محاضرات مادة الرياضيات

للمرحلة الاولى-قسم الكيمياء

المجموعات الجزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية ...

١- مجموعة الاعداد الطبيعية / تكتب على النحو الاتي $\{1, 2, 3, \dots\}$
حيث يرمز لها بالرمز N

٢- مجموعة الاعداد الصحيحة / تكتب على النحو الاتي
$\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ حيث يرمز لها بالرمز I او Z .

٣- مجموعة الاعداد النسبية / تكتب على النحو الاتي
$\{x \in \mathbb{R}, x = \frac{m}{n} \ni m, n \in I\} ; n \neq 0$ ويرمز لها بالرمز (Q)
نلاحظ أيضاً من خواص الاعداد النسبية إمكانية كتابتها
على شكل كسر عشري مثل :
$1/2 = 0.5$ و $1/4 = 0.25$

٤- مجموعة الاعداد الغير النسبية / وهي مجموعة الاعداد الحقيقية التي
لا يمكن كتابتها على شكل نسبة عددين صحيحين مثل :
$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π حيث إن π هي النسبة الثابتة
وتكتب على النحو الاتي $(22/7)$ او (3.14)
ويرمز لها بالرمز $Q' = (IRR)$
نلاحظ إن $(\mathbb{R} = Q \cup IRR)$
وإن $(N \subset Z \subset Q \subset \mathbb{R})$

المتراجحات

ليكن كل من a,b عدداً حقيقياً يقال بأنه b أكبر من a ويرمز لها $b>a$ إذا كان $b-a$ عدداً موجباً أي بأنه $b-a>0$

خواص المتراجحات : ① $a<b$ فإن $a+c<b+c$ $a.c<b.c$

توضيح :

② $a<b$, $c>0$ فإن

لتكن $a,b,c\in\mathbb{R}$ فإذا كان ③ $a<b$, $c<0$ فإن $a.c>b.c$

الفترات

ليكن كل من a,b عدداً حقيقياً فإذا كان $a<b$ يقال بأنه a يرتبط مع b بفترة.

أنواع الفترات

هناك فترات منتهية وفترات غير منتهية أي نوعين والفترات المنتهية هي على أربعة أنواع هي :

1- الفترة المفتوحة: ليكن كل من a,b عدداً حقيقياً بحيث $a<b$ يقال بأنه a يرتبط بفترة مفتوحة إذا كان $\{x\in\mathbb{R} \ni a<x<b\}$ بشرط أنه لا ينتمي كل من a,b إلى الفترة ويرمز لها بالرمز (a,b) أي بأنه $a\notin(a,b)$ و $b\notin(a,b)$ ويدعى كل من a,b نهايتي الفترة.

٢- الفترة المغلقة / ليكن كل من a,b عدداً حقيقياً بحيث إنه $a<b$ يقال بأن a يرتبط مع b بفترة مغلقة إذا كان $\{x\in\mathbb{R}: a\leq x\leq b\}$ بشرط أن ينتمي كل من a,b إلى الفترة ويرمز لها بالرمز $[a,b]$ أي أن $a\in[a,b]$ و $b\in[a,b]$ ويدعى كل من a,b نهايتا الفترة ..

٣- الفترة نصف المفتوحة / ليكن كل من a,b عدداً حقيقياً بحيث إنه $a<b$ يقال بأن a يرتبط مع b بفترة نصف مفتوحة إذا كانت $\{x\in\mathbb{R}; a<x\leq b\}$ شرط أنه لا ينتمي a إلى الفترة بينما b تنتمي إلى الفترة ويرمز لها $(a,b]$ أي أن $a\notin(a,b]$ وإنه $b\in(a,b]$.

أما الفترات الغير منتهية هناك نوعين هما :-

(١) الفترة المفتوحة / ليكن a عدداً حقيقياً بحيث إنه $a<\infty$ يقال بأن a يرتبط مع ∞ بفترة مفتوحة إذا كانت $\{x\in\mathbb{R}; a<x<\infty\}$ بشرط إنه لا ينتمي a إلى الفترة ويرمز لها (a,∞) أي إنه $a\notin(a,\infty)$ وبالاتجاه المعاكس نعرف الفترة $(-\infty,a)$ وندعى a نهاية الفترة في حالة كون $\{x\in\mathbb{R}; -\infty<x<\infty\}$ يرمز لهذه الفترة $(-\infty,\infty)$ وهذا تعريف آخر لمجموعة الأعداد الحقيقية ..

(٢) الفترة النصف المفتوحة / ليكن a عدداً حقيقياً بحيث إنه $a<\infty$ يقال بأنه a يرتبط مع ∞ بفترة نصف مفتوحة إذا كانت $\{x\in\mathbb{R}; a\leq x<\infty\}$ بشرط إنه a ينتمي إلى الفترة ويرمز لها $[a,\infty)$ وبنفس الفكرة نعرف الفترة النصف مفتوحة $(-\infty,a]$.

حل المتراجحات :- تعد مجموعة القيم التي تحقق المتراجحة بعد التعويض بالمتغير x حلاً للمتراجحة..

قضية لتكن كل من $a,b,c \in \mathbb{R}$ فإذا كان :-

1- $a<b$ فإن $a+c<b+c$

2- $a<b$, $c>0$ فإن $a.c<b.c$

3- $a<b$, $c<0$ فإن $a.c>b.c$

المتراجحات من الدرجة الأولى

مثال/ حل المتراجحة التالية $3(x+2)<5$

$$3(x+2)<5 \Longrightarrow 3x+6<5 \Longrightarrow 3x<5-6$$

$$3x<-1 \Longrightarrow x<-1/3$$

مجموعة الحل هنا هي

$$\{x\in\mathbb{R} ; x<-1/3\} = (-\infty, -\tfrac{1}{3})$$

مثال حل المتراجحة الآتية $7<2x+3<11$

$$7<2x+3<11 \Longrightarrow -3+7<2x<-3+11$$

$$4<2x<8 \Longrightarrow 2<x<4$$

مجموعة الحل $\{x\in\mathbb{R}, 2<x<4\} = (2,4).$

مثال/ حل المتراجحة التالية، $\dfrac{x}{x-3}<4$

$$\frac{x}{x-3}<4 \Longrightarrow \frac{x}{x-3}-4<0 \Longrightarrow \frac{x-4(x-3)}{x-3}<0$$

$$\frac{x-4x+12}{x-3}<0 \Longrightarrow \frac{-3x+12}{x-3}<0$$

بالترتيب

$$\frac{12-3x}{x-3}<0$$

هنا الكسر سالب فهناك إحتمالات

أما تكون $\left(\frac{-}{+}\right)$ أو $\left(\frac{+}{-}\right)$

الاحتمال الأول $\left(\frac{-}{+}\right)$

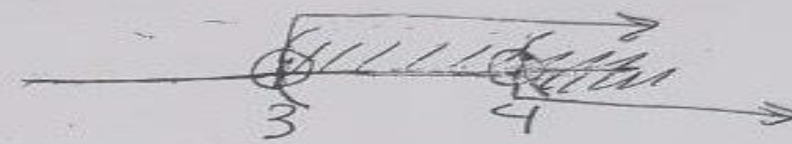
$$12-3x<0 \wedge x-3>0$$

$$-3x<-12$$

$$\frac{-3x}{-3} > \frac{-12}{-3} \wedge x>3$$

تقلب

$$x>4 \wedge x>3$$



$$S_1=(4,\infty)$$

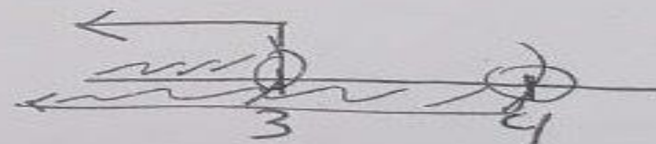
الاحتمال الثاني $\left(\frac{+}{-}\right)$

$$12-3x>0 \wedge x-3<0$$

تقلب

$$-3x > -12 \wedge x<3$$

$$x<4 \wedge x<3$$



$$S_2=(-\infty,3)$$

$$S=S_1\cup S_2=(4,\infty)\cup(-\infty,3)=\mathbb{R}\setminus[3,4]$$

المتراجحات من الدرجة الثانية ..

هنا يعني درجة المتغير x هي إثنان (2).

مثال/ حل المتراجحة الآتية $25 > x^2$.

$$x^2 < 25 \Rightarrow x^2 - 25 < 0 \Rightarrow (x-5)(x+5) < 0$$

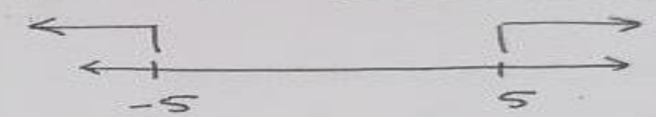
هنا الناتج للمتراجحة هو سالب فهذا يعني أما (+ . −) أو (− . +)

الاحتمال الأول (+ . −)

$x-5>0 \wedge x+5<0$

$x>5 \wedge x<-5$

$S_1 = \phi$

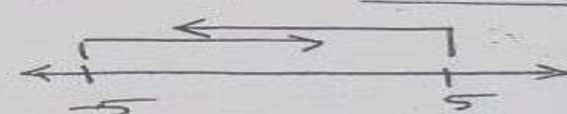


الاحتمال الثاني (− . +)

$x-5<0 \wedge x+5>0$

$x<5 \wedge x>-5$

$S_2 = (-5,5)$



$S_1 \cup S_2 = S$

$\therefore S = \phi \cup (-5,5) = (-5,5)$

مثال/ حل المتراجحة الآتية: $x^2-3<6$

$$x^2-3-6<0 \Rightarrow x^2-9<0 \Rightarrow (x-3)(x+3)<0$$

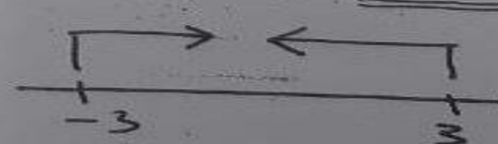
يعني الناتج سالب وهذا أكيد أما (− . +) أو (+ . −)

الاحتمال الأول − . +

$x-3<0 \wedge x+3>0$

$x<3 \wedge x>-3$

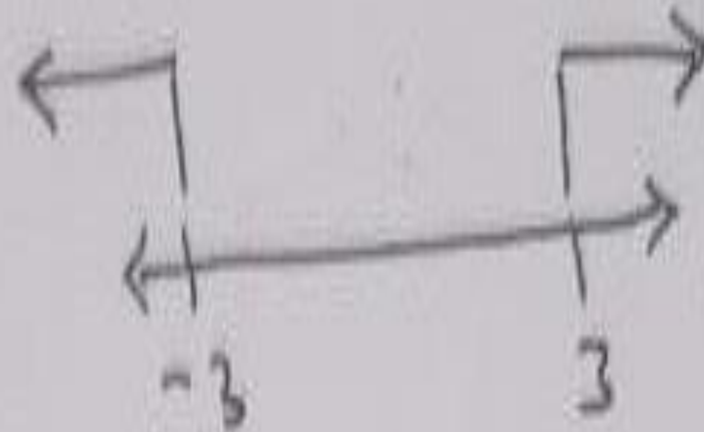
$S_1 = (-3,3)$



الاحتمال الثاني $(+\cdot-)$

$x-3>0 \wedge x+3<0$

$x>3 \wedge x<-3$



$S_2=\phi$

$S=S_1\cup S_2=(-3,3)\cup\phi=(-3,3)$

القيمة المطلقة / نقصد بالمقياس المطلق إلى x ، $|x|$

أي إيجاد الجذر التربيعي إلى x^2 أي إن $|x|=\sqrt{x^2}$

ويمكن كتابتها على النحو الآتي ...

$$|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x & \text{if } x>0 \\ 0 & \text{if } x=0 \\ -x & \text{if } x<0 \end{cases}$$

خواص القيمة المطلقة /

1- $|-a|=|a|$

2- $||a||=|a|$

3- $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$

4- $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

5- $|a+b|\leq|a|+|b|$

بصورة عامة

$|x|<a$

$S=\{x\in R;\ -a<x<a\}=(-a,a)$

$|x|\leq a$

$S=\{x\in R;\ -a\leq x\leq a\}=[-a,a]$

$|x|>b$

$S=\{x\in R;\ x>b \lor x<-b\}=R\setminus[-b,b]$

$|x|\geq b$

$S=\{x\in R;\ x\geq b \lor x\leq -b\}=R\setminus(-b,b)$

مثال/ حل المتراجحة

$$|7-4x| \geq 1$$

(من خواص القيم المطلقة)

$$|7| + |-4x| \geq 1$$

($\geq$)

$$7 + |-4| \cdot |x| \geq 1$$

$$7 + 4|x| \geq 1$$

$$4|x| \geq 1 - 7$$

$$4|x| \geq -6$$

$$|x| \geq \frac{-6}{4} \Longrightarrow |x| \geq \frac{-3}{2}$$

$$\therefore S = \left\{ x : x \in \mathbb{R} ; x \geq \frac{-3}{2} \vee x \leq \frac{3}{2} \right\}$$

هناك دوال لا تكون لا زوجية ولا فردية كمثال :

$$f(x) = (x-1)^2$$

$$f(-x) = [(-x)-1]^2 = [-(x+1)]^2 = x^2+2x+1 \neq f(x)$$

$$-f(x) = -(x-1)^2 = -(x^2-2x+1) = -x^2+2x-1 \neq f$$

إزاحة بيانات الدالة) إذا كانت $x \in R$, $y=f(x)$ فإن

1) $g(x) = f(x) + c$ إزاحة نحو الأعلى ↑

2) $k(x) = f(x) - c$ إزاحة نحو الأسفل ↓

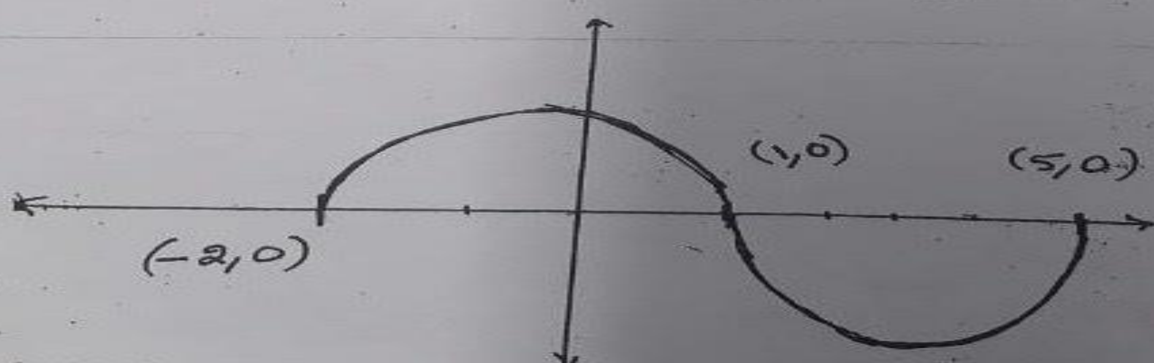
3) $h(x) = f(x+c)$ إزاحة نحو اليسار ←

4) $t(x) = f(x-c)$ إزاحة نحو اليمين →

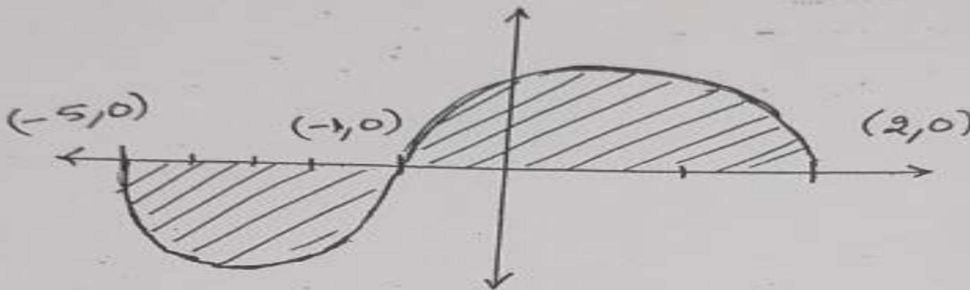
5) $L(x) = -f(x)$ انعكاس حول محور السينات x .

6) $m(x) = f(-x)$ انعكاس حول محور الصادات y .

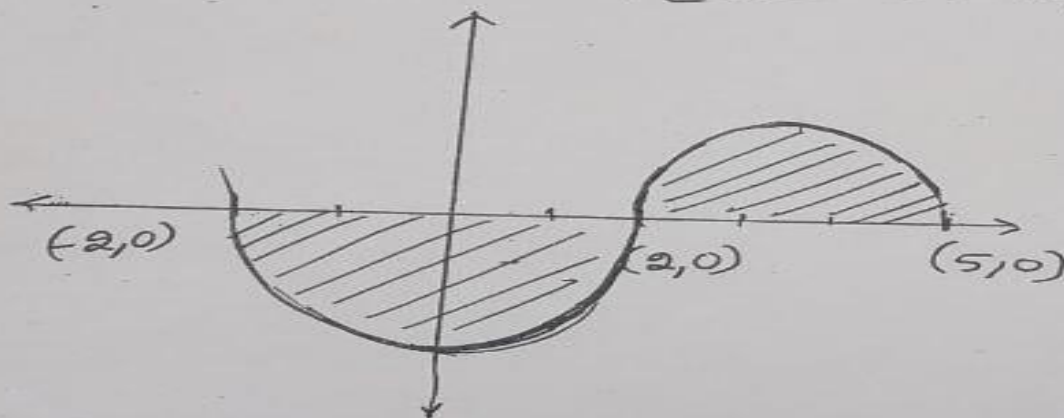
أمثلة : ارسم مخطط الدالة $-f(3-x)$ إذا كانت الدالة f معطاة بالشكل التالي ..



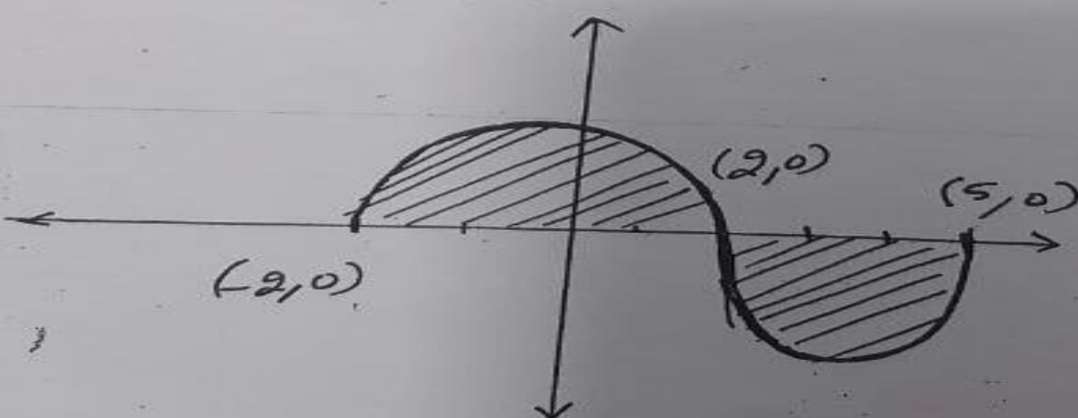
الحل/ نرسم أولاً $f(-x)$



ثانياً نقوم بتزحيف الدالة نحو اليمين



ثالثاً نرسم $-f(3-x)$ يعني انعكاس حول المحور x



محاضرات مادة الرياضيات

للمرحلة الاولى-قسم الكيمياء

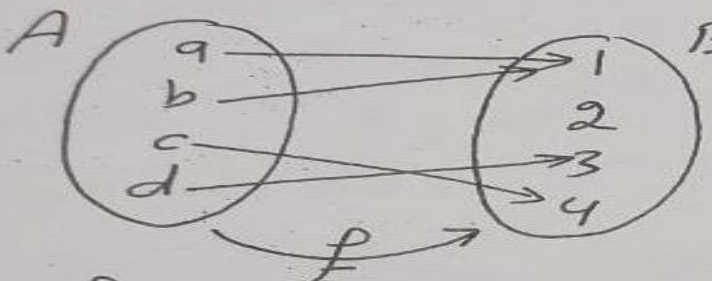
الفصل الثاني / الدوال   The Functions

تعريف / لتكن كل من المجموعتين A و B ليست خالية، (هي مجموعة كل الأزواج المرتبة (a,b) بحيث إن $a\in A$, $b\in B$ تدعى f دالة إذا و فقط إذا، كانت كل عنصر a في A يرتبط بعنصر وحيد b من B حيث يدعى A المجال Domain و B المجال المقابل Codomain

رياضياً

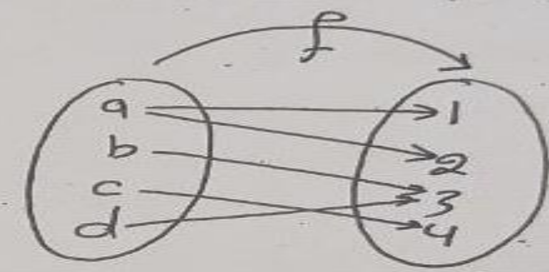
$f: A \longrightarrow B$ is function $\iff \forall a\in A, \exists b\in B \ni f(a)=b$

مثال



f is a function, $R_f=\{1,3,4\}$

;



f is not function since $f(a)=1=2$.

مثال / هل المعادلة $y^2=x$ دالة أم لا؟

$$y^2=x \xRightarrow{\text{بجذر الطرفين}} y=\mp\sqrt{x}$$

أي إنه $\forall x>0$ توجد لـ y صورتين هما $\mp\sqrt{x}$ ولذلك لا يمكن أن تمثل y دالة لـ x ..

هناك حالات لايجاد مجال الدالة :-

الحالة الاولى / اذا كانت الدالة متعددة حدود (polynomial) فمجالها يكون $\mathbb{R}$.

مثال / $f(x)=x^3+2x^2+3x-5 \Longrightarrow D_f=\mathbb{R}$.

الحالة الثانية اذا كانت دالة كسرية (Quotient) فمجالها يكون كل الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ماعدا الاعداد التي تجعل المقام صفراً..

الحالة الثالثة اذا كانت الدالة f جذرية (root) وجذرها أو أس الجذر هو عدد زوجي فإن مجال الدالة هو كل الأعداد الحقيقية التي تجعل تحت الجذر أكبر أو يساوي الصفر ..

مثال/ $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

$x^2-4 \geq 0 \Longrightarrow$

$(x-2)(x+2) \geq 0$

هناك إحتمالان وهما

إما $(+ \cdot +)$ أو $(- \cdot -)$

الاحتمال الأول $(+ \cdot +)$

$x-2 \geq 0 \quad \wedge \quad x+2 \geq 0$

$x \geq 2 \quad \wedge \quad x \geq -2$

$S_1 = [2, \infty)$

الاحتمال الثاني $(- \cdot -)$

$x-2 < 0 \quad \wedge \quad x+2 < 0$

$x < 2 \quad \wedge \quad x < -2$

$S_2 = (-\infty, -2]$

$D_f = S = S_1 \cup S_2$

$= R/(-2, 2)$.

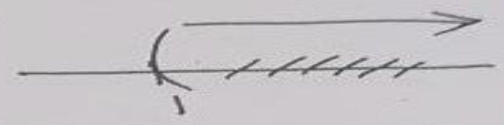
ملاحظة : في حالة الدالة كانت جذرية وأس الجذر هو عدداً فردياً فإن مجال الدالة هو كل الأعداد الحقيقية ..

$f(x) = \sqrt[3]{x+1}$, $f(x) = \sqrt[5]{2x+3}$

الحالة الرابعة // اذا كانت الدالة كسرية وتحوي جذراً بالمقام فان مجال الدالة هو كل الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ التي تجعل تحت الجذر اكبر من الصفر (الاس زوجي) ..

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$$

$$x-1 > 0 \Longrightarrow x > 1$$



$$D_f = (1, \infty).$$

ملاحظة / اذا كان أس الدالة الجذرية أساً فردياً فان مجال الدالة هو كل الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ماعدا القيم التي تجعل تحت الجذر للمقام صفراً ..

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x^2-4}} \Longrightarrow x^2-4=0 \Longrightarrow (x-2)(x+2)=0$$

$$D_f = \mathbb{R} / \{-2, 2\}$$

The Algebra of the functions | جبر الدوال

لتكن كل من f و g دالتين فإن :-

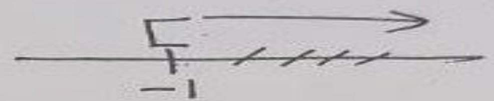
1. $f+g$ is a function Such that $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
2. $f-g$ is a function Such that $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$
3. $f \cdot g$ is a function Such that $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

مثال/ إذا كانت $f(x)=\sqrt{x+1}$, $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ نجد كل مما يلي: $f+g$ ، $f-g$ ، $f\cdot g$ ، f/g ، g/f

الحل نجد أولاً مجال كل دالة

$f(x)=\sqrt{x+1}$

$x+1\geqslant 0 \Longrightarrow x\geqslant -1$



$D_f=[-1,\infty)$.

$g(x)=\sqrt{4-x^2}$

$4-x^2\geqslant 0 \Longrightarrow (2-x)(2+x)\geqslant 0$

الاحتمال الأول

$(+\cdot +)$

$2-x\geqslant 0 \wedge 2+x\geqslant 0$

$2\geqslant x \wedge x\geqslant -2$

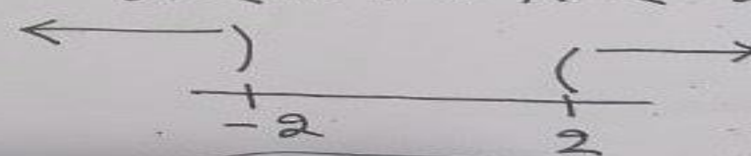
$\therefore S_1=[-2,2]$

الاحتمال الثاني

$(-\cdot -)$

$2-x<0 \wedge 2+x<0$

$2<x \wedge x<-2$



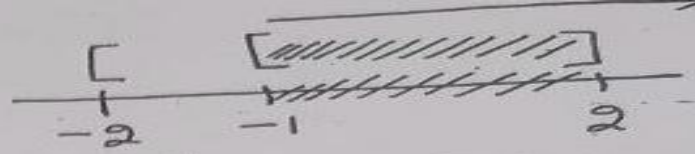
$S_2=\phi$

$\therefore S=S_1\cup S_2=\phi\cup[-2,2]=[-2,2]$

$\therefore D_g=[-2,2]$

$D_f=[-1,\infty)$

$D_f \cap D_g = [-1, 2]$



$D_{f/g} = D_f \cap D_g \,/\, \{x : g(x) = \sqrt{4-x^2} = 0\} = [-1, 2] \,/\, \{2\}$
$= [-1, 2)$.

$D_{g/f} = D_g \cap D_f \,/\, \{x : f(x) = \sqrt{x+1} = 0\} = [-1, 2] \,/\, \{-1\}$
$= (-1, 2]$.

* $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x^2}$
* $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x^2}$
* $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{4-x^2}$
* $(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \sqrt{x+1} \,/\, \sqrt{4-x^2}$

$(g/f)(x) = g(x)/f(x) = \sqrt{4-x^2} \,/\, \sqrt{x+1}$

الحصة الثانية 4 - الأسبوع

the greatest integer function (دالة الصحيح الأعظم)

هي دالة تنقل كل عدد حقيقي x إلى عدد صحيح وحيد أك
من كل الأعداد الصحيحة التي تكون أقل من x أو تساويه

أي أنه $[x] \leq x$

مثال/

$[2] = 2$, $[1.5] = 1$, $[-2.5] = -3$

بعبارة أخرى :

$f: x \longrightarrow [x]$, $[x] \leqslant x$

$Dom\, f = \{x : x \in R\} = \mathbb{R}$.

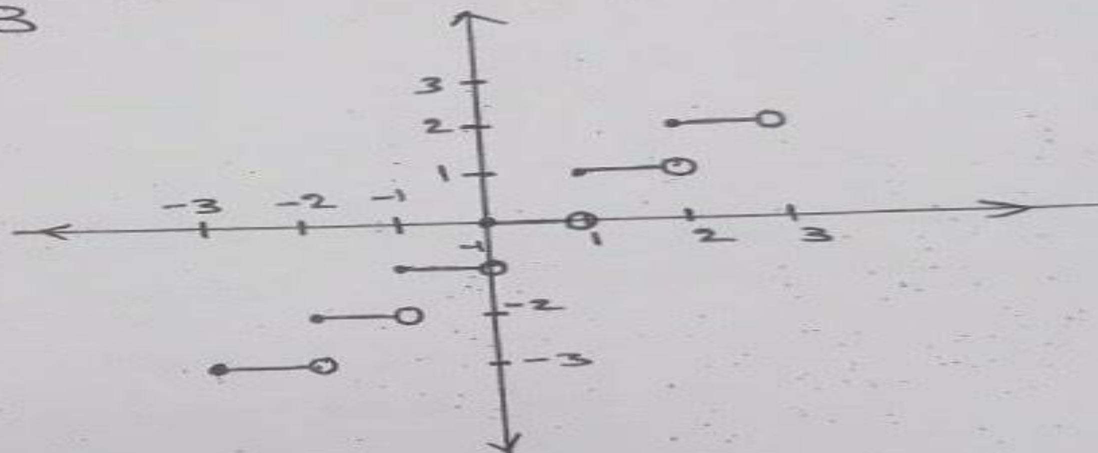
$Rang\text{-}f = \{y : y \in I\}$ where I is the integral numbers مجموعة الاعداد الصحيحة

لرسم دالة الصحيح الاعظم نأخذ هذا المثال بشكل فترة :

لتكن $f(x) = n$, $\forall x \in [n, n+1]$, $n \in I$.

$-3 \leqslant x \leqslant 3$

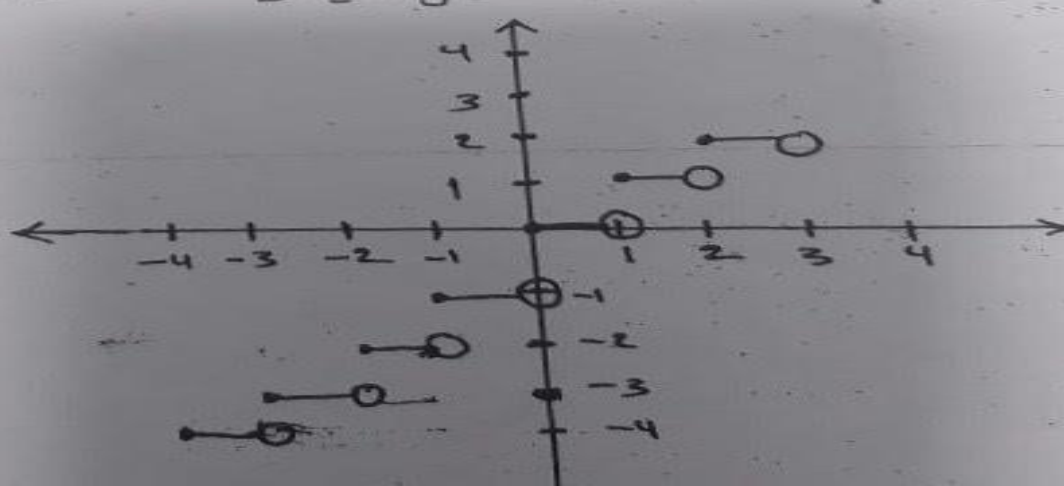
x	$[x]$
$-3 \leqslant x < -2$	-3
$-2 \leqslant x < -1$	-2
$-1 \leqslant x < 0$	-1
$0 \leqslant x < 1$	0
$1 \leqslant x < 2$	1
$2 \leqslant x < 3$	2



مثال/ ارسم مخطط الدالة لكل مما يأتي

$f(x) = [x]$, $-4 \leqslant x \leqslant 3$

x	$[x]$
$-4 \leqslant x < -3$	-4
$-3 \leqslant x < -2$	-3
$-2 \leqslant x < -1$	-2
$-1 \leqslant x < 0$	-1
$0 \leqslant x < 1$	0
$1 \leqslant x < 2$	1
$2 \leqslant x < 3$	2



Limits and Continuity الغايات والاستمرارية

الغاية تهتم بدراسة اتصال الدالة وقيمتها عندما يقترب تابعها من قيمة معينة.

نفرض ان الدالة $f(x)$ هي دالة حقيقية (تم ذكر انواع الدالة بالفصل السابق) وان c عدد حقيقي ايضا، عندئذ يمكن القول:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

اي ان الدالة $f(x)$ تكون قريبة جداً حسبما نريد من L عندما تقترب x من العدد c.

مثلاً طالب هدفه الوصول الى الجامعة للعلم x يمثل الطالب و $f(x)$ تمثل وسائل النقل المتاحة للوصول الى الجامعة و c تمثل المبالغ التي تدفع للوصول الى الهدف L وتمثل الجامعة.

ملاحظة: الآن سيتم تقسيم الغاية حسب نوع الدالة ونقطة الاقتراب x_0 وعلاقتها بالمجال.

[redacted]

① متعددة حدود ودالة جذرية اسها فردي :

بالتعويض المباشر بنقطة الاقتراب x_0: $x_0 \in D \longrightarrow L = \lim_{x \to x_0} f(x)$

ليست لها غاية / الغاية غير معرفة: $x_0 \notin D \longrightarrow L = \lim_{x \to x_0} f(x)$

احداهما معرف والثاني غير معرف. x_0 نقطة حدودية تقسم الى غايتين يمين ويسار L^- L^+:

$$L^+ = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

$$L^- = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

مثال (1): جد الغاية ان وجدت الدالة $f(x)=\sqrt[5]{3x^2-2x}$ للنقاط $x_0=2$ ، $x_0=0$ ، $x_0=1$ علماً ان الدالة معرفة ضمن الفترة $[1,\infty)$.

الحل:

$x_0=2 \in [1,\infty)$

$L=\lim_{x\to 2}\sqrt[5]{3x^2-2x} = \sqrt[5]{3(2)^2-2(2)} = \sqrt[5]{8}$

$x_0=0 \notin [1,\infty)$

$L=\lim_{x\to 0} f(x)$ الغاية غير معرفة او ليست موجودة

$x_0=1$ نقطة حدودية

1^- 1 1^+

$L^- \notin D$ $L^+ \in D$

$L^+=\lim_{x\to 1^+}\sqrt[5]{3x^2-2x} = \sqrt[5]{3(1^+)^2-2(1^+)} = \sqrt[5]{1} = 1$

$L^- =\lim_{x\to 1^-} f(x)$ الغاية غير موجودة غير معرفة.

مثال (2): جد الغاية ان وجدت للدالة $g(x)=x^2+x+5$ للنقاط $x_0=-3$ ، $x_0=-2$ ، $x_0=1$ علماً ان الدالة معرفة ضمن الفترة $(-\infty,-2)$.

الحل:

$x_0=-3 \in (-\infty,-2)$

$L=\lim_{x\to 3}(x^2+x+5) = (3)^2+3+5 = 17$

$x_0=-2$ نقطة حدودية

-2^- -2 -2^+

$L^- \in D$ $L^+ \notin D$

$L^+=\lim_{x\to -2^+} g(x)$ الغاية غير موجودة غير معرفة

$L^-=\lim_{x\to -2^-}(x^2+x+5) = (-2)^2+(-2)+5 = 7$

$x_0=1 \notin (-\infty,-2)$

$L=\lim_{x\to 1} g(x)$ الغاية غير معرفة او ليست موجودة

دالة الصحيح الاعظم :

بصورة عامة لاي نقطه اقتراب تجزء الغاية الى نهاية يمين نها$^{+}$ ونهاية يسار نها$^{-}$

الآن x_0 عدد صحيح $\longleftarrow$ نها$^{+}$ $\neq$ نها$^{-}$ الغاية غير موجودة

x_0 عدد نسبي $\longleftarrow$ نها$^{+}$ $=$ نها$^{-}$ الغاية موجودة

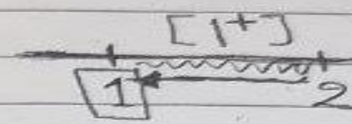
مثال: لتكن $g(x) = [X] + 2$ جد الغاية ان وجدت

عندما $X_0 = \frac{1}{2}$ ، $X_0 = 1$

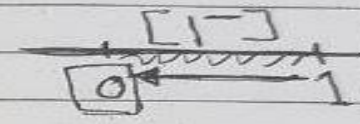
الحل:

$X_0 = 1$ عدد صحيح

$$L^+ = \lim_{x \to 1^+} ([x] + 2) = [1^+] + 2$$
$$= 1 + 2$$
$$= 3$$



$$L^- = \lim_{x \to 1^-} ([x] + 2) = [1^-] + 2$$
$$= 0 + 2$$
$$= 2$$

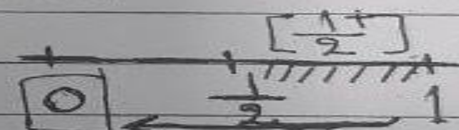


$L^+ \neq L^-$

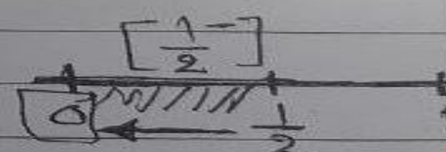
$3 \neq 2$ الغاية غير موجودة

$X_0 = \frac{1}{2}$ عدد نسبي

$$L^+ = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} ([x] + 2) = [\tfrac{1}{2}^+] + 2$$
$$= 0 + 2$$
$$= 2$$



$$L^- = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} ([x] + 2) = [\tfrac{1}{2}^-] + 2$$
$$= 0 + 2$$
$$= 2$$



$L^+ = L^- = 2$ الغاية موجودة

٥

الدالــة الكسرية :

اذا كانت نقطة الاقتراب نقطة معلومة فأن :

بالتعويض المباشر بنقطة الاقتراب x_0 $L = \lim_{x \to x_0} f(x) \leftarrow x_0 \in D \, , x_0 \notin \backslash\{\}$

الغاية غير موجودة الغاية غير معروفة $L = \lim_{x \to x_0} f(x) \leftarrow x_0 \notin D \, , x_0 \notin \backslash\{\}$

الغاية موجودة بعد التخلص من القيم التي تصفر المقام اما بالاختصار او التحليل او الضرب بالمرافق . $L = \lim_{x \to x_0} f(x) \leftarrow x_0 \notin D \, , x_0 \in \backslash\{\}$

مثال : جد الغاية ان وجدت للدالة $g(x) = \frac{x^2 - 1}{1 - x}$ للنقاط $x_0 = 1$ ، $x_0 = 3$

$x_0 = 3 \in D_g = \mathbb{R} \backslash \{1\}$

$$L = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 1}{1 - x} = \frac{(3)^2 - 1}{1 - 3} = \frac{8}{-2} = -4 .$$

$x_0 = 1 \in \backslash \{1\}$

$$L = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{-\cancel{(x-1)}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x + 1}{-1}$$

$$= \frac{1 + 1}{-1}$$

$$= -2$$

[redacted]

مثال: جد الغاية ان وجدت للنقاط

$$h(x) = \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$$

$x_0 = -3$ ، $x_0 = 0$ ، $x_0 = 1$

الحل//

$x_0 = -3 \notin D_h \ , \notin \backslash\{0\}$

$L = \lim\limits_{x \to -3} h(x)$ الغاية غير معرفة او ليست موجودة

$x_0 = 0 \in \backslash\{0\} \ , \notin D_h$

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + \cancel{2} - \cancel{2}}{x\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{0+2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$x_0 = 1 \in D_h \ , \notin \backslash\{\}$

$$L = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} = \frac{\sqrt{1+2} - \sqrt{2}}{1}$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

اما اذا كانت نقطة الاقتراب نقطة غير معلومة فأن :
هناك ثلاث انواع لها جميعها مشتركة بطريقة الحل اي يجب
ان تتبع الخطوات الاتية :
1) نحدد اكبر قوى لـ x .
2) نقسم اكبر قوى لـ x للبسط والمقام .
3) نوزع الغاية ونختصر فيظهر لنا الشكل $\lim_{x \to \mp\infty} \frac{1}{x}$ فنعوض
عنه بالصفر .
4) اعطاء النتيجة .

1) اذا كانت اكبر قوى لـ x في البسط فعند ادخال الغاية
لها نتوقع ما يلي : ∞ = استاره معامل اكبر قوى لـ x للبسط $\frac{\text{معامل اكبر قوى لـ } x \text{ للبسط}}{0}$

مثال / جد الغاية : $\frac{1}{0} = +\infty$ $\lim_{x \to \infty} \frac{x^5 - 2x + 1}{x^2 + 3}$ ⑤ الاكبر ②

الحل :
لا حظ ظهر لنا الشكل $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n}$
فاننا نستخدم القانون التالي
$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{1}{x^n} = \left[\lim_{x \to \mp\infty} \frac{1}{x}\right]^n$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^5}{x^5} - 2\frac{x}{x^5} + \frac{1}{x^5}}{\frac{x^2}{x^5} + \frac{3}{x^5}}$$

$$\frac{\lim_{x \to \infty} 1 - 2\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^4} + \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^5}}{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^3} + 3\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^5}}$$

$$\frac{1 - 2(0)^4 + (0)^5}{(0)^3 + 3(0)^5} = \frac{1}{0} = +\infty$$

ب) اذا كانت اكبر قوى لـ x متساوية في البسط والمقام فأن: عند ادخال الغاية نتوقع مايلي:

$$\frac{\text{معامل اكبر قوى لـ } x \text{ للبسط}}{\text{معامل اكبر قوى لـ } x \text{ المقام}}$$

مثال/ جد الغاية: $\frac{8}{22}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^7+2x-1}{22x^7-5} \quad \frac{(7)}{(7)}$$

الحل:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8\frac{x^7}{x^7}+2\frac{x}{x^7}-\frac{1}{x^7}}{22\frac{x^7}{x^7}-\frac{5}{x^7}}$$

$$\frac{\lim_{x\to\infty} 8 + 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^6} - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^7}}{22\lim_{x\to\infty} 1 - 5\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^7}} = \frac{8+2(0)^6-(0)^7}{22-5(0)^7} = \frac{8}{22} = \frac{4}{11}$$

ج) اذا كانت اكبر قوى لـ x في المقام فعند ادخال الغاية لها نتوقع مايلي:

$$\frac{0}{\text{معامل اكبر قوى لـ } x \text{ المقام}} = 0$$

مثال/ جد الغاية: $\frac{0}{4} = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-3x}{4x^9+10} \quad \frac{(4)}{(9)\ \text{اكبر}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^4}{x^9}-3\frac{x}{x^9}}{4\frac{x^9}{x^9}+\frac{10}{x^9}}$$

$$\frac{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^5} - 3\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^8}}{\lim_{x\to-\infty} 4 + 10\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^9}} = \frac{(0)^5-3(0)^8}{4+10(0)^9} = \frac{0}{4} = 0$$

The Continuity تعريف الاستمرارية

لتكن f دالة ، فأنه يقال f مستمرة عند النقطة x_0 اذا وفقط اذا تحقق مايلي :

{1} معرفة $f(x_0)$ معناه $x_0 \in D$

{2} معرفة $\lim_{x \to x_0} f(x)$ والذي تم ذكره في بداية الفصل

{3} $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

واجب / اختبار الاستمرارية لجميع الامثلة التي تم ذكرها سابقاً .

مثال (1) في بداية الفصل :

ابحث الاستمرارية عند النقاط $x_0 = 2$ ، $x_0 = 0$ ، $x_0 = 1$

الحل /

$x_0 = 2 \in [1, \infty)$

① معرفة $f(2)$

$f(2) = \sqrt[5]{3(2)^2 - 2(2)} = \sqrt[5]{8}$

② محلول .

③ $f(2) = \lim_{x \to 2} f(x) = \sqrt[5]{8}$

∴ الدالة مستمرة عند النقطة 2 .

$x_0 = 0 \notin [1, \infty) \implies f(0)$ ليست معرفة

∴ الدالة غير مستمرة عند النقطة 0 .

$x_0 = 1 \in [1, \infty)$

① معرفة $f(1) \Leftarrow f(1) = \sqrt[5]{3(1)^2 - 2(1)} = \sqrt[5]{1} = 1$

② محلول .

∴ الدالة غير مستمرة عند النقطة 1 .

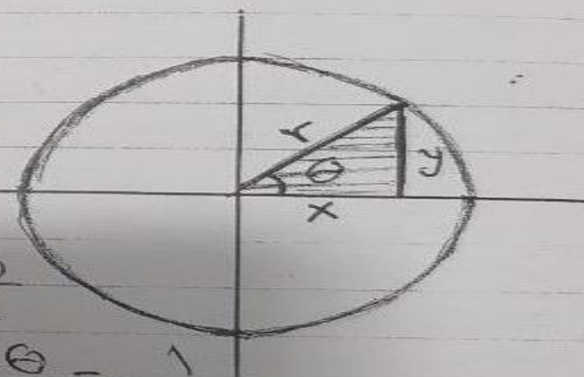
محاضرات مادة الرياضيات

للمرحلة الاولى-قسم الكيمياء

الدوال المثلثية: احدى الدوال الخاصة وتكتب على النحو التالي:

1. $\sin\theta$ دالة الجيب
2. $\cos\theta$ دالة الجيب تمام
3. $\tan\theta$ دالة الظل
4. $\csc\theta$ دالة القاطع تمام
5. $\sec\theta$ دالة القاطع
6. $\cot\theta$ دالة الظل تمام

هذه الدوال لها قوانين وخواص ناتجة عن المثلث قائم الزاوية المرسوم داخل دائرة نصف قطرها r على النحو التالي:



$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \Longrightarrow y = r.\sin\theta$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \Longrightarrow x = r.\cos\theta$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \Longrightarrow \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} \Longrightarrow \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$

$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} \Longrightarrow \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} \Longrightarrow \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

علماً أن معادلة الدائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r هي:

$$y^2 + x^2 = r^2$$

لكن $y = r\sin\theta$ & $x = r\cos\theta$ بالتعويض

بمعادلة الدائرة ينتج :

$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1} \quad (*)$$

وهذه العلاقة هامة جداً تسمى بالقانون الذهبي.

نستنتج من العلاقة $(*)$ العلاقات الآتية:

{1} $\div \cos^2\theta \rightarrow \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta} \rightarrow \boxed{\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta}$

{2} $\div \sin^2\theta \rightarrow 1 + \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \dfrac{1}{\sin^2\theta} \rightarrow \boxed{1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta}$

نفس الاشارة

{3} $\boxed{\sin(A \mp B) = \sin A \cdot \cos B \mp \cos A \cdot \sin B}$

* $\boxed{\sin(2A) = 2\sin A \cdot \cos A}$ {لا تحافظ على جنسها}

عكس الاشارة

{4} $\boxed{\cos(A \mp B) = \cos A \cos B \pm \sin A \cdot \sin B}$

* $\boxed{\cos(2A) = \cos^2 A - \sin^2 A}$ {تحافظ على جنسها}

* العلاقة اعلاه نعوض بدل $\sin^2 A$ ب $1-\cos^2 A$ مرة *

ونعوض بدل $\cos^2 A$ ب $1-\sin^2 A$ مرة اخرى ينتج :

$\boxed{\cos(2A) = 2\cos^2 A - 1}$ & $\boxed{\cos(2A) = 1 - 2\sin^2 A}$

نفس الاشارة

{5} $$\boxed{\tan(A \mp B) = \frac{\tan A \mp \tan B}{1 \pm \tan A \cdot \tan B}}$$

عكس الاشارة

جدول لقيم الزوايا للدوال المثلثية العامة:

Degrees	0	30	45	60	90	180	270	360
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0	$-\infty$	0

مثال// استخدم علاقات الدوال المثلثية لايجاد كل من الدوال الاتية:

$$\cos(2\pi-5)\ ,\ \cot(4-3\pi)\ ,\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}-2\right)$$

$$\sec^2(3X)\ ,\ \tan^2(2\pi)\ ,\ \tan(3\pi)$$

حل:

① $\cos(2\pi-5)$ $\qquad \cos(A-B)=\cos A.\cos B+\sin A.\sin$

$= \cos 2\pi . \cos 5 + \sin 2\pi . \sin 5$

$= 1 . \cos 5 + 0 . \sin 5$

$= \cos 5 .$

$$\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$\sec^2 3X$

$= \tan^2 3X + 1$

$= \left(\frac{\sin 3X}{\cos 3X}\right)^2 + 1$

$= \left(\frac{\sin(X+2X)}{\cos(X+2X)}\right)^2 + 1$

$\sin(A+B) = \sin A . \cos B + \cos A \sin B$

$\cos(A+B) = \cos A . \cos B - \sin A \sin B$

$= \left(\frac{\sin X . \cos 2X + \sin 2X \cos X}{\cos X . \cos 2X - \sin X . \sin 2X}\right)^2 + 1$

D. $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$= \frac{1}{\cos^2 3X}$

$\cos(A+B) = \cos A . \cos B - \sin A \sin B$

$= \left(\frac{1}{\cos(X+2X)}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos X . \cos 2X - \sin X . \sin 2X}\right)^2$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2\right)$

$\sin(A-B) = \sin A . \cos B - \cos A . \sin B$

$\sin\frac{3\pi}{2} . \cos 2 - \cos\frac{3\pi}{2} . \sin 2$

$(-1) . \cos 2 - (0) . \sin 2$

$-\cos 2$

تعريف {1} تكون الدالة f دالة زوجية اذا تحقق:

$f(x) = f(-x)$

{2} تكون الدالة f دالة فردية اذا تحقق: $f(-x) = -f(x)$

الدوال الزوجية

$\cos\theta$ $\sec\theta$

الدوال الفردية

$\sin\theta$ $\tan\theta$

$\cot\theta$ $\csc\theta$

ملاحظة مهمة / كيف نحدد ان الدالة متقابلة من الرسم.

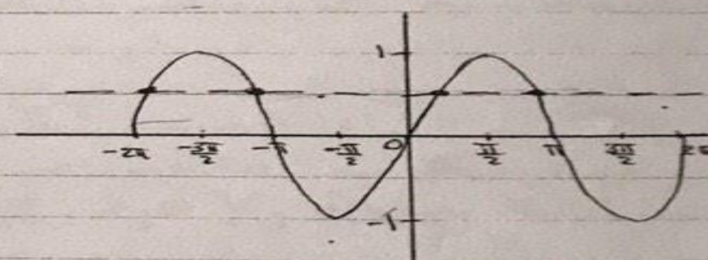
① لتحقيق شرط التباين نرسم خطاً مستقيماً افقياً اذا كان هناك اكثر من نقطة تقاطع معناه شرط التباين غير متحقق.

② لتحقيق شرط الشمول نرسم خطاً مستقيماً عامودياً اذا كان هناك اكثر من نقطة تقاطع معناه شرط الشمول غير متحقق.

معكوس الدوال المثلثية

س/ هل ان دالة $\sin x$ لها معكوس وضح ذلك بالرسم.

$y = \sin x$



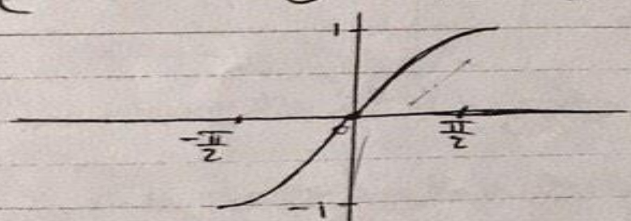
$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$

المجال   المجال المقابل

دالة دورية طول دورتها 2π

دالة $\sin x$ دالة غير متقابلة لان شرط التباين (١-١) غير متحقق نلاحظ اذا قطعنا الرسم اعلاه بخط مستقيم متقطع افقياً يوجد اكثر من نقطة تقاطع

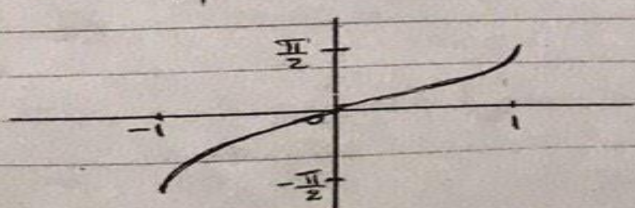
اي $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 \neq x_2$



ولتكون متقابلة يجب تقصير الدالة كالاتي:

$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$

الان يمكن التحدث عن معكوس للدالة

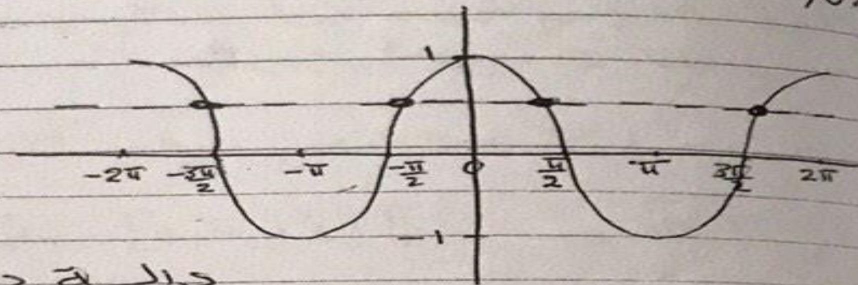


$\sin^{-1} : [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

تمثل دالة

س٢/ هل ان دالة $\cos x$ لها معكوس وضح ذلك بالرسم.

$y = \cos x$

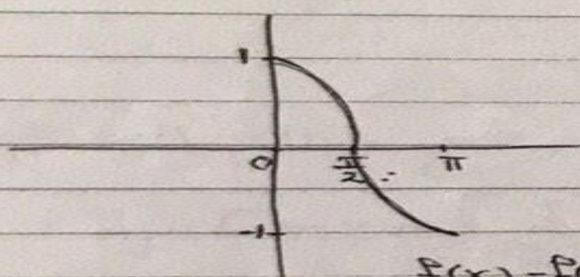


$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$

المجال   المجال المقابل

دالة دورية طول دورتها 2π

دالة $\cos x$ دالة غير متقابلة لان شرط التباين (1-1) غير متحقق
نلاحظ اذا قطعنا الرسم اعلاه بخط مستقيم متقطع افقي يوجد اكثر من نقطة تقاطع اي $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 \neq x_2$

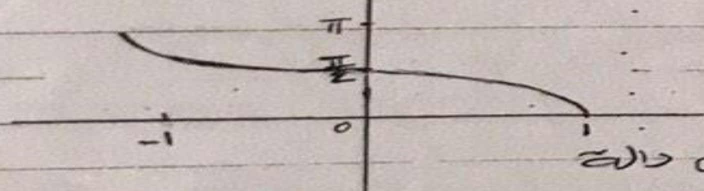


ولتكون متباينة يجب تقصير الدالة كالاتي:

$\cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$

الآن هي دالة متقابلة تحقق التباين $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

وشاملة $\forall x \in X, \exists y \in Y ; f(x) = y$



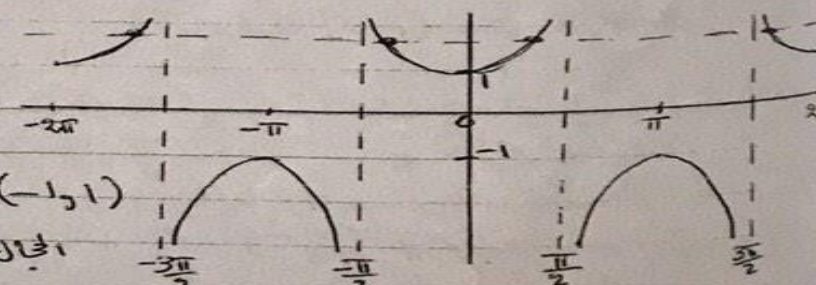
الآن يمكن التحدث عن معكوس الدالة

تمثل دالة $\cos^{-1} : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$

س٣/ هل ان دالة $\sec x$ لها معكوس وضح ذلك بالرسم.

دالة دورية طول دورتها 2π

$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$

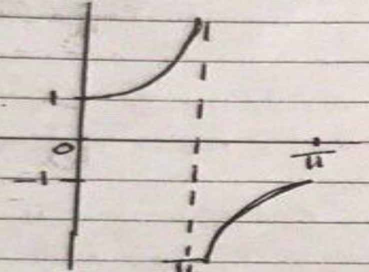


$\sec : \mathbb{R} \setminus \{x = \frac{\pi}{2} + n\pi\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus (-1,1)$

$n = 0, \mp 1, \ldots$

المجال   المجال المقابل

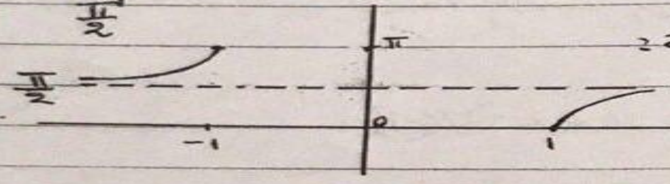
دالة $Sec\,x$ دالة غير متقابلة لان شرط التباين (1-1) غير متحقق فنلاحظ
اذا قطعنا الرسم اعلاه بخط مستقيم متقطع افقياً يوجد اكثر من نقطة تقاطع
اي $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 \neq x_2$



ولتكون متباينة يجب تقصير الدالة كالاتي :

$$Sec: [0,\pi] \setminus \{\tfrac{\pi}{2}\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus (-1,1)$$

الان يمكن التحدث عن معكوس الدالة :



$$Sec^{-1}: \mathbb{R} \setminus (-1,1) \longrightarrow [0,\pi]$$

تمثل دالة .

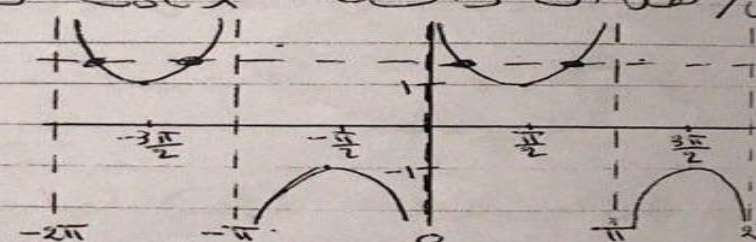
س/ هل ان دالة $Csc\,x$ لها معكوس وضح ذلك بالرسم.

$$y = Csc\,x = \frac{1}{\sin x}$$

$$Csc: \mathbb{R} \setminus \{x = n\pi\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus (-1,1)$$

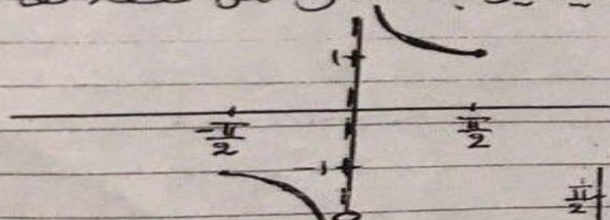
$n = 0, \mp 1, \ldots$

المجال   المجال المقابل



دالة دورية طول دورتها 2π

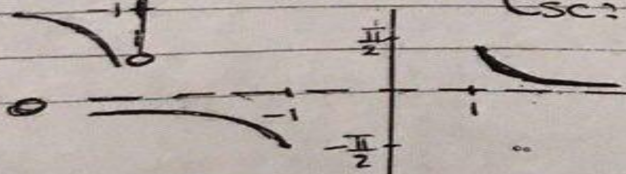
دالة $Csc\,x$ دالة غير متقابلة لان شرط التباين (1-1) غير متحقق نلاحظ
اذا قطعنا الرسم اعلاه بخط مستقيم متقطع افقياً يوجد اكثر من نقطة تقاطع
اي $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 \neq x_2$



ولتكون متباينة يجب تقصير الدالة كالاتي :

$$Csc: [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus (-1,1)$$

الان يمكن التحدث عن معكوس الدالة :

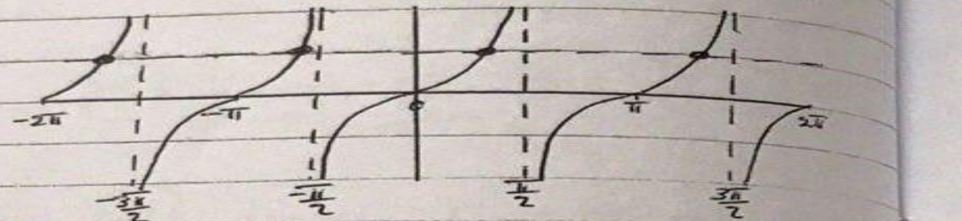


$$Csc^{-1}: \mathbb{R} \setminus (-1,1) \longrightarrow [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$$

تمثل دالة

س5/ هل ان دالة $\tan x$ لها معكوس ولماذا وضح ذلك بالرسم

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

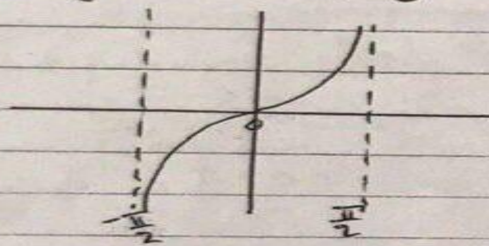


$$\tan : \mathbb{R} \setminus \{x = \tfrac{\pi}{2} + n\pi\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

دالة دورية طول دورتها π

دالة $\tan x$ دالة غير متقابلة لان شرط التباين (1-1) غير متحقق نلاحظ اذا قطعنا الرسم اعلاه بخط مستقيم متقطع افقياً يوجد اكثر من نقطة تقاطع اي

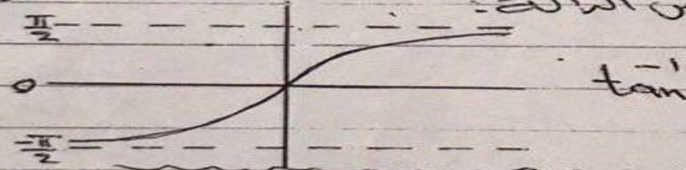
$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 \neq x_2$$



ولتكون متباينة يجب تقصير الدالة كالاتي:

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

الآن يمكن التحدث عن معكوس الدالة:

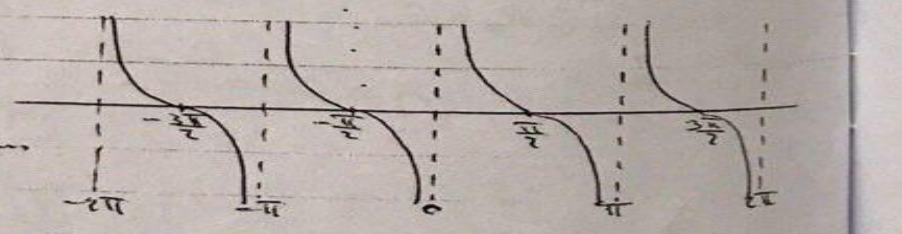


$$\tan^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

تمثل دالة

س6/ هل ان دالة $\cot x$ لها معكوس وضح ذلك بالرسم.

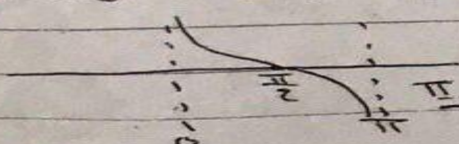
$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

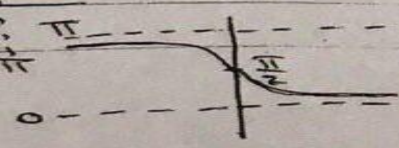


$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{n\pi\} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; n = 0, \mp 1, \dots$$

دالة دورية طول دورتها π.

دالة $\cot x$ دالة غير متقابلة لان شرط التباين غير متحقق نلاحظ اذا قطعنا الرسم اعلاه بخط مستقيم متقطع افقياً يوجد اكثر من نقطة تقاطع اي $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 \neq x_2$





ولتكون متباينة يجب تقصير الدالة كالاتي:

$$\cot : (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$$

الآن يمكن التحدث عن معكوس الدالة:

$$\cot^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi)$$

نهايات الدوال المثلثية :

{1} $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

{2} $\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0$

{3} $\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0$

{4} $\lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1$

find the following limite :

جد الغايات التالية

[1] $\lim_{t \to 0} \frac{\sin 5t}{t} \cdot \left(\frac{5}{5}\right)$

$5 \lim_{t \to 0} \frac{\sin 5t}{5t}$

but $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

$5 \cdot (1) = 5$

برهن كلاً مما يأتي :

(1) $$\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta \sin\theta} = \frac{1}{2}$$

الطرف الايسر $$= \lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta \sin\theta} \cdot \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos^2\theta}{\theta \sin\theta\,(1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin^{\cancel{2}}\theta}{\theta\, \cancel{\sin\theta}\,(1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \frac{1}{1+\cos\theta} \right)$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \frac{\lim_{\theta \to 0} 1}{\lim_{\theta \to 0} 1 + \lim_{\theta \to 0} \cos\theta}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$ الطرف الايمن

(2) $$\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta - \sin\theta}{\theta^3} = \frac{1}{2}$$

الطرف الايسر $$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta - \sin\theta}{\theta^3}$$

[redacted]

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \sin\theta}{\theta^3}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\frac{\sin\theta - \sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}}{\theta^3}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta\,(1-\cos\theta)}{\theta^3 \cdot \cos\theta} \cdot \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta\,(1-\cos^2\theta)}{\theta^3 \cos\theta\,(1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta \, \sin^2\theta}{\theta^3 \cos\theta\,(1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\sin^3\theta}{\theta^3} \cdot \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{1+\cos\theta} \right)$$

$$= \left(\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \right)^3 \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\cos\theta} \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{1+\cos\theta}$$

$$= (1)^3 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1+1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

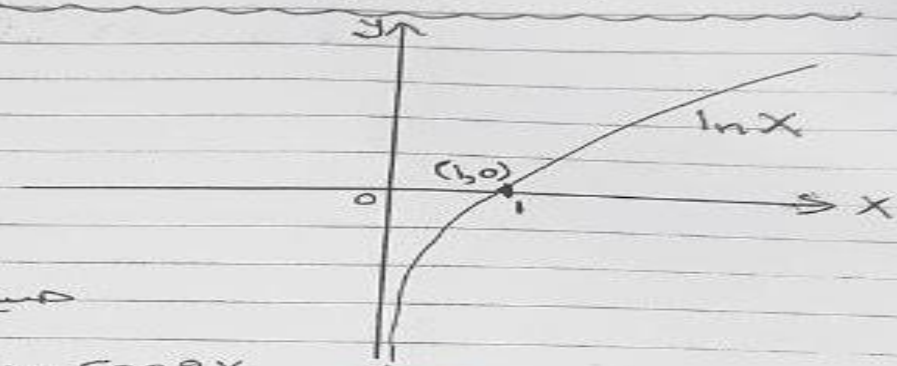
الطف
[illegible]

اللوغاريتم الطبيعي Natural Logarithms :

$y = \ln x \quad ; \; x > 0$

$\ln : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

المجال   المجال المقابل



$y = \ln U(x)$

حيث ان $U(x)$ هي اي دالة تم ذكرها سابقاً

Ex : $y = \ln(2x^3)$, $y = \ln \cos 2x$

خواص الدالة اللوغاريتمية :

1. $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$
2. $\ln 1 = 0$ — من الرسم واضح
3. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
4. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$
5. $\ln x^a = a \ln x \quad ; \; a \in \mathbb{R}$

Ex (1) : $\ln\left(\frac{25}{9}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right)^2 = 2\ln\left(\frac{5}{3}\right) = 2(\ln 5 - \ln 3$

Ex (2) : $\ln\sqrt{\frac{2}{3}}$ علماً ان $\ln 2 = 0.69$ & $\ln 3 = 1.09$

$\ln\sqrt{\frac{2}{3}} = \ln\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 3)$

[redacted]

$= \frac{1}{2}(0.69 - 1.09)$

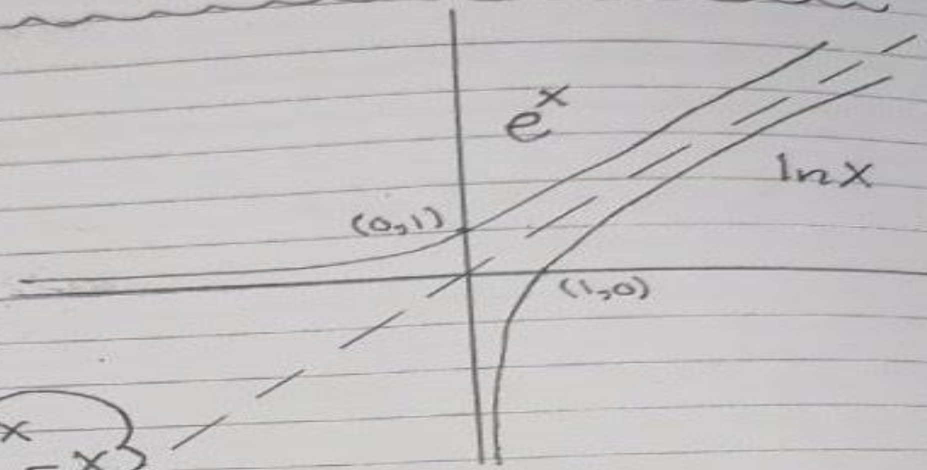
$= \frac{1}{\cancel{2}_{1}}(-0.\cancel{4}^{2}) = -0.2$

The exponential function الدالـة الاسـية

رمزها $\exp(x)$: او e^x

$$y = e^x$$

$$e^x : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$$



نلاحظ ان الدالة الاسية هي معكوس الدالة اللوغارتمية

$$e^x = \ln^{-1} x$$

$$\boxed{y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x \quad \text{since } e^{\ln x} = x}$$

$y = e^{u(x)}$; $u(x)$ اي دالة تم ذكرها سابقاً

Ex: $y = e^{\sin x}$, $y = e^{\sqrt{x}}$, $y = e^{2x^3}$

خواص الدالـة الاسـية :

{1} $e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$

{2} $e^0 = 1$ وذلك واضح من الرسم

{3} $e^{x_1 - x_2} = \dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}}$

{4} $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

{5} $(e^x)^r = e^{rx} \quad \forall r \in \mathbb{R}$

{6} $e^{\ln x} = x = \ln e^x$

Ex(1): $e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$

Ex(2): $e^{x + \ln x} = e^x \cdot e^{\ln x} = e^x \cdot x$

الدالة الاسية العامة : من تعريف الدالة اللوغاريتمية و الاسية سوف نعرف الدالة الاتية

$f(u) = a^{u}$; u هي اي دالة تم ذكرها سابقاً

$\because a = e^{\ln a}$

$a^{u} = e^{\ln a^{u}}$

$a^{u} = e^{u \ln a}$

خواص الدالة الاسية العامة :

{1} $a^{1} = a$

{2} $a^{0} = 1$

{3} $a^{x+y} = a^{x} \cdot a^{y}$

{4} $(a^{\frac{m}{n}}) = (a^{\frac{1}{n}})^{m}$

{5} $(a^{m})^{n} = a^{m \cdot n}$

{6} $\frac{a^{x}}{a^{y}} = a^{x-y}$

{7} if $a > 0 \Rightarrow a^{x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

{8} if $a > 1 \Rightarrow a^{x}$ دالة متزايدة

{9} if $0 < a < 1 \Rightarrow a^{x}$ دالة متناقصة

الدالة اللوغارتمية العامة (اللوغارتم الاعتيادي):

اذا كان $x = a^y$ فأن الدالة $y = \log_a x$

تعرف بالدالة اللوغارتمية بالاساس a.

العلاقة بين الدالة الاسية العامة والدالة اللوغارتمية العامة:

$$\boxed{y = \log_a x \iff x = a^y}$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad ; \quad a > 1$$

خواص اللوغارتم الاعتيادي:

1) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

2) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3) $\log_a x^y = y \log_a x$

4) $\log_a a = 1 \iff a = a^1$

5) $\log_a 1 = 0 \iff 1 = a^0$

Ex(1): $\log_e y = x = \ln y \iff y = e^x$

Ex(2): $\log_2 32 = 5 \iff 32 = 2^5$

جد قيمة x فيما يلي :

$$a^u = e^{u \ln a} \quad \text{--} \; 1$$

$$x^2 = e^{\ln 3} + 2^{\log_2 6}$$

$$x^2 = 3 + e^{\log_2 6 \ln 2}$$

$$x^2 = 3 + e^{\frac{\ln 6}{\cancel{\ln 2}} \cancel{\ln 2}}$$

$$x^2 = 3 + e^{\ln 6}$$

$$x^2 = 3 + 6$$

$$x^2 = 9$$

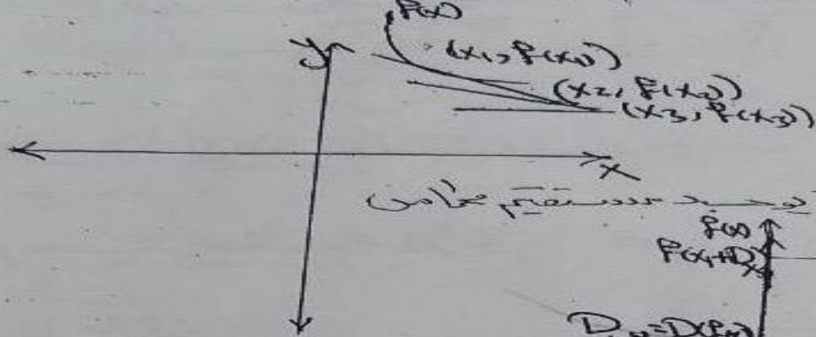
$$\therefore x = \mp 3$$

محاضرات مادة الرياضيات

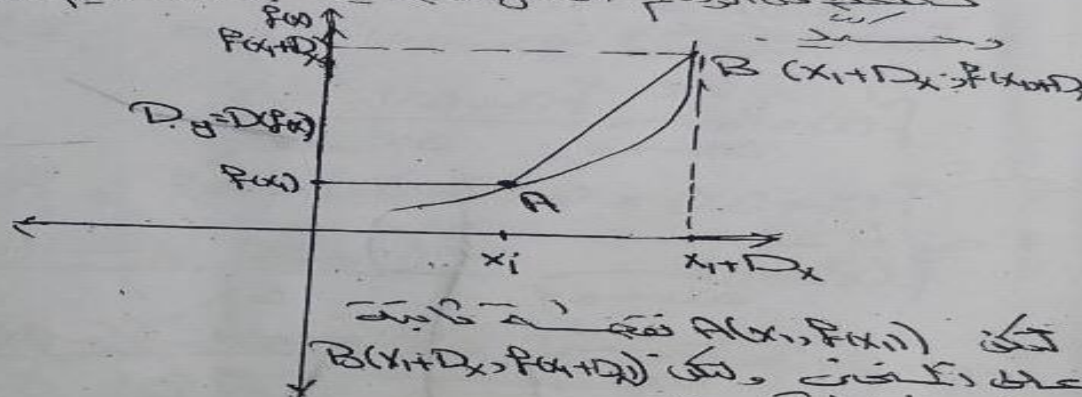
للمرحلة الاولى-قسم الكيمياء

الاشتقاق : The Differentiation :

لتكن $y = f(x)$



نلاحظ من الرسم أن لكل نقطة يوجد مستقيم مماس واحد وحيد



لتكن $A(x_1, f(x_1))$ نقطة ثابتة على المنحنى ولتكن $B(x_1+\Delta x, f(x_1+\Delta x))$ نقطة أخرى عليه :

$$\boxed{D_y = \Delta y} = f(x_1+D_x) - f(x_1) = \boxed{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}$$

وبناءً عليه تكون ميل القاطع AB :

$$\boxed{M = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}}$$

نلاحظ بأن المستقيم (AB) يبدأ بالانطباق على المستقيم المماس عند النقطة (A) أكثر فأكثر كلما تناقص طول (Δx) أي أن ميل المستقيم (AB) سيصبح مساوياً لميل المماس عند النقطة (A) كلما اقترب Δx إلى الصفر، علماً بأن ميل المماس يمثل مشتقة الدالة عند نقطة (A) ويمكن كتابتها على النحو الآتي :

$$\boxed{M = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}}$$

فتصبح المشتقة على النحو الآتي :-

$$\boxed{y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}}$$

بمعنى أن الدالة تكون قابلة للاشتقاق عندما تكون غايتها موجودة .

مثال/ جد مشتقة الدالة باستخدام التعريف $f(x) = \cancel{4(x-2)}$ $= 4x-2$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x) = 4(x+\Delta x) - 2 \quad , \quad f(x) = 4(x-2) .$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(x+\Delta x) - 2 - (4x-2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{4x} + 4\Delta x - \cancel{2} - \cancel{4x} + \cancel{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} 4 = 4 .$$

ميل العمود $M_{\perp} = \frac{-1}{M}$

The Vertical Line المستقيم العمود

يسمى المستقيم العمود على المستقيم المماس لمنحني عند نقطة التماس بالمستقيم العمود على المنحني عند تلك النقطة ..

معادلة المستقيم المماس $y - y_1 = M(x - x_1)$

معادلة المستقيم العمود $y - y_1 = M_{\perp}(x - x_1)$

مثال) جد معادلة المستقيم المماس والمستقيم العمود عند النقطة (4,2) للمنحني الآتي : $F(x)=\sqrt{x}$.

الحل/ لإيجاد معادلة المستقيم والمماس والعمود يجب إيجاد الميل من خلال المشتقة حسب التعريف وكما يلي :

$M = f'(x)_{(4,2)}$ الميل هو المشتقة عند النقطة (4,2)

حسب التعريف :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{(\Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x}+\Delta x - \cancel{x}}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{M} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$ هذا الميل

$$\boxed{M_{(4,2)}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2.2} = \frac{1}{4}$$ هذا الميل عند النقطة (4,2)

معادلة المستقيم المماس هي :

$$y - y_1 = M(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x-4) \Longrightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x + 1}$$

ميل العمود

$$M_\perp = -1/M$$

$$M_\perp = -1/\tfrac{1}{4} = -4$$

معادلة المستقيم العمود هي :

$$y - y_1 = M_\perp(x - x_1)$$

$$y - 2 = -4(x-4) \Longrightarrow \boxed{y = -4x + 18}$$

المشتقات — The derivative

تعريف :- (المشتقة الأولى)

المشتقة الأولى للدالة $y=f(x)$ المعرفة على الفترة $[a,b]$ هي دالة أخرى يرمز لها بالرمز $y'=f'(x)$ وتكون قيمتها عند أي نقطة $x_1\in(a,b)$ هي :-

$$f'(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

ملاحظة :- يرمز لمشتقة الدالة $f(x)$ أحد الرموز الآتية :

$$y',\quad f'(x),\quad \frac{df(x)}{dx},\quad \frac{dy}{dx}.$$

قوانين الاشتقاق :-

هناك قواعد وقوانين يجب معرفتها لعملية الاشتقاق وهي كما يلي :-

(1) اذا كانت $f(x)=c$ حيث (c) هي ثابت حقيقي. فإن $f'(x)=0$ (مشتقة الثابت = صفراً)

(2) اذا كان (n) عدداً صحيحاً موجباً وكانت $(f(x)=x^n)$ فإن :

$$f'(x)=n\,x^{n-1}$$

مثال: جد مشتقة الدالة $f(x)=x^3$

$$f'(x)=3x^2.$$

(3) اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق و (c) ثابت فإن :

$$\frac{d}{dx}[c\,f(x)]=c\cdot f'(x).$$

مثال/ $f(x) = 3x^4$ جد المشتقة :-

$$f'(x) = 3 \cdot 4 \cdot x^3 = (3 \cdot 4)\, x^3 = 12x^3 .$$

④ اذا كانت كل من $f(x)$ و $g(x)$ دوال قابلة للاشتقاق فإن

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) \mp g(x)\right] = f'(x) \mp g'(x) .$$

مثال جد المشتقة للدالة $f(x) = 4x^3 + 5x^2$

$$f'(x) = 12x^2 + 10x .$$

⑤ اذا كان كل من $f(x)$ و $g(x)$ دوال قابلة للاشتقاق فإن :-

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) .$$

(الدالة الاولى × مشتقة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الاولى)

⑥ اذا كانت $y = [f(x)]^n$ حيث ان $n \in I$ وان $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق فإن :-

$$\frac{dy}{dx} = n\,[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x) .$$

مثال جد مشتقة الدالة $y = [3x^2 + 1]^2$

$$y' = 2 \cdot [3x^2 + 1]^1 \cdot (6x) .$$

$$= 12x \cdot (3x^2 + 1) .$$

(٤)

⑦ اذا كانت $f(x) = x^n$ حيث إن n عدداً نسبياً فإن

$$\frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$

مثال: اذا كانت $y = \sqrt{(4x+2)^5}$ جد المشتقة لها؟

$$f(x) = \left((4x+2)^5\right)^{1/2} = (4x+2)^{\frac{5}{2}}$$

$$y' = f'(x) = \frac{5}{2} \cdot (4x+2)^{\frac{5}{2}-1} \cdot 4$$

$$= 10 \cdot (4x+2)^{\frac{3}{2}} = 10 \cdot \sqrt{(4x+2)^3}$$

⑧ اذا كان كل من $f(x)$ ، $g(x)$ دوال قابلة للاشتقاق بحيث إن $g(x) \neq 0$ فإن:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\left[\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}\right]$$

قانون السلسلة The Chain Rule

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

لنكن لدينا المثال التالي: ليكن لدينا جسم يتحرك على الخط الذي معادلته $y = 3x - 1$ بطريقة يجعل الاحداثي (x) عند الزمن (t) وفقا للمعادلة $x = 2t$ احسب dy/dt.

الحل: بتعويض x بالمعادلة y فتصبح

$$y = 3(2t) - 1$$
$$y = 6t - 1$$

عندها نشتق بالنسبة إلى (t)

$$y = 6t - 1 \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = 6.$$

يجب أن نلاحظ أن $\frac{dy}{dx} = 3$ ، $\frac{dx}{dt} = 2$

نستنتج من هذا أن :-

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = 6 = 3 \cdot 2$$

إشتقاق الدوال المثلثية

① $y = f(x) = \sin x$.

$y' = \cos x$

لتكن $u=g(x)$ أي دالة فإن

$y = \sin u \Longrightarrow y' = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$ هي مشتقة الزاوية

② $y = f(x) = \cos x$

$y' = -\sin x$

$y = \cos u \Longrightarrow y' = -\sin u \cdot \frac{du}{dx}$

③ $y = f(x) = \tan x$

$y' = \sec^2 x$

$y = \tan u \Longrightarrow y' = \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx}$

④ $y = \cot x \Longrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\csc^2 x \; dx$

$y = \cot u \Longrightarrow y' = -\csc^2 u \cdot \frac{du}{dx}$

⑤ $y = \sec x \Longrightarrow y' = \sec x \cdot \tan x$

$y = \sec u \Longrightarrow y' = \sec u \cdot \tan u \cdot \frac{du}{dx}$

⑥ $y = \csc x \Longrightarrow y' = -\csc x \cdot \cot x$

$y = \csc u \Longrightarrow y' = -\csc u \cdot \cot u \cdot \frac{du}{dx}$

مثال — جد المشتقة للدالة

$y = f(x) = \sin 5x$ ، $y = \sec(2x + x^2)\tan 3x$ ، $y = \sqrt{\cos x^2}$

حل

① $y = \sin 5x$

$y' = \cos 5x \cdot 5 = 5 \cdot \cos 5x$

② $y = \sqrt{\cos x^2} = (\cos x^2)^{1/2}$

$y' = \frac{1}{2}(\cos x^2)^{-1/2} \cdot (-\sin x^2) \cdot 2x$

$= \frac{1}{2}(\cos x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x \sin x^2)$

③ $y = \sec(2x + x^2) \cdot \tan 3x$

$y' = \sec(2x + x^2)(\sec^2 3x \cdot 3) + (\tan 3x)\left[\sec(2x + x^2)\tan(2x + x^2) \cdot (2 + 2x)\right]$

مشتقة الدوال المثلثية العكسية:

لتكن: $u = f(x)$ فإن:

1. $$\frac{d(\sin^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

2. $$\frac{d(\cos^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

3. $$\frac{d(\tan^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

4. $$\frac{d(\cot^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

5. $$\frac{d(\sec^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{|u| \cdot \sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$$

6. $$\frac{d(\csc^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{|u| \sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال / جد مشتقة الدوال:

$y = \sin^{-1} 2x \cdot \cos^{-1} 2x$, $y = \sqrt{\csc^{-1} 3x}$, $y = \sin^{-1}\sqrt{x}$

الحل

1. $$y = \sin^{-1}\sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. $$y = \sin^{-1} 2x \cdot \cos^{-1} 2x$$

$$y' = \sin^{-1} 2x \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot 2 + \cos^{-1} 2x \cdot \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

اشتقاق الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية

كما نعرف إن الدالة اللوغاريتمية هي $y=\ln x$ فتكون المشتقة

$$y' = 1/x$$

اذا كانت $u=g(x)$ و تكن $y=\ln u$ فإن المشتقة تكون

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$$

مثال: جد المشتقة للدالة $y=\ln(3x+5)^2$.

الحل:

$$y' = \frac{1}{(3x+5)^2}\cdot 2(3x+5)(3)$$

$$y' = \frac{6(3x+5)}{(3x+5)^2}$$

مثال

$$y=\ln(\cos x)$$

$$y' = \frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

الدالة الأسية

هي: شكل الدالة الأسية كما عرفنا سابقا

$$y = e^{x}$$

مشتقتها هي

$$\boxed{y' = e^{x}}$$

اذا كان $u = g(x)$ فإن $y = e^{u}$

مشتقتها هي:

$$\boxed{y' = e^{u} \cdot \frac{du}{dx}}$$

مثال 1

$$y = e^{x^2+2x+1}$$

$$y' = e^{x^2+2x+1} \cdot (2x+2).$$

مثال 2

$$y = e^{\sin x + \cos x}$$

$$y' = e^{\sin x + \cos x} \cdot (\cos x - \sin x)$$

مثال 3

$$y = e^{\ln x}$$

$$y' = e^{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

مثال

لتكن $y = a^x$ (مشتقة الدالة الأسية العامة)

فإن المشتقة تكون

$$\boxed{y' = a^x \cdot \ln a}$$

إذا كانت $u = g(x)$ ، $y = a^u$ فإن

$$\boxed{y' = a^u \cdot \ln a \cdot \frac{du}{dx}}$$

example:

① $y = 5^{2x} \Rightarrow y' = 5^{2x} \cdot \ln 5 \cdot 2$

$y' = 2 \cdot 5^{2x} \cdot \ln 5$.

② $y = 6^{\sin x + \ln x + 3}$

$y' = 6^{\sin x + \ln x + 3} \cdot \ln 6 \cdot \left(\cos x + \frac{1}{x}\right)$.

③ $y = 7^{-\cos x + e^x + 2x + 1}$

④ $y = 5^{-\sin x + 17x^2 + 7x + 2}$.

لتكن $y = \log_a^x$ (مشتقة الدالة اللوغاريتمية العامة)

$y = \frac{\ln x}{\ln a} \ni a \neq 1, a > 0$

فإن

$$\boxed{y' = \frac{1}{\ln a \cdot x}}$$

لتكن $y = \log_a^u$, $u = g(x)$ فإن:

$$\boxed{y' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot \frac{du}{dx}}$$

مثال/

$$y = \log_5 e^{x+1}$$

$$y' = \frac{1}{e^{x+1}\cdot \ln 5}\cdot e^{x+1}\cdot 1 = \frac{\cancel{e^{x+1}}}{\cancel{e^{x+1}}\cdot \ln 5} = \frac{1}{\ln 5}$$

مثال/

$$y = \log_9 (2x^3+3x)$$

$$y' = \frac{1}{(2x^3+3x)\cdot \ln 9}\cdot 6x^2+3 = \frac{6x^2+3}{(2x^3+3x)\ln 9}$$

مثال/ جد مشتقة الدوال الآتية :

$$y = \log_7 (-3x^2+6) \,,\quad y = \log_{e^x} e^{2x^2+4x+1} \,,$$

$$y = \log_{e^{x^2}} (7x^2+7x+2)$$

ملاحظة/ إحدى المسائل المهمة في الدوال اللوغاريتمية أن يكون الأساس متغير والأس متغير على النحو التالي :-

مهمة جدا

$$y = x^{\sin x} \,,\quad y = \sin x^{\tan x}$$

لإيجاد المشتقة مثل هذه الدوال نستخدم الاسلوب للاشتقاق اللوغاريتمي وعلى النحو التالي :-

1. $y = x^{\sin x}$

$\ln y = \ln x^{\sin x}$ نضيف ln إلى الطرفين

$\Longrightarrow \ln y = \sin x \cdot \ln x$ حسب خواص ln $\left\{ \ln a^{2} = 2\ln a \right.$

$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{\sin x}{x} + \ln x \cdot \cos x$ نشتق الطرفين

$y' = y\left(\ln x \cos x + \frac{\sin x}{x}\right)$

$y' = x^{\sin x} \cdot \left(\ln x \cos x + \frac{\sin x}{x}\right).$

2. $y = \sin x^{\tan x}$

$\ln y = \ln \sin x^{\tan x}$

$\ln y = \tan x \cdot \ln \sin x$

$\frac{1}{y} \cdot y' = \tan x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + \ln \sin x \cdot \sec^2 x.$

$y' = y \cdot (\tan x \cdot \cot x + \ln \sin x \cdot \sec^2 x)$

$y' = \sin x^{\tan x} \cdot (\tan x \cdot \cot x + \ln \sin x \cdot \sec^2 x).$

$y' = \sin x^{\tan x}\left(\frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\cos x}} \frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\sin x}} + \ln \sin x \cdot \sec^2 x\right)$

$y' = \sin x^{\tan x} \cdot (1 + \ln \sin x \cdot \sec^2 x)$

سؤال/ جد مشتقة الدوال الآتية :

((واجب))

1- $y = \cot x^{\cot x}$

2- $y = x^{\sec^2 x}$

3- $y = x^{e^x}$

4- $y = \sin x^{\cos x}$

5- $y = -\tan x^{\csc x}$

محاضرات مادة الرياضيات

للمرحلة الاولى-قسم الكيمياء

Integration التكامل

{1} The indefinite integral التكامل الغير محدد

تعريف: يعرف التكامل الغير محدد للدالة f ب:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

حيث c هو ثابت التكامل و $F(x)$ هو عكس مشتقة الدالة $f(x)$ حيث:

$$F'(x) = f(x)$$

ويمكن تعريف التكامل على أنه عكس المشتقة.

Theorems :-

{1} For any rational power $r \neq -1$

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$$

{2} For any constant a

$$\int a\,dx = ax + c$$

{3} For any constant a

$$\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

④ $\int [f(x) \mp g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \mp \int g(x)\, dx$

$\therefore$ from ③ and ④ we have:

$$\int [a f(x) \mp b g(x)]\, dx = a \int f(x)\, dx \mp b \int g(x)\, dx$$

s.t a, b constants

Examples:-

① $\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + c = \frac{x^6}{6} + c$

② $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx$

$= \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = \frac{x^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{2x^2} + c$

③ $\int 3x^5 dx = 3 \int x^5 dx$

$= 3 \cdot \frac{x^{5+1}}{5+1} + c = \cancel{3}^{1} \cdot \frac{x^6}{\cancel{6}_2} + c = \frac{x^6}{2} + c$

④ $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{1/2} dx$

[redacted]

$= \frac{x^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$

$= \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

⑤ $$\int (3+6x^2)\,dx = \int 3\,dx + \int 6x^2\,dx$$
$$= 3\int dx + 6\int x^2\,dx$$
$$= 3x + \cancel{6}^{\,2}\cdot\frac{x^3}{\cancel{3}_{\,1}} + c = 3x+2x^3+c$$

⑥ $$\int \left(5x^4 - \frac{10}{x^2}\right)dx = \int 5x^4\,dx - \int \frac{10}{x^2}\,dx$$
$$= 5\int x^4\,dx - 10\int x^{-2}\,dx$$
$$= \cancel{5}^{\,1}\cdot\frac{x^5}{\cancel{5}_{\,1}} - 10\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + c$$
$$= x^5 + \frac{10}{x} + c$$

: Integration of the Power Functions $[f(x)]^n$ تكامل الدالة

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

s.t $n \neq -1$ and c any constant.

Examples:-

$*_1$ $$\int \underbrace{[5+6x]^2}_{[f(x)]^n} \cdot \underbrace{6}_{f'(x)}\,dx = \frac{[5+6x]^3}{3} + c$$

$*_2$ $$\int [1+5x^2]^9 \cdot x\,dx$$ $f(x) = 1+5x^2$, $f'(x) = 10x$

$$\frac{10}{10}\int [1+5x^2]^9 \cdot x\,dx = \frac{1}{10}\int \underbrace{[1+5x^2]^9}_{[f(x)]^n} \cdot \underbrace{10x}_{f'(x)}\,dx$$
$$= \frac{1}{10}\cdot\frac{[1+5x^2]^{10}}{10} + c = \frac{[1+5x^2]^{10}}{100} + c$$

تكاملات الدوال المثلثية :-

{1} $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$

$\int \sin(u)\,\frac{du}{dx} = -\cos(u) + C$

{2} $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$

$\int \cos(u)\,\frac{du}{dx} = \sin(u) + C$

{3} $\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x) + C$

$\int \sec^2(u)\,\frac{du}{dx} = \tan(u) + C$

{4} $\int \csc^2(x)\,dx = -\cot(x) + C$

$\int \csc^2(u)\,\frac{du}{dx} = -\cot(u) + C$

{5} $\int [\sec(x) \cdot \tan(x)]\,dx = \sec(x) + C$

$\int [\sec(u) \cdot \tan(u)]\,\frac{du}{dx} = \sec(u) + C$

{6} $\int [\csc(x) \cdot \cot(x)]\,dx = -\csc(x) + C$

$\int [\csc(u) \cdot \cot(u)]\,\frac{du}{dx} = -\csc(u) + C$

(17)

Examples:

مشتقة الداخل $= 2$

(1) $\int \cos(2x)\,dx = \frac{2}{2}\int \cos(2x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \cos(2x)\cdot 2\,dx$

$= \frac{1}{2}\sin(2x) + C$

مشتقة الداخل $= 4x$

(2) $\int x\sin(2x^2)\,dx = \frac{4}{4}\int x\cdot\sin(2x^2)\,dx$

$= \frac{1}{4}\int \sin(2x^2)\cdot 4x\,dx$

$= \frac{1}{4}\cdot -\cos(2x^2) + C$

$= \frac{-1}{4}\cos(2x^2) + C$

(3) $\int (\sec^2(x) + 4x^8)\,dx = \int \sec^2(x)\,dx + 4\int x^8\,dx$

$= \tan(x) + 4\cdot\frac{x^9}{9} + C$

(4) $\int 3\csc(x)\cdot\cot(x)\,dx = 3\int[\csc(x)\cdot\cot(x)]\,dx$

$= -3\csc(x) + C$

(5) $\int \csc^2(\sqrt{x})\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}$

مشتقة الداخل $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\frac{2}{2}\int \csc^2(\sqrt{x})\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int \csc^2(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$= -2\cot(\sqrt{x}) + C$

تكامل الدالة اللوغارتمية والدالة الاسية :-

{1} $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$; $f(x) \neq 0$ and $x \neq 0$

{2} $\int e^x dx = e^x + c$

$\int e^u \frac{du}{dx} = e^u + c$

Examples:-

① $\int \frac{3x^2}{x^3} dx$

let $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$

$\Rightarrow \int \frac{3x^2}{x^3} dx = \ln |x^3| + c$

② $\int \frac{\sec^2(x)}{\tan(x)} dx$

let $f(x) = \tan(x)$, $f'(x) = \sec^2(x)$

$\Rightarrow \int \frac{\sec^2(x)}{\tan(x)} dx = \ln |\tan(x)| + c$

③ $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$; $f(x) = x$, $f'(x) = 1$

④ $\int e^{x^4}\cdot(4x^3)\,dx$

let $u = x^4$, $u' = 4x^3$

$\Rightarrow \int e^{x^4}\cdot(4x^3)\,dx = e^{x^4} + c$

⑤ $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

let $f(x) = x^2+1$, $f'(x) = 2x$

$\Rightarrow \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{2}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

$= \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c$

⑥ $\int 3e^{4x}\,dx$

let $u = 4x$, $u' = 4$

$\Rightarrow \int 3e^{4x}\,dx = \frac{4}{4}\int 3e^{4x}\,dx = \frac{3}{4}\int e^{4x}\,4\,dx$

$= \frac{3}{4}e^{4x} + c$

⑦ $\int \frac{x^3+1}{x}\,dx = \int \left(\frac{x^3}{x} + \frac{1}{x}\right)dx$

$= \int x^2\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx$

$= \frac{x^3}{3} + \ln|x| + c$

⑧ $\int x e^{-x^2} dx$

let $u = -x^2$, $u' = -2x$.

$\Rightarrow \int x e^{-x^2} dx = \frac{-2}{-2} \int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} \cdot (-2x)\, dx$

$= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$

⑨ $\int \sin^{1/3}(x) \cos(x)\, dx$

Note $[\sin(x)]^n = \sin^n(x)$

let $f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$

$\Rightarrow \int [\sin(x)]^{1/3} \cdot \cos(x) = \frac{[\sin(x)]^{1/3+1}}{1/3+1} + C$

$= \frac{[\sin(x)]^{4/3}}{4/3} + C$

$= \frac{3}{4} [\sin(x)]^{4/3} + C$

⑩ $\int [\ln(x)]^2 \frac{dx}{x}$

let $f(x) = \ln(x)$, $f'(x) = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \int [\ln(x)]^2 \frac{dx}{x} = \frac{[\ln(x)]^3}{3} + C$

تكامل الدوال المثلثية العكسية :

{1} $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + c$

أو $-\cos^{-1} u + \acute{c}$

{2} $\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + c$

أو $-\cot^{-1} u + \acute{c}$

{3} $\int \frac{du}{|u|\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1}|u| + c$

أو $-\csc^{-1}|u| + \acute{c}$

Ex{1} $\int \frac{-dx}{\sqrt{4-25x^2}} = \int \frac{\frac{dx}{2}}{\sqrt{\frac{4-25x^2}{4}}} = -\frac{1}{5} \int \frac{\overbrace{\frac{5}{2}dx}^{du}}{\sqrt{1-(\underbrace{\tfrac{5}{2}x}_{u})^2}}$

$= -\frac{1}{5} \sin^{-1}(\frac{5}{2}x) + c$

أو $+\frac{1}{5} \cos^{-1}(\frac{5}{2}x) + \acute{c}$

Ex{2} $\int \frac{dt}{1+t^2} = \tan^{-1} t + c$ أو $-\cot^{-1} t + \acute{c}$

Ex{3} $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}} = \int \frac{\overbrace{2dx}^{du}}{\underbrace{2x}_{|u|}\sqrt{(\underbrace{2x}_{u})^2-1}} = \sec^{-1}|2x| + c$

أو $-\csc^{-1}|2x| + \acute{c}$

[redacted]

التكامل المحدد

اذا كانت a و b واقعة ضمن الفترة $[\alpha,\beta]$ وكانت F عكس تفاضل للدالة f عليها فأن $\int_a^b f$ يعرف كما يلي:

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= F(x)+c \Big|_a^b$$

= التعويض بالحد الاعلى − التعويض بالحد الادنى

[redacted]

$$= F(b)+c-(F(a)+c)$$

$$= F(b)-F(a)$$

يسمى العدد $\int_a^b f$ بالتكامل المحدد للدالة f من a الى b.

ويسمى a بالحد الادنى للتكامل و b بالحد الاعلى للتكامل كما يقال ان للدالة f تكون قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$ اذا وجد $\int_a^b f$

خواص التكامل المحدد:

(1) $\int_a^b (k_1 f \mp k_2 g) = k_1\int_a^b f \mp k_2\int_a^b g$

(2) $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \ni c\in[a,b]$ هام

(3) $\int_a^b f = F(b)-F(a) = -(F(a)-F(b)) = -\int_b^a f$

{4} $\int_a^a f = F(a) - F(a) = 0$

{5} $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$

أو $= 2\int_{-a}^{0} f$

اذا كانت f دالة فردية
$f(-x) \quad f(x)$
$0 \in [-a, a]$

$\int_{-a}^{a} f = 0$

اذا كانت f دالة زوجية
$f(-x) = f(x)$

$$Ex: \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\cos x}{\sin^2 x} + (4x+1)^{\frac{1}{2}} \right] dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^{-2} x}_{u} \underbrace{\cos x \, dx}_{du} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(4x+1)^{\frac{1}{2}}}_{u} dx \cdot \frac{4}{4} \quad du = 4dx$$

$u^n \, du \qquad\qquad u^n \, du$

$$\frac{\sin^{-1} x}{-1} \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\cancel{4}_2} \frac{(4x+1)^{3/2}}{\cancel{3/2}} \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-\frac{1}{\sin x} \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{6}\sqrt{(4x+1)^3} \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \qquad \int_a^b f = F(b) -$$

$$-\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}} - \left(-\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}\right) + \frac{1}{6}\sqrt{(4\tfrac{\pi}{2}+1)^3} - \frac{1}{6}\sqrt{(4\tfrac{\pi}{4}+1)^3}$$

$$-\frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{6}\sqrt{(2\pi+1)^3} - \frac{1}{6}\sqrt{(\pi+1)^3} \qquad (11)$$

طرق التكامل Methods of integration

١) تكامل القوى الفردية والزوجية للدوال المثلثية : $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$

٢) اذا كان الأسين فرديين او احدهما فردي فأننا نستخدم احدى المتطابقات التالية : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ أو $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

Ex: $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cdot \cos x \, \cos^2 x \, dx$

by $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ $\quad = \int \sin^2 x \cos x \, (1 - \sin^2 x) \, dx$

$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ $\quad = \int \underbrace{\sin^2 x}_{u} \underbrace{\cos x \, dx}_{du} - \int \underbrace{\sin^4 x}_{u} \underbrace{\cos x \, dx}_{du}$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

٣) اذا كان الأسين زوجيين فأننا نستخدم المتطابقتين التالية:

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ و $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

Ex: $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$$= \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \left[1 - \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right] dx$$

$$= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x \, \frac{4}{4} dx$$

$$= \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x +$$

$$= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + c$$

$\boxed{2}$ لإيجاد تكامل $\int \tan^n x \cdot \sec^m x \, dx$ & $\int \cot^n x \cdot \csc^m x \, dx$

* إذا كانت اسس sec أو csc $\boxed{\text{زوجياً}}$ نجزئه كالآتي :

$$\sec^m x = \sec^{m-2} x \cdot \sec^2 x \quad \text{أو} \quad \csc^m x = \csc^{m-2} x \cdot \csc^2 x$$

ثم نعوض بالمتطابقة التالية: $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ او $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

Ex: $\int \left[\sec^4 x \cdot \tan^2 x + \csc^4 x \right] dx$

$$\int \sec^4 x \cdot \tan^2 x \, dx + \int \csc^4 x \, dx$$

$$\int \sec^2 x \ \sec^2 x \ \tan^2 x \, dx + \int \csc^2 x \cdot \csc^2 x \, dx$$

$$\int (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \tan^2 x \, dx + \int (1 + \cot^2 x) \csc^2 x \, dx$$

$$\int \underbrace{\sec^2 x \, \overbrace{\tan^2 x}^{u} \, dx}_{du} + \int \underbrace{\tan^4 x}_{u} \underbrace{\cdot \sec^2 x \, dx}_{du} + \int \csc^2 x \, dx$$

$$+ \int \underbrace{\cot^2 x}_{u} \underbrace{\csc^2 x \, dx}_{du}$$

$$\frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} - \cot x - \frac{\cot^3 x}{3} + C$$

(٥)

ج) اذا كان أس tan أو cot فردياً فاننا نجزئه كالآتي:

$$\tan^n x = \tan^{n-1} x \cdot \tan x \quad \text{أو} \quad \cot^n x = \cot^{n-1} x \cdot \cot x$$

ونستفاد من المتطابقة: $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ أو $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

Ex: $\int \left[\tan^3 x \sqrt{\sec x} + \cot^3 2x\right] dx$

$$\int \tan^3 x \sqrt{\sec x}\, dx + \int \cot^3 2x\, dx$$

$$\int \tan^2 x \cdot \tan x \cdot \sqrt{\sec x}\, dx + \int \cot^2 2x \cdot \cot 2x\, dx$$

$$\int (\sec^2 x - 1) \cdot \tan x \cdot \sec^{\frac{1}{2}} x\, dx + \int (\csc^2 2x - 1) \cot 2x\, dx$$

$$\int \underbrace{\sec^{\frac{3}{2}} x}_{u} \underbrace{\sec x \tan x\, dx}_{du} - \int \underbrace{\sec^{-\frac{1}{2}} x}_{u} \underbrace{\sec x \tan x\, dx}_{du} + ?$$

$$\int \underbrace{\cot 2x}_{u} \underbrace{\csc^2 2x\, dx}_{du} \frac{-2}{-2} - \int \cot 2x\, dx$$

$$\frac{\sec^{\frac{5}{2}} x}{\frac{5}{2}} - \frac{\sec^{\frac{1}{2}} x}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\,\frac{\cot^2 2x}{2} - \int \frac{\overset{du}{\cos 2x}}{\underset{u}{\sin 2x}}\, dx$$

$$\frac{2}{5}\sqrt{\sec^5 x} - 2\sqrt{\sec x} - \frac{1}{4}\cot^2 2x - \frac{1}{2}\ln|\sin 2x| + C$$

محاضرات مادة الرياضيات

للمرحلة الاولى-قسم الكيمياء

٢) التكامل بطريقة التجزئة :

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + \underline{v \cdot du}$$

ننقل الحد الذي تحت خط للطرف الاخر واضافة التكامل

$$\int u \cdot dv = \int \left[d(u \cdot v) - v \cdot du \right]$$

نوزع التكامل

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

Ex: $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx$

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx}_{dv}$$

let $u = x^2 \Longrightarrow du = 2x\,dx$

$$dv = \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx \Longrightarrow v = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-3/2} \cdot 2x\,dx$$

$$= \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \, \frac{(x^2+1)^{-1/2}}{-\frac{1}{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{-1}{(x^2+1)^{1/2}}$$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^{3/2}} = x^2 \cdot \frac{-1}{(x^2+1)^{1/2}} - \int \frac{-1}{(x^2+1)^{1/2}} \cdot 2x\,dx$$

$$= \frac{-x^2}{(x^2+1)^{1/2}} + \int (x^2+1)^{-1/2} \cdot 2x\,dx$$

$$= \frac{-x^2}{(x^2+1)^{1/2}} + \frac{(x^2+1)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{-x^2}{\sqrt{x^2+1}} + 2\sqrt{x^2+1} + c$$

③ التكامل بطريقة تجزئة الكسور :

* اذا كانت البسط اكبر او يساوي المقام فاننا نقوم بعملية القسمة الطويلة ثم نكامل كما موضح في المثال التالي :

Ex: $\int \frac{4+x^2}{8+x}\,dx$

$$\begin{array}{r|l} \text{المقام} & \quad x-8 \quad \text{ناتج} \\ x+8 & \quad x^2+4 \quad \text{البسط} \\ & \mp x^2 \mp 8x \\ \hline & \quad -8x+4 \\ & \quad \pm 8x \pm 64 \\ \hline & \quad 68 \quad \text{الباقي} \end{array}$$

نرتب حدود x من الاعلى الى الادنى .

$$\int \frac{x^2+4}{x+8}\,dx$$

ناتج + $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقام}}$

$$\int \left[(x-8) + \frac{68}{x+8}\right] dx$$

$$\int \underbrace{(x-8)^n}_{u}\underbrace{dx}_{du} + 68\int \frac{1}{\underbrace{x+8}_{u}}\underbrace{dx}_{du}$$

$$\frac{(x-8)^2}{2} + 68\ln|x+8| + c$$

* اما اذا كان المقام اكبر من البسط فاننا نقوم بتجزئة الكسور الى مجموعة من الكسور يسهل علينا ايجاد تكامله .

ملاحظة: ① اذا كانت العامل بالصورة $\frac{1}{(x-a)^n}$ حيث $n \in I^+$

فان تجزئته تكون بالشكل :

$$\frac{1}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

② اما اذا كانت العامل بالصورة ax^2+bx+c ولا يمكن تحليله فان بسطه يكون بالشكل $Ax+B$ اي تقليل درجة واحدة .

كما موضح في المثال التالي :

$\boxed{\text{Ex}}$ [redacted] $\displaystyle\int \frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx$

$$\frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x-1)^2 + C(x^2+1)(x-1) + D(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)^2}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2-2x+1) + (Cx^2+C)(x-1) + Dx^2 + D}{(x^2+1)(x-1)^2}$$

$$= \frac{\boxed{Ax^3} - 2Ax^2 + Ax + Bx^2 - 2Bx + B + \boxed{Cx^3} - Cx^2 + Cx - C + Dx^2 + D}{(x^2+1)(x-1)^2}$$

$$= \frac{(A+C)x^3 + (-2A+B-C+D)x^2 + (A-2B+C)x + (B-C+D)}{(x^2+1)(x-1)^2}$$

$A + C = 0$ ----- ①

$-2A + B - C + D = 0$ ---- ②

$A - 2B + C = -2$ ---- ③

$B - C + D = 4$ ----- ④

$\Rightarrow$ بالطرح:

$-2A + \cancel{B} - \cancel{C} + \cancel{D} = 0$

$\quad \mp \cancel{B} \pm \cancel{C} \mp \cancel{D} = \mp 4$

$-2A = -4$

$\therefore \boxed{A = 2}$

$\boxed{C = -2} \Leftarrow C = -A$ ~ ① من معادلة

$\boxed{B = 1} \Leftarrow \cancel{2} - 2B + \cancel{(-2)} = -2$ ~ ③ من معادلة

$\boxed{D = 1} \Leftarrow 1 - (-2) + D = 4$ ~ ④ من معادلة

<9

$$\therefore \frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{2x+1}{x^2+1} + \frac{-2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx = \int \left[\frac{2x+1}{x^2+1} + \frac{-2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx$$

$$= \int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx - 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$$\frac{1}{u^2+1} \quad du$$

$$= \int \frac{\overbrace{2x\;dx}^{du}}{\underbrace{x^2+1}_{u}} + \int \frac{dx}{x^2+1} - 2\int \frac{\overbrace{dx}^{du}}{\underbrace{x-1}_{u}} + \int \underbrace{(x-1)}_{u}^{\overset{n}{-2}}\,\underbrace{dx}_{du}$$

$$= \ln|x^2+1| + \tan^{-1}(x) - 2\ln|x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + c$$

$$\text{أو} \quad \ln|x^2+1| - \cot^{-1}(x) - 2\ln|x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + c$$

التكامل بطريقة اكمال المربع:

اذا كانت من الممكن تحويل الدالة $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $a\neq 0$

الى الشكل au^2+B بأستخدام طريقة اكمال المربع وكالاتي:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$

بأضافة وطرح $(\text{نصف معامل } x)^2$ للقوس اعلاه

[redacted]

$$= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}$$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$$

$$= au^2+B$$

حيث أن: $u=x+\frac{b}{2a}$ & $B=c-\frac{b^2}{4a}$

٢٧

ملاحظة ← أن استخدام هذا الاسلوب يكون عندما :

① لا يمكن تحليل الحد ax^2+bx+c .

② عند اختفاء الثابت c .

③ عندما يكون الحد ax^2+bx+c واقعاً تحت جذر اي (مرفوع لقوى كسرية).

والسبب في تحويل الحد ax^2+bx+c الى الصيغة au^2+B وذلك لغرض استخدام التكامل بالتعويضات المثلثية او التكامل المباشر ان امكن.

* — * — * — * — * — *

جد التكامل بأستخدام طريقة اكمال المربع :

Ex/ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

$$\sqrt{2x-x^2} = \sqrt{-(x^2-2x)} = \sqrt{-(x^2-2x+1-1)}$$

$$= \sqrt{-(x^2-2x-1)-1}$$

$$= \sqrt{-(x-1)^2-1}$$

$$= \sqrt{1-(x-1)^2}$$

$$\sqrt{a^2-u^2}$$

$2x-x^2$

$-x^2+2x$

$-(x^2-2x)$

$$a=1 \quad , u = x-1 \implies du = dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

$$= \sin^{-1}(x-1) + c$$

$$\text{أو} \quad -\cos^{-1}(x-1) + c'$$

$$\boxed{\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1}u + c \quad \text{أو} \quad -\cos^{-1}u + c'}$$

⑥ التكامل باستخدام تعويض مناسب بالنسبة لدوال $\sin x$ و $\cos x$:

في كثير من الاحيان تظهر لدينا تكاملات لانستطيع استخدام اي من الطرق السابقة لايجاد نواتجها لهذا نستخدم اسلوباً جديداً في التعويض لتحويل الدوال المثلثية الى صيغ جبرية بأستخدام فرضية معينة وهي: $\boxed{z = \tan(\frac{x}{2})}$ حفظ

من هذه الفرضية يمكن استنتاج مايلي:

$$z = \tan(\tfrac{x}{2}) \Rightarrow \frac{x}{2} = \tan^{-1} z \Rightarrow x = 2\tan^{-1} z$$

$$\Rightarrow \boxed{dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}} \text{ حفظ}$$

من قانون ضعف الزاوية

$$\cos x = 2\cos^2(\tfrac{x}{2}) - 1 = \frac{2}{\sec^2(\frac{x}{2})} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} - 1$$

$z = \tan$

$$= \frac{2}{1+z^2} - 1$$

توحيد المقامات ينتج:

$$\boxed{\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}} \text{ حفظ}$$

من القانون الذهبي

$$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1 - \frac{(1-z^2)^2}{(1+z^2)^2}} = \sqrt{\frac{(1+z)^2 - (1-z)^2}{(1+z^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{1}+2z^2+\cancel{z^4}-\cancel{1}+2z^2-\cancel{z^4}}{(1+z^2)^2}} = \sqrt{\frac{4z^2}{(1+z^2)^2}}$$

$$\boxed{\sin x = \frac{2z}{1+z^2}} \text{ حفظ}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{2z}{1+z^2}}{\frac{1-z^2}{1+z^2}} \Rightarrow \boxed{\tan x = \frac{2z}{1-z^2}} \text{ حفظ}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\frac{2z}{1-z^2}} \Longrightarrow \boxed{\cot x = \frac{1-z^2}{2z}}$$ يحفظ

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{1-z^2}{1+z^2}} \Longrightarrow \boxed{\sec x = \frac{1+z^2}{1-z^2}}$$ يحفظ

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\frac{2z}{1+z^2}} \Longrightarrow \boxed{\csc x = \frac{1+z^2}{2z}}$$ يحفظ

$\boxed{\text{Ex}}$: $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$

$$\int \frac{\cancel{\frac{2\,dz}{1+z^2}}}{\cancel{\frac{1-z^2}{1+z^2}}} = \int \frac{2\,dz}{1-z^2} = \int \frac{2}{(1-z)(1+z)}\,dz$$

$$\frac{2}{(1-z)(1+z)} = \frac{A}{(1-z)} + \frac{B}{(1+z)} = \frac{A + Az + B - Bz}{(1-z)(1+z)}$$

$$= \frac{(A+B) + (A-B)z}{(1-z)(1+z)}$$

$A + B = 2$ —— ①

$A - B = 0 \Longrightarrow \boxed{A = B}$ نعوضها بـ ① $\Longrightarrow A + A = 2 \Longrightarrow 2A = 2$

$\therefore \boxed{A = 1}$

$\therefore \boxed{B = 1}$

$$\int \left[\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\right] dz = -\int \frac{-1}{1-z}\,dz + \int \frac{1}{1+z}\,dz$$

$$= -\ln|1-z| + \ln|1+z| + c$$

من خواص ln $\quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

$$= \ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + c$$

نضرب بمرافق البسط

$$= \ln\left|\frac{1+z}{1-z} \cdot \frac{1+z}{1+z}\right| + c$$

$$= \ln \left| \frac{(1+z)^2}{1-z^2} \right| + c$$

$$= \ln \left| \frac{1+2z+z^2}{1-z^2} \right| + c$$

$$= \ln \left| \frac{1+z^2}{1-z^2} + \frac{2z}{1-z^2} \right| + c$$

$$= \ln \left| \sec x + \tan x \right| + c$$

٧ تظهر أحياناً تكاملات لا نستطيع استخدام اي من الحالات السابقة معها لذلك نستخدم فرضية تناسب السؤال لغرض الحل .

Ex: $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\, dx$

let $z = \sqrt[4]{x} \Rightarrow x = z^4 \Rightarrow \sqrt{x} = z^2$

$dx = 4z^3\, dz$

نقسمها قسمة طويلة

$$\int \frac{z^2 \cdot 4z^3\, dz}{1+z} = 4\int \frac{z^5}{1+z}\, dz$$

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1$$
$$1+z \,\overline{)\, z^5}$$
$$\mp z^5 \mp z^4$$
$$-z^4$$
$$\pm z^4 \pm z^3$$
$$z^3$$
$$\mp z^3 \mp z^2$$
$$-z^2$$
$$\pm z^2 \pm z$$
$$z$$
$$\mp z \mp 1$$
$$-1$$

$$= 4\int \left[z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 - \frac{1}{1+z} \right] dz$$

$$= 4\left[\int z^4\, dz - \int z^3\, dz + \int z^2\, dz - \int z\, dz + \int dz - \int \frac{1}{1+z}\, dz \right]$$

$$= 4\left[\frac{z^5}{5} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + z - \ln|1+z| \right] + c$$

$$= 4\left[\frac{x^{\frac{5}{4}}}{5} - \frac{x}{4} + \frac{x^{\frac{3}{4}}}{3} - \frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt[4]{x} - \ln|1+\sqrt[4]{x}| \right] + c$$

مثال جد التكامل (بطريقة اكمال المربع) :

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+2}$$

$$4x^2+4x+2 = 4\left(x^2+x+\tfrac{1}{2}\right)$$
$$= 4\left(x^2+x+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\right)$$
$$= 4\left(\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{1}{4}\right)$$
$$= 4\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2+1$$
$$= 4u^2+1$$

$$u = x+\tfrac{1}{2} \Longrightarrow du = dx$$

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+2} = \int \frac{dx}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}$$
$$= \int \frac{du}{4u^2+1}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2\,du}{(2u)^2+1}$$
$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}(2u)+c$$
$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x+1)+c$$

9

$$= -\frac{1}{2}\cot^{-1}(2u)+c'$$
$$= -\frac{1}{2}\cot^{-1}(2x+1)+c'$$

مثال ① جد ناتج التكامل $\int \frac{dx}{x^2-2x-3}$

(بطريقة تجزئة الكسور)

$$\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{1}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

$$= \frac{Ax + A + Bx - 3B}{(x-3)(x+1)}$$

$$= \frac{(A+B)x + (A-3B)}{(x-3)(x+1)}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{A} + B = 0 \\ \mp \cancel{A} \pm 3B = \mp 1 \\ \hline 4B = -1 \end{array} \quad \text{بالطرح} \implies \left\{ B = -\frac{1}{4} \right\}$$

$$A + B = 0 \implies A = -B \implies \left\{ A = \frac{1}{4} \right\}$$

$$\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{\frac{1}{4}}{(x-3)} + \frac{-\frac{1}{4}}{(x+1)}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-2x-3} = \int \left[\frac{\frac{1}{4}}{(x-3)} - \frac{\frac{1}{4}}{(x+1)} \right] dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{1}{4} \ln|x-3| - \frac{1}{4} \ln|x+1| + c$$

$$= \ln|x-3|^{\frac{1}{4}} - \ln|x+1|^{\frac{1}{4}} + c$$

$$= \ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|^{\frac{1}{4}} + c$$