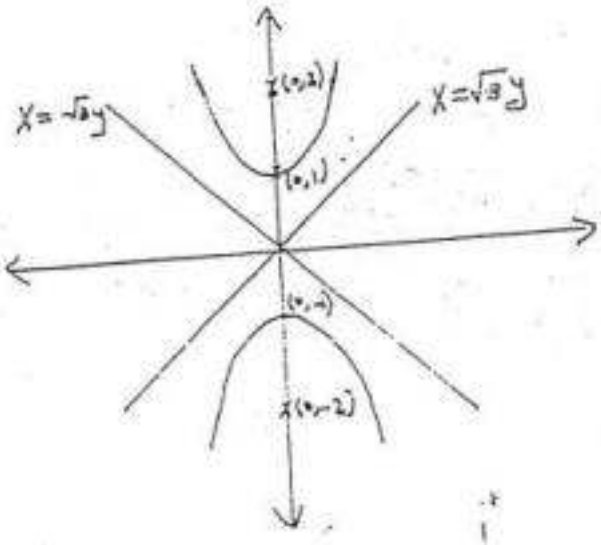


2- $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{3} = 1$

$f_1(0,2)$, $f_2(0,-2)$

$V_1(0,1)$, $V_2(0,-1)$

$x = \mp \frac{b}{a} y = \mp\sqrt{3}\, y$



5-) $\int P^{x}\,dx = \frac{P^{x}}{\ln P} + C$ $\quad P>0$, constant , $P \neq -1$

6-) $\int \sin x\,dx = -\cos x + dx$, $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

7-) $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$, $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$

8-) $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

9-) $\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$ 10) $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$

10-) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$

11-) $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

12-) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

13-) $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$

Examples

1- $\int 2X\,(X^2-4)^2\,dX = \frac{(X^2-4)^3}{3} + C$

(نرى هنا قوس فيه أس أذن شرط التكامل يجب ان يكون مشتقه داخله القوس موجوده خارج القوس و مشتقه داخل القوس هي $2X$ موجوده في الخارج فنكامل نضيف أس بالنسبه للقوس ونقسم على الاس الجديد)

2- $\int \frac{1}{\cos^2 X}\,dX = \int \sec^2 dX = \tan X + C$

(بما أن $\sec^2 = \frac{1}{\cos^2 X}$ أذن مباشره نطبق الخاصيه (12))

3- $\int \frac{\sin X}{1+\cos X}\,dX$

حلول الفصل الثاني

تمارين على المعادلات الوسيطية

س١ جد المعادلات الكارتيزية للمعادلات الوسيطية الآتية

(1) (a) $x = \cos 2t$ و $y = \sin t$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

(b) $x = 2t + 3$ و $y = 4t^2$ $\quad -\infty < t < \infty$

(c) $x = 2 + \frac{1}{t}$ و $y = 2 - t$ $\quad 0 < t < \infty$

(d) $x = t^2 + t$ و $y = t^2 - 1$ $\quad -\infty < t < \infty$

Soultion:- d-) $y^2 = \sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$ قانون نصف الزاوية

بالاشتقاق $2y^2 = 1 - \cos 2t$ (بضرب الطرفين $2*$)

$\cos 2t = 1 - 2y^2 \Rightarrow x = 1 - 2y^2$

س٢ جد المعادلات الوسيطية للمعادلة الكارتيزية الآتية

$$x^2 + y^2 = d^2$$

بأستخدام المتغير الوسيط $t = \frac{dy}{dx}$

Soultion:- $x^2 + y^2 = d^2 \Rightarrow$ ~~2x~~ $2x\,dx + 2y\,dy = 0$

$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2x + 2yt = 0 \Rightarrow 2yt = -2x$

$\Rightarrow y = \frac{-x}{t}$

نعوض بالمعادلة الأصلية

$x^2 + \left(\frac{-x}{t}\right)^2 = d^2 \Rightarrow x^2 + \frac{x^2}{t^2} = d^2$

① ⓑ $x = 2t+3 \quad , \quad y = 4t^2 - 9 \qquad 0 \le t \le 2\pi$

$x = 2t+3 \Rightarrow x-3 = 2t \Rightarrow 2t \Rightarrow t = \frac{x-3}{2}$

نعوض t في المعادلة ②

$y = 4\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 9 \Rightarrow y = \frac{\cancel{4}(x-3)^2}{\cancel{4}} - 9 \Rightarrow y = x^2 - 6x + 9$

---

① ⓒ $x = 2 + \frac{1}{t} \quad , \quad y = 2 - t \qquad -\infty < t < \infty$

$y = 2 - t \Rightarrow t = 2 - y$

نعوض t في المعادلة الاولى

$x_1 = 2 + \frac{1}{2-y} \Rightarrow x = \frac{2(2-y)+1}{2-y} = \frac{4-2y+1}{2-y} = \frac{5-2y}{2-y}$

---

① ⓓ $x = t^2 + t \quad , \quad y = t^2 - 1$

من المعادلة الثانية

$y = t^2 - 1 \Rightarrow t^2 = y+1 \Rightarrow t = \mp\sqrt{y+1}$

نعوضها في المعادلة الاولى

$x = (y+1) \mp \sqrt{y+1}$

الفصل السادس / رياضيات / قسم الكيمياء / المرحلة الثانية

المدرس / نادية جاسم

المعادلات التفاضلية الاعتيادية

أن المعادلات التفاضلية لها علاقة بمختلف أنواع العلوم وليس الرياضيات فقط حيث أنها تدخل في دراسة قوانين الحركة والتجاذب والميكانيك الكمي والحركة الموجية والنشاط الاشعاعي وكذلك في التفاعلات الكيميائية ومن هنا تأتي أهمية دراستها وطرق حلها

المعادلة التفاضلية

هي معادلة تحتوي على مشتقات (اعتيادية ، جزئية) for example

1- $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy = 1$ 2- $y'' + (y')^3 = 0$

3- $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} = 5$ 4- $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = x + y$

رتبة المعادلة التفاضلية

هي رتبة أعلى مشتقة تظهر في المعادلة فمثلاً نلاحظ أن المعادلة الاولى من الرتبة الاولى والثانية من الرتبة الثانية والثالثة من الرتبة الثانية والمعادلة الاخيرة من الرتبة الثالثة

درجة المعادلة التفاضلية

هي درجة المشتقة ذات أعلى رتبة بشرط أن يكون عدد صحيح غير سالب فمثلاً في المثال السابق المعادلة الاولى من الدرجة الثانية والمعادلة الثانية

والثالث والرابع من الرتبة الاولى

((تمارين))

جد رتبة ودرجة كل من المعادلات الاتية

1- $y' = 8x$ رتبة $O = 1$ و درجة $D = 1$

2- $(y')^2 + xy' = y^2$ $O = 1$ و $D = 2$

3- $\sqrt{y''} = 3y' + x$ $O = 2$ و $D = 1$ $((y'' = (3y' + x)^2))$

4- $y^4 = \sqrt{y'}$ $O = 1$ و $D = 1$ $((y^4)^2 = y')$

5- $(y'')^{\frac{1}{3}} = k(1 + y'^2)^{\frac{5}{2}}$ $O = 2$ و $D = 1$ $y'' = [k(1 + y'^2)^{\frac{5}{2}}]^3$

حل المعادلة التفاضلية

هو علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية بحيث ان هذه العلاقة تكون

① خالية من المشتقات ② معرفة على فترة معينة ③ تحقق المعادلة التفاضلية

مثلاً المعادلة التفاضلية 1- $xy' = x + y$ $O\ 1$ $D\ 1$

أحد حلولها هو $y = x\log x - x$ $x > 0$

2- $y'' = 12x^2$ $O\ 2$ $D\ 1$

$y = x^4 + c_1x + c_2$

طرق حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية

أولاً:- المعادلات التي تنفصل متغيراتها

أن المعادلة التفاضلية العامة تكتب بالشكل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

وفي هذه الطريقة نجعل المتغير x ومشتقته في حد و المتغير y ومشتقته في حد آخر و نكامل الطرفين مباشرة

فمثلاً لدينا المعادلة $f_1(x)\,g_2(y)\,dx + f_2(x)\,g_1(y)\,dy = 0$

عامل التكامل هو $\dfrac{1}{f_2(x)\,g_2(y)}$

حيث يمكن أجراء التكامل بعد ضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل

مثال :- حل المعادلة التفاضلية $x(1-y)\dfrac{dy}{dx} + y(1+x) = 0$

نضرب المعادلة بـ dx $\quad x(1-y)\,dy + y(1+x)\,dx = 0$

يكون عامل التكامل هو $\dfrac{1}{xy}$ ، نضرب المعادلة بـ $\dfrac{1}{xy}$

$$\frac{(1-y)}{y}\,dy + \frac{1+x}{x}\,dx = 0$$

$$\left(\frac{1}{y} - 1\right)dy + \left(\frac{1}{x} + 1\right)dx = 0$$

$$\ln y - y + \ln x + x = c \quad , \quad \ln y + \ln x - y + x = c$$

$$\ln xy = y - x + c \quad \therefore \quad xy = e^{y-x+c}$$

مثال :-

$$x^2(1-y^2)\,dx + y(1+x^2)\,dy$$

عامل التكامل هو $\dfrac{1}{(1+x^2)(1-y^2)}$

$$\frac{x^2}{1+x^2}\,dx - \frac{y}{1-y^2}\,dy = 0$$

$$\int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx+\int\left(\frac{y}{1-y^2}\right)dy=0$$

$$\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}+\frac{1}{-2}\int\frac{-2y}{1-y^2}\,dy$$

$$x-\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\ln(1-y^2)=c$$

مثال :- $y\cos x\,dx+y\tan y\,dy=0$

عامل التكامل هو $\frac{1}{y}$

$$\int\cos x\,dx+\int\tan y\,dy=0$$

$$\sin x+\ln|\cos y|=c$$

ثانياً :- المعادلات التفاضلية التامة

لتكن المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى هي

$\boxed{M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0}$ نجد كل من $\frac{\partial M}{\partial y}$ ، $\frac{\partial N}{\partial x}$ فاذا كان

$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}}$ فأن المعادلة تكون تامة وحلها هو

$$\boxed{f(x,y)=\int_a^x M(t,y)\,dt+\int_b^y N(a,t)\,dt=c}$$

علماً أن (a,b) نقطة تكون الدالة معرفة عليها

مثال :- $\underbrace{(3x^2+3xy^2)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{(3x^2y-3y^2+2y)}_{N(x,y)}dy$

المعادلة تامة

$$M(x,y)=3x^2+3xy^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=6xy$$

$$N(x,y)=3x^2y-3y^2+2y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=6xy$$

$$f(x,y)=\int_0^x M(t,y)\,dt+\int_0^y N(0,t)\,dt$$

$$=\int_0^x(3t^2+3ty^2)\,dt+\int_0^y(-3t^2+2t)\,dt$$

$$=t^3+\frac{3}{2}t^2y^2\Big|_0^x+(-t^3+t^2)\Big|_0^y$$

$$=x^3+\frac{3}{2}x^2y^2-y^3+y^2=c$$

Example :- $y^3 \sin 2x \, dx - 3y^2 \cos^2 x \, dy = C$

$M(x,y) = y^3 \sin 2x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 \sin 2x$

$N(x,y) = -3y^2 \cos^2 x \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -3y^2 \cdot 2\cos x(-\sin x)$

$= +3y^2 \, 2\cos x \sin x$

$= 3y^2 \sin 2x$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

(حسب المتطابقة $\sin(A+B) = (\sin A \cos B + \cos A \sin B)$)

$(a,b) = (0,0)$

$$f(x,y) = \int_0^x M(t,y)\,dt + \int_0^y N(0,t)\,dt$$

$$= \int_0^x y^3 \sin 2t \, dt + \int_0^y -3t^2 \, dt = -\frac{1}{2} y^3 \cos 2t \Big|_0^x - t^3 \Big|_0^y$$

$$= \frac{-y^3}{2} \cos 2x - \frac{y^3}{2} - y^3 = C$$

ثالثاً :-

المعادلات التفاضلية الخطية

هي معادلة من الرتبة الاولى والدرجة الاولى وصيغتها العامة هي

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$

تحل هذه المعادلة بأستخدام عامل التكامل وهو

$u = e^{\int P(x)dx}$ حيث أن $uy = \int u \cdot Q(x)\,dx + C$

Example :- $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = x^{-2}$ $\quad P(x) = \frac{2}{x}, \; Q(x) = x^{-2}$

$$u = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\int \frac{dx}{x}} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

بما أن $uy = \int u\,Q(x)\,dx + C$

$$x^2 y = \int x^2 x^{-2} dx + C \Rightarrow x^2 y = \int dx + C \Rightarrow x^2 y = x + C$$

$$y = x^{-1} + c x^{-2}$$ أذن الحل هو

Example :-

بعد الترتيب

$$3x\,dy - 3y\,dx = x^{-3}\,dx$$

$P(x) = \frac{-1}{x}$

$Q(x) = \frac{x^{-4}}{3}$

$$3x\frac{dy}{dx} - 3y = x^{-3} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{1}{3}x^{-4}$$

$$u = e^{\int \frac{-1}{x}dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}$$

$$uy = \int u \cdot Q(x)\,dx + C$$ بحاث

$$x^{-1}y = \int x^{-1} \cdot \frac{1}{3}x^{-4}\,dx + C \Longrightarrow x^{-1}y = \int \frac{1}{3}x^{-5}\,dx + C$$

$$x^{-1}y = \frac{-1}{12}x^{-4} + C \Longrightarrow y = \frac{-1}{12}x^{-3} + Cx$$

رابعاً :-

تخفيض الرتبه للمعادله التفاضليه

هذه الطريقه تستخدم عندما تكون رتبه المعادله من درجه عاليه حيث نقوم بتقليل هذه الرتبه الى رتبه أولى ونكامل مباشره ثم نعوض بالفرضيه ونكامل مره أخرى وهكذا (الفرضيه لاقل مشتقه بالمعادله الأولى)

Example :-

1- $xy'' = y'$

Let $p = y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{dp}{dx}$

نقسم على xp

$$x\frac{dp}{dx} = p \Longrightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \ln|p| = \ln|x| + C_1$$

$C_1 = \ln e$ ثابت

$$\ln|P| = \ln|x| + \ln e \Rightarrow P = xe \Rightarrow \frac{dy}{dx} = xe$$

$$dy = xe\,dx \Rightarrow y = \frac{e}{2}x^2 + C_2$$

Example :- $y''' - y'' = 1$

Let $P = y'' \Rightarrow P' = \frac{dP}{dx} = y'''$

$$\therefore \frac{dP}{dx} - P = 1 \Rightarrow \frac{dP}{dx} = P + 1 \Rightarrow \frac{dP}{P+1} = dx$$

$$\ln|P+1| = x + c \Rightarrow P + 1 = e^{x+c}$$

$$\Rightarrow P + 1 = c_1 e^x \quad (c_1 = e^c)$$

$$P = c_1 e^x - 1 \Rightarrow y'' = c_1 e^x - 1 \quad \text{---} (*)$$

Let $q = y'$ $\wedge$ $\quad y'' = \frac{dq}{dx}$

$$\therefore \frac{dq}{dx} = c_1 e^x - 1 \Rightarrow dq = c_1 e^x dx - dx$$

$$q = c_1 e^x - x + C_2$$

$$y' = c_1 e^x - x + C_2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = c_1 e^x - x + C_2$$

$$dy = c_1 e^x dx - x\,dx + C_2 dx$$

$$y = c_1 e^x - \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

تمارين

حل المعادلات التفاضلية الاتية

1- $y'' = 1 \Rightarrow y' = x + C_1 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$

let $P = y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow P' = \frac{dP}{dx} = y''$ اذن $\frac{dP}{dx} = 1 \Rightarrow dP = dx \Rightarrow P = x + C_1$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x + C_1 \Rightarrow dy = x\,dx + C_1\,dx$

$\Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$

2- $y'' = x + y'$

نستخدم الطريقة الرابعة (تخفيض الرتبة)

$y' = P \Rightarrow y'' = P' = \frac{dP}{dx}$

$P' = x + P \Rightarrow \frac{dP}{dx} - P = x$ الآن اصبحت انه صيغة المعادلات التفاضلية الخطية

$u = e^{\int P(x)dx}$

$= e^{\int -dx} = e^{-x}$

$P \cdot e^{-x} = \int x e^{-x} dx + C_1$

التكامل هنا يحل بطريقة $(u\,dv)$

$P \cdot e^{-x} = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx + C_1$

$P \cdot e^{-x} = -x e^{-x} - e^{-x} + C_1 \Rightarrow P = -x - 1 + C_1 e^{x}$

(بالقسمة على e^{-x})

$\frac{dy}{dx} = -x - 1 + C_1 e^{x}$

$y = \frac{-x^2}{2} - x + C_1 e^{x} + C_2$ نكامل مرة أخرى

3- $\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x} y = 2x$

$u = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \ln x} = x^3$

(نرى هنا دالة كسرية فشرط التكامل هو يجب ان تكون
مشتقة المقام موجوده في البسط فالمقام هو $(1+\cos x)$
فالمشتقة هي $(-\sin x)$. أن $\sin x$ موجوده في البسط فقط
الاشاره غير موجوده فنضربه في -1 ونقسم على -1 فنكامل
فيكون $\ln$ (المقام) + الثابتة (c) أي أن

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx = -\ln(1+\cos x) + C$$

((-1) في البسط تذهب مع التكامل)

4- $\int \cos 5x\,dx = \frac{1}{5}\sin x + C$

(هنا دالة مثلثية فشرط التكامل يجب ان تكون مشتقة
الزاوية موجوده وهنا مشتقة الزاوية هي 5 غير موجوده فنضرب
في 5 ونقسم على 5 و 5 التي في البسط تذهب مع التكامل)
ونكامل مباشره . $\frac{5}{5}\int \cos 5x\,dx = \frac{1}{5}\sin x + C$

5- $\int 3x^2 e^{x^3+1}\,dx = e^{x^3+1} + C$

(هنا دالة أسية فشرط التكامل هو يجب ان تكون مشتقة
الاس موجوده والمشتقة هي $3x^2$ موجوده فنكامل
حيث ناتج التكامل هو الدالة الأسية نفسها + الثابتة

6- $\int \cot^2 x\,dx$

(هنا لا يوجد قانون لكي نكامل $\cot^2 x$ أذن نعوض عن
$\cot^2 x$ بـ $\csc^2 x - 1$ لأن $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ (قانون حفظ)
أذن $\int (\csc^2 x - 1)\,dx = \int \csc^2 x\,dx - \int 1\,dx$

$= -\cot x - x + C$

حسب خاصية

$$y \cdot x^3 = \int x^3 \cdot 2x \, dx + C_1$$

$$y \cdot x^3 = 2 \frac{x^5}{5} + C_1 \Rightarrow y = \frac{2}{5} x^2 + C_1 x^{-3}$$

4- $e^{2x}(dy + 2y\,dx) = x^2 dx$

$$e^{2x} dy + (2y e^{2x} - x^2)\, dx = 0$$

$$M(x,y) = 2y e^{2x} - x^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2x}$$

$$N(x,y) = e^{2x} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2e^{2x}$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$ اذن المعادلة تامة

$$f(x,y) = \int_0^x (2y e^{2t} - t^2)\, dt + \int_0^y 2t\, dt$$

$$= \left(y e^{2t} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^x + t^2 \Big|_0^y = y e^{2x} - \frac{x^3}{3} + y^2 = C$$

5- $y x^{-2} dx - x^{-1} dy = 0$

بالقسمة على $y x^{-1}$ وهو عامل التكامل ثم نحل بالطريقة الاولى اي

$$x^{-1} dx - \frac{1}{y} dy = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{y} dy = 0$$ المعادلات التي [illegible]

$$\Rightarrow \ln|x| - \ln|y| = \ln C \Rightarrow \frac{x}{y} = C_1$$

(C_1 ، $\ln C_1$ ثوابت)

6- $(y^2+y)\,dx-(x^2-x)\,dy=0$

$$\frac{dx}{x^2-x}-\frac{dy}{y^2+y}=0 \Longrightarrow$$

$$\frac{dx}{x(x-1)}-\frac{dy}{y(y+1)}=0$$

نستخدم طريقة تجزئة الكسور

$$\frac{1}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}$$

$$=\frac{Ax+Bx-A}{x(x-1)}$$

$$\therefore A+B=0 \wedge -A=1 \Longrightarrow \boxed{A=-1} \wedge \boxed{B=1}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{x(x-1)}=\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}$$

$$\frac{1}{y(y+1)}=\frac{A}{y}+\frac{B}{y+1}=\frac{Ay+By+A}{y(y+1)} \Longrightarrow A=1 \wedge B=1$$

$$\frac{1}{y(y+1)}=\frac{1}{y}+\frac{-1}{y+1}$$

$$\therefore \frac{dx}{x(x-1)}-\frac{dy}{y(y+1)}=0 \Longrightarrow \left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)dx-\left(\frac{1}{y}+\frac{-1}{y+1}\right)dy=0$$

$$-\ln|x|+\ln|x-1|-\ln|y|+\ln|y+1|=\ln C$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \ln\left|\frac{y+1}{y}\right| = \ln C$$

$$\frac{x-1}{x}\cdot\frac{y+1}{y} = C \Rightarrow \frac{(x-1)(y+1)}{xy} = C$$

7- $x(1-y^2)\,dx + y(1+x^2)\,dy = 0$

$$\frac{x}{1+x^2}\,dx + \frac{y}{1-y^2}\,dy = 0$$ (بالقسمة على $(1-y^2)(1+x^2)$)

$$\frac{1}{2}\ln|1+x^2| - \frac{1}{2}\ln|1-y^2| = \ln C$$

$$\ln 1+x^2 - \ln 1-y^2 = \ln C$$

$$\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-y^2}}\right| = \ln C \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-y^2}}\right| = C$$

$$\frac{x^2+1}{y^2-1} = C$$ (يمكن نقل الاشاره بين الحدود داخل المطلق) :

8- $(x^2+x)\,dy + (2xy+1+2\cos x)\,dx = 0$

$M = 2xy+1+2\cos x$ $\qquad N = x^2+x$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$ $\qquad \frac{\partial N}{\partial y} = 2x+1$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$ المعادله ليست تامه (واجبه)

9- $2\cos x\,dy - (2y\sin x - 3)\,dx = 0$

$M = 2y\sin x - 3$ $\qquad N = 2\cos x$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -2\sin x$ $\qquad N = -2\sin x$

الفصل السابع / المرحلة الثانية / الرياضيات
المتتابعات قسم الكيمياء

تعريف

المتتابعة هي مجموعة من العناصر مرتبة حسب قاعدة اقتران معينة بحيث يكون مجالها الاعداد الطبيعية (N) ومجالها المقابل الاعداد الحقيقية (R) ويرمز لها بالرمز $\{a_n\}$ أو a_n فقط حيث $n = 1, 2, 3, \ldots$

نلاحظ ان الحد الذي يحتوي على الرمز n في المتتابعة تدعى الحد النوني

Examples :-

1- $\{a_n\} = \{n, n = 1, 2, \ldots\} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

2- $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}, n = 1, 2, \ldots\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$

3- $\{a_n\} = \{\frac{1}{n^2}, n \in N\} = \{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots\}$

4- $\{a_n\} = \{n-1, n \in N\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

5- $\{a_n\} = \{\frac{n+1}{n}, n \in N\} = \{2, \frac{3}{2}, \ldots\}$

6- $\{a_n\} = \{\frac{n}{n+1}, n \in N\} = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\}$

7- $\{a_n\} = \{1, n \in N\} = \{1, 1, 1, \ldots\}$ متتابعة ثابتة

8- $\{a_n\} = \{(-1)^n, n \in N\} = \{-1, 1, -1, \ldots\}$ متتابعة متناوبة

نضع مثال

قاعدة الاقتران

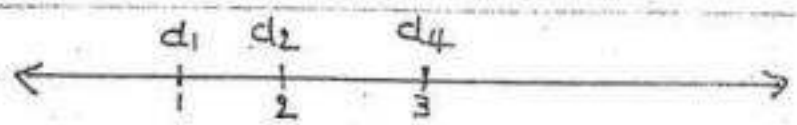
9- $\{a_n\} = \{1, -1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{-1}{n}, \ldots\}$

10- $\{a_n\} = \{\frac{(-1)^n}{n}, n = 1, 2, \ldots\} = \{-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n}, \ldots\}$

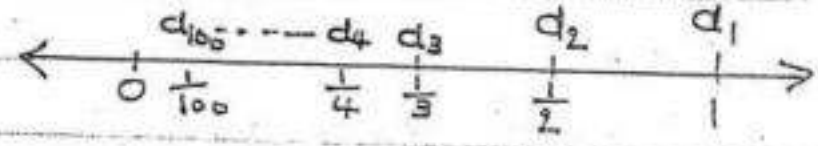
ويمكن ان نمثل المتتابعة على خط الاعداد بمجموعة من النقاط

Examples :-

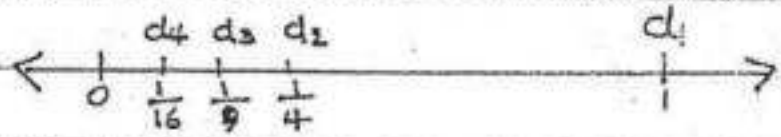
1- $\{d_n\} = \{n, n=1,2,3,\ldots\} = \{1,2,3,\ldots\}$



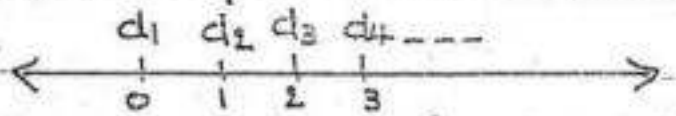
2- $\{d_n\} = \{\frac{1}{n}, n=1,2,\ldots\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$



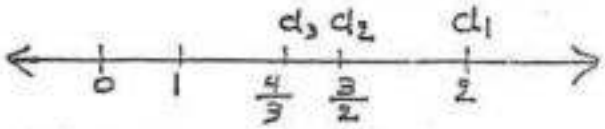
3- $\{d_n\} = \{\frac{1}{n^2}, n \in N\} = \{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots\}$



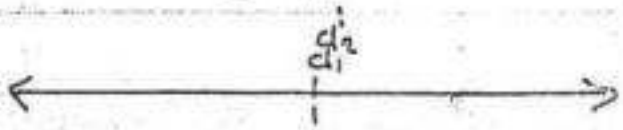
4- $\{d_n\} = \{n-1, n \in N\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$



5- $\{d_n\} = \{\frac{n+1}{n}, n \in N\}$



6- $\{d_n\} = \{1, n \in N\}$



7- $\{d_n\} = \{(-1)^n, n \in N\}$

تقارب وتباعد المتتابعات

هناك بعض المتتابعات تقترب من نقطة معينة كلما تزايد عددها وهناك متتابعات أخرى تتباعد الى الملانهاية او تنتقل الى أكثر من نقطة وعليه تقسم المتتابعات الى

١- المتتابعة المتقاربة

وهي المتتابعة التي تقترب الى عدد معين وبتعبير رياضي نقول

$$\{a_n\} \to L \quad \exists \epsilon \in R \ni \epsilon > 0 \text{ و } |a_n - L| < \epsilon \quad \forall n \in N$$

ونقرأ أن المتتابعة $\{a_n\}$ تقترب من العدد L اذا وجد عدد حقيقي ϵ بحيث $\epsilon > 0$ يحقق الشرط الاتي $|a_n - L| < \epsilon$

٢- المتتابعة المتباعدة

وهي المتتابعة التي لا تقترب الى عدد معين مثل L وتعتبر المتتابعة المتناوبة نوع من المتتابعات المتباعدة

ملاحظة :-

١- اذا كان درجة البسط للمتتابعة أقل من درجة المقام لها فأن المتتابعة تقترب من الصفر

٢- اذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام تكون المتتابعة متباعدة

٣- اذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام فأن المتتابعة تقترب الى معامل أكبر أس (قوة) في البسط على معامل أكبر أس (قوة) في المقام ويدعى العدد الذي تقترب إليه المتتابعة بقيمة تقارب المتتابعة

فإذا [illegible] $\lim_{n \to \infty}$ نقوم بعملية قسمة البسط والمقام على معامل أكبر أس في البسط والمقام

Examples :-

بين تقارب أو تباعد المتتابعات الاتية

1- $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}, n \in N\}$

Solve :- $\exists \epsilon > 0 \quad \forall n \in N \ni \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon$

مجبه

$\therefore n > \frac{1}{\epsilon}$

المتتابعة هنا تقترب من الصفر لذلك فأن $L = 0$ وهنا مقتربة منه فعلاً

$\therefore \{\frac{1}{n}\} \to L$

or $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

2- $\{a_n\} = \{\frac{1}{n^2}, n \in N\}$

$\exists \epsilon > 0, \forall n \in N \ni \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} < \epsilon$

$\therefore n^2 > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$

$\{\frac{1}{n^2}\} \to 0$ or $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$

3- $\{a_n\} = \{\frac{n}{n+1}, n \in N\}$

$\exists \epsilon > 0, \forall n \in N \ni \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right|$

$= \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \epsilon$

$\therefore n > \frac{1}{\epsilon}$

$\{\frac{n}{n+1}\} \to 1$ or $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

توضيح الطريقة

اي طريقة اخرى طريقة $\lim\limits_{n \to \infty}$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}}$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\infty}} = 1$

4- $\{a_n\} = \{\frac{n+1}{n}, n \in N\}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1} = \frac{1+\frac{1}{\infty}}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\{\frac{n+1}{n}\} \longrightarrow 1$$

او طريقة اخرى طريقة ϵ

$\exists \epsilon > 0, \forall n \in N \ni |\frac{n+1}{n} - 1| = |\frac{n+1-n}{n}| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \epsilon$

$n > \frac{1}{\epsilon}$

5- $\{a_n\} = \{1, n \in N\}$ $\quad \lim_{n\to\infty} 1 = 1$

$\exists \epsilon > 0 \ \forall n \in N$

$\Rightarrow |a_n - L| = |1-1| = |0| = 0 < \epsilon \quad \therefore a_n \to L, \ \{1\} \to 1$

6- $\{a_n\} = \{n, n \in N\}$

$\exists \epsilon > 0 \ \forall n \in N \ni |a_n - L| < \epsilon$

هنا لا يمكن ايجاد قيمة L بحيث يكون $|n-L| < \epsilon$

لو فرضنا $\epsilon = 1$ ، $L = 0$

$|n-0| < 1 \Rightarrow n < 1$, let $n = 2 \Rightarrow 2 < 1$ C!

$\{a_n\} \not\to L$ $\quad \therefore$ المتتابعة متباعدة

تمارين

بين تقارب وتباعد المتتابعات الاتية

1- $\{a_n\} = \{\frac{1}{2^n}, n \in N\}$

$\forall n \in N, \exists \epsilon > 0 \ni |a_n - L| < \epsilon$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^\infty} \simeq 0 \quad \therefore L = 0$

$|\frac{1}{2^n} - 0| = |\frac{1}{2^n}| = \frac{1}{2^n} < \epsilon \Rightarrow 2^n > \frac{1}{\epsilon}$

$\ln 2^n > \ln \frac{1}{\epsilon}$

$$\frac{n\ln 2}{\ln 2} > \frac{\ln\frac{1}{\epsilon}}{\ln 2} \Longrightarrow n > \frac{\ln\frac{1}{\epsilon}}{\ln 2}$$

$$\therefore \left\{\frac{1}{2^n}\right\} \to 0$$

2- $\{a_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}, n \in N\right\}$

$\forall n \in N \ \exists \epsilon > 0 \ \ni |a_n - L| < \epsilon$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^\infty}{\infty} = \left\langle \begin{matrix} \frac{1}{\infty} = 0 \\ \frac{-1}{\infty} = 0 \end{matrix} \right\rangle \therefore L = 0$$

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} < \epsilon \Longrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$$

$$\therefore \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} \to 0$$

3- $\{a_n\} = \left\{\frac{5n}{n+2}, n \in N\right\}$

$\forall n \in N \ \exists \epsilon > 0 \ \ni |a_n - L| < \epsilon$

نلاحظ ان درجة البسط تساوي درجة المقام أذن الاقتراب

سوف يكون الى معامل أكبر أس في البسط على معامل أكبر أس في

المقام أذن $L = \frac{5}{1} = 5$

$$\left|\frac{5n}{n+2} - 5\right| = \left|\frac{5n - 5n - 10}{n+2}\right| = \left|\frac{-10}{n+2}\right| = \frac{10}{n+2} < \frac{10}{n} < \epsilon$$

$$n > \frac{10}{\epsilon} \quad \therefore \left\{\frac{5n}{n+2}\right\} \to 5$$

4- $\{a_n\} = \left\{ \frac{2n^2}{n^2+3} , n = 1, 2, 3, \dots \right\}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+3}$ *

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{3}{n^2}}$

$\forall n \in N \ \exists \epsilon > 0 \ \ni |a_n - L| < \epsilon$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+0} = 2 \therefore L = 2$

نلاحظ هنا أن $L = 2$ * (طريقة الحد)

$$\left| \frac{2n^2}{n^2+3} - 2 \right| = \left| \frac{2n^2 - 2n^2 - 6}{n^2+3} \right| = \left| \frac{-6}{n^2+3} \right| = \frac{6}{n^2+3} < \frac{6}{n^2} < \epsilon$$

$$n^2 > \frac{6}{\epsilon} \Rightarrow n > \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\epsilon}}$$

$\therefore \left\{ \frac{2n^2}{n^2+3} \right\} \to 2$ * يجاد L

5- $\{a_n\} = \left\{ \frac{2n+1}{1-3n} , n \in N \right\}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{1-3n}$

$\forall n \in N \ \exists \epsilon > 0 \ \ni |a_n - L| < \epsilon$ $L = \frac{2}{-3}$ *

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-\frac{3n}{n}} = \frac{2+\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-3} = \frac{2}{-3}$

$$\left| \frac{2n+1}{1-3n} - \frac{2}{-3} \right| = \left| \frac{2n+1}{1-3n} + \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{6n+3+2-6n}{3(1-3n)} \right|$$

$$= \left| \frac{5}{3(1-3n)} \right| = \left| \frac{5}{3-9n} \right| = \left| \frac{-5}{-3+9n} \right| = \left| \frac{-5}{9n-3} \right|$$

$$= \frac{5}{9n-3} < \frac{5}{9n} < \epsilon$$

$\left\{ \frac{2n+1}{1-3n} \right\} \to \frac{+2}{-3}$

$\frac{5}{9n-3} < \epsilon$

$\frac{1}{9n-3} < \frac{\epsilon}{5}$

$9n-3 > \frac{5}{\epsilon}$

$9n > \frac{5}{\epsilon} + 3$

$n > \frac{5}{9\epsilon} + \frac{3}{9}$

$n > \frac{5}{9\epsilon} + \frac{1}{3}$

6- $\{a_n\} = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} , n \in N \right\}$

$\forall n \in N \ \exists \epsilon > 0 \ \ni |a_n - L| < \epsilon$

$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 1 + \frac{(-1)^\infty}{\infty} = 1 + 0 = 1 \ L$

$$\left| 1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1 \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} < \epsilon \ \therefore n > \frac{1}{\epsilon}$$

$\left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\} \to 1$

توجد أنواع من التكاملات نلجأ اليها عندما يكون التكامل غير مباشر ومنها :-

1-) Integration by Parts التكامل بالاجزاء

وهو مايعرف بطريقة udv حيث أن قانونها هو

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

ونستخدم هذه الطريقة عندما نجد مقدارين أحدهما ليس مشتقة الثاني ولذلك لايمكن أيجاد التكامل بصوره مباشره وهنا يجب ان نختار u بحيث عند اشتقاقه يقل و dv هو المقدار الذي عند تكامله لايزيد كثيراً فمثلاً

1-) $\int e^x \cos x\,dx$

$u = e^x \qquad dv = \cos x\,dx$

$du = e^x dx \qquad v = \sin x$

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$$

$u = e^x \qquad dv = \sin x\,dx$

$du = e^x \qquad v = -\cos x$

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \left[-e^x \cos x - \int -\cos x\, e^x\,dx\right]$$

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx$$

$$\int e^x \cos x\,dx + \int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$2\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x + e^x \cos x\right) + C$$

السلاسل

قسم الكيمياء

تكون السلسلة بالصيغة الاتية $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = d_1 + d_2 + d_3 + \cdots$

حيث أن $d_1, d_2, \ldots$ تمثل أعداد من المتتابعة وتقسم السلاسل الى نوعين

1- سلاسل منتهية وهي $\sum_{n=1}^{k} d_n$ ، $k \in N$

2- سلاسل غير منتهية وهي $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$

Examples:-

1- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \cdots$ سلسلة غير منتهية

2- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ سلسلة غير منتهية

3- $\sum_{n=1}^{k} \frac{n^2}{n^3+3} = \frac{1}{4} + \frac{4}{11} + \frac{9}{30} + \cdots + \frac{k^2}{k^3+3}$ سلسلة منتهية

4- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^{n-1}} = 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \cdots$ سلسلة غير منتهية

نرى أن السلاسل تعتمد على المتتابعات والمتتابعات منها متقاربة ومنها متباعدة فأن المتسلسلات تتقارب أو تتباعد

تقارب وتباعد المتسلسلات

توجد عدة أختبارات لمعرفة تقارب أو تباعد المتسلسلات وهي أختبارات التقارب والتي منها أختبار النسبة والمقارنة والجذر والتكامل وفي أي نوع من الاختبار يجب تحقق الشرط الاتي

$\lim_{n\to\infty} d_n = 0$ للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = 0$

اذا لم يتحقق هذا الشرط تعتبر المتسلسلة متباعده أما أذا تحقق فأنها تكون متقاربة أو تكون متباعده و نعرف ذلك بعد تطبيق الاختبارات

أختبارات التقارب

١- أختبار النسبة :- القانون لهذا الاختبار هو $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n}$

فأذا كان $\rho < 1$ فأن المتسلسلة متقاربة

وأذا كان $\rho > 1$ " " متباعده

وأذا كان $\rho = 1$ فالاختبار فاشل ونأخذ أختبار أخر

Examples:-

1- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^{2n-1}}{2n+1}$, $0 < X < \frac{1}{2}$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{X^{2(n+1)-1}}{2(n+1)+1}}{\frac{X^{2n-1}}{2n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+2-1}}{2n+2-1} \cdot \frac{2^{n-1}}{x^{2n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2^{n-1}}{x^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{x^{2n}} \cdot x}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{\cancel{x^{2n}} \cdot x^{-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^2(2n-1)}{2n+1} = x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1}$$

من هنا نتبع الملاحظة :- (لأن درجة البسط = درجة المقام)

$$= x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = x^2 \cdot \frac{2}{2} = x^2 \cdot 1 = x^2$$

$$0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < x^2 < \frac{1}{4} \quad \therefore \rho < 1$$

$$\Rightarrow \sum d_n \quad \text{متقاربة}$$

ملاحظة :-

(نفس الملاحظة مكررة في فصل المتتابعات)

في حالة الغاية عند اللانهاية اذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام فأن الغاية تكون صفر. وأما أذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام فالغاية غير موجودة. أما أذا كانت القوة في البسط تساوي القوة في المقام فأن الغاية تساوي معامل أكبر قوة في البسط على معامل نفس القوة في المقام

Example :- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x)^n}{n} \qquad x > 1$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n \cdot x}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n}$$

$= x \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = x \cdot 1 = x > 1$ المتسلسلة متباعدة

$= \rho > 1$

2- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n}$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{10(n+1)}}{\frac{1}{10n}}$$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cancel{10}(n+1)} \cdot \frac{\cancel{10}n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ الاختبار فاشل

2- أختبار الجذر :- القانون لهذا الاختبار هو $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{d_n}$

اذا كان $\alpha > 1$ فالمتسلسلة متباعدة

واذا كان $\alpha < 1$ فالمتسلسلة متقاربة

واذا كان $\alpha = 1$ فالاختبار فاشل

ملاحظة:

نستخدم هذه الطريقة عندما تكون المتسلسلات ذات قوى نونية

Examples :-

1- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2n+1}\right)^n$

$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 \cdot n^0}{2n+1} = 0 < 1$

(لأن درجة البسط أقل من درجة المقام) لأن الدالة عندما n تقترب من ∞ حسب الناتجة = صفر)

∴ المتسلسلة متقاربة

2- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-5}{2n+1}\right)^n$

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4n-5}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n-5}{2n+1} = \frac{4}{2} = 2 > 1$$ متباعده

[illegible]

3- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{5n+1}\right)^n$

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{5n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{5n+1} = \frac{3}{5} < 1$$ متقاربه

٢- أختبار التكامل :- لتكن $f(x)$ هي الداله الناتجه من a_n حيث $[a_n = f(n) = f(x)]$ فأن المتسلسله تكون متقاربه اذا كان $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ منتهي (عدد) وتكون متباعده اذا كان التكامل غير منتهي

Examples :-

1- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\quad \therefore f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^{\infty} x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^{\infty} = \frac{-1}{x}\Big|_1^{\infty}$$

$$= \frac{-1}{\infty} + \frac{1}{1} = 1$$ المتسلسله متقاربه لان التكامل منتهي

2- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n}$ $\quad \therefore f(x) = \frac{1}{10x}$

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{10x}\,dx = \frac{1}{10} \ln|x| \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{10}\left[\ln\infty - \ln 1\right]$$

$$= \frac{1}{10}(\infty - 0) = \frac{1}{10} \cdot \infty = \infty$$

المتسلسله متباعده لأن التكامل غير منتهي

تمارين

بين تقارب المتسلسلة أن وجد.

1- $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 X^n \quad , \quad 0 \le X \le 1$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot X^{n+1}}{n^2 \cdot X^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2n+1)X}{n^2}$$

$$= X \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1} = X \cdot 1 = X \qquad X<1$$ متقاربة

2- $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = \infty$ متباعده

$\int_1^{\infty} (f(n)-f(x))\,dx = \int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^{\infty} = \frac{1}{3}(\infty^3 - 1) = \infty$

3- $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} (\ln 1 - \ln n) = -\sum_{n=1}^{\infty} \ln n = \infty$ متباعده

4- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{X^n} \quad , \quad X>1$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{X^{n+1}} \cdot \frac{X^n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{X} = \frac{1}{X}$$

$X>1 \Rightarrow \frac{1}{X}<1$ ، $\rho<1$ المتسلسلة متقاربة

5- $\sum_{n=1}^{\infty} (2X)^n$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2X)^{n+1}}{(2X)^n} = \lim_{n\to\infty} 2X = 2X$$

if $X < \frac{1}{2} \Rightarrow \rho < 1$ متقاربة

if $X > \frac{1}{2} \Rightarrow \rho > 1$ متباعده

if $X = \frac{1}{2} \Rightarrow \rho = 1$ الاختبار فاشل

Examples :-

1- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 5\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots\right)$

$\therefore d = 5 \quad , \quad r = \frac{1}{2} < 1$ المتسلسلة متقاربة

وتقاربها الى $10 = \frac{5}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{1-\frac{1}{2}}$

2- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}(2)^{n-1} = \frac{1}{3}(1+2+2^2+\cdots)$

$\therefore d = \frac{1}{3} \quad r = 2 > 1$ متباعده

2- المتسلسلة العددية

هذا النوع من المتسلسلات سوف لن نتعامل معه

تمارين

1- $\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore d = 2 \quad |r| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1$ متقاربة

2- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\tan\frac{\pi}{3}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$

$d = 1 \quad , \quad r = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ متقاربة

$\frac{d}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1.9}{0.7}$ قيمة التقارب

3- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{4^n} = \sum_{n=0} 5\left(\frac{-1}{4}\right)^n \quad \therefore d = 5$

$r = \frac{-1}{4} \Rightarrow |r| = \frac{1}{4} < 1$ متقاربة وقيمة التقارب

$\frac{d}{1-r} = \frac{5}{1+\frac{1}{4}} = \frac{5}{5/4} = 4$

4- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ $\quad a = 1 \quad , \quad r = \frac{1}{4} < 1$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$$ قيمة التقارب

5- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n$

$a = 2 \quad r = \frac{2}{5} < 1$ متقاربة

$$\frac{a}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{2}{5}} = \frac{2}{3/5} = \frac{10}{3}$$ قيمة التقارب

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^2}\right)^n$$

$a = 1 \quad r = \frac{1}{e^2} = \quad = \frac{1}{(2.7)^2} = \frac{1}{7.29}$

قيمة ثابتة لعلاقة السؤال

$$\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{7.29}} = \frac{7.29}{6.29}$$ قيمة التقارب

2-) $\int x e^{x} dx$

هنا نجد ان x ليس مشتقة e^{x} والعكس غير صحيح أيضاً وعليه

نأخذ $u=x$ و $dv=e^{x}dx$ وليس العكس لأن الاشتقاق

$du=dx$ والتكامل $v=e^{x}$ أذن سوف يكون

$u=x \qquad dv=e^{x}dx$

$du=dx \qquad v=e^{x}$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du = x e^{x} - \int e^{x} dx = x e^{x} - e^{x} + C$$

3-) $\int x \sin 2x\, dx =$ $\qquad u=\sin 2x \qquad dv = x\,dx$

$du = 2\cos 2x \qquad v = \frac{x^2}{2}$

لا نجوز هذه الفرضية لأن المقدار (v) قد كبر أذن هذه

الاختيار خاطئ

$u=x \qquad dv=\sin 2x\, dx$

$du=dx \qquad v=-\frac{1}{2}\cos 2x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du = -\frac{x}{2}\cos 2x - \int -\frac{1}{2}\cos 2x\, dx$$

$$= -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$$

$$= -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

4-) $\int x \ln x\, dx$ $\qquad u=\ln x \qquad dv = x\,dx$

$du = \frac{1}{x} \qquad v = \frac{x^2}{2}$

لا يمكن أخذ $dv=\ln x$ لأننا لا نعرف تكاملها

$$= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$