



جامعة بغداد

كلية التربية للعلوم الصرفة- ابن الهيثم

محاضرات الكهرومغناطيسية لطلبة المرحلة الرابعة  
قسم الفيزياء

اعداد

الاستاذ المساعد

د. مي عبد الستار محمد

الاستاذ المساعد

د. فاروق ابراهيم حسين

الاستاذ

د. بشرى كاظم حسون

## ***المحتويات : Contents***

الفصل الاول : تحليل المتجهات *vector Analysis*

الفصل الثاني : الكهربائية المستقرة *Electrostatic*

الفصل الثالث : حلول الالمسائل الكهروستاتيكية *Solution of Electrostatic Problems*

الفصل الرابع : المجال الكهروستاتيكي في الاوساط العازلة *The Electrostatic Field in Dielectric Media*

الفصل الخامس : الطاقة الكهروستاتيكية *Electrostatic Energy*

الفصل السادس : التيار الكهربائي *Electric Current*

الفصل السابع : المغناطيسية *The Magnetism*

الفصل الثامن : النظرية المجهرية للتمغظ *The Microscopic Theory of magnetism*

الفصل الاول	تحليل المتجهات Vector Analysis
	1- تعاريف 2- جبر المتجهات 3- ضرب المتجهات 4- تفاضل المتجهات 5- تكامل المتجهات 6- النظريات الخاصة بالمتجهات 7- الاحداثيات 8- صيغ من تحليل المتجهات 9- اسئلة الفصل الاول
الفصل الثاني	الكهربائية المستقرة (الكهروستاتيكية) Electrostatics
	1- الشحنة الكهربائية 2- قانون كولوم 3- قاعدة التراكم للقوى الكهروستاتيكية 4- كثافة الشحنة 5- المجال الكهربائي 6- الجهد الكهروستاتيكي 7- الطاقة الكامنة 8- قانون كاوس 9- استخدام قانون كاوس 10- ثنائي القطب الكهربائي 11- ثنائي القطب الكهربائي في مجال كهربائي غير منتظم 12- اسئلة الفصل الثاني
الفصل الثالث	حل المسائل الكهروستاتيكية Solutions of Electrostatic Problems
	1- مقدمة 2- معادلة بوازون 3- معادلة لابلاس 4- حل معادلة بوازون ولاپلاس للاحداثيات المختلفة 5- اسئلة الفصل الثالث
الفصل الرابع	المجال الكهروستاتيكي في الاوساطالعازلة Electrostatic field in Dielectric
	1- مقدمة 2- الاستقطاب 3- المجال الخارجي لوسط عازل 4- المجال الكهربائي داخل العازل 5- قانون كاوس في العوازل والازاحة الكهربائية 6- التأثيرية الكهربائية وثابت العزل 7- الشروط الحدودية على متجهات المجال 8- اسئلة الفصل الرابع
الفصل الخامس	الطاقة الكهروستاتيكية Electrostatic Energy
	1- مقدمة 2- الطاقة الكامنة لمجموعة من الشحنات 3- الطاقة الكهروستاتيكية لتوزيع شحني 4- كثافة الطاقة للمجال الكهروستاتيكي 5- اسئلة الفصل الخامس

الفصل السادس	التيار الكهربائي <i>The Electric Current</i>
1- مقدمة	
2- طبيعة التيار	
3- كثافة التيار لوحدة المساحة ومعادلة الاستمرارية	
4- قانون اوم – الموصلية	
5- القوة الدافعة الكهربائية	
6- اسئلة الفصل السادس	
الفصل السابع	المغناطيسية <i>The Magnetism</i>
1- مقدمة	
2- التمغظ	
3- قوة لورنس	
4- القوة المؤثرة على الموصلات الحاملة للتيار	
5- قانون بايوت – سافارت	
6- قانون امبير الدائري	
7- معادلات المجال	
8- الفيض المغناطيسي	
9- الحث الكهرومغناطيسي	
10- التأثيرية والنفاذية المغناطيسية	
11- كثافة الطاقة المغناطيسية	
12- تعميم قانون امبير وتيار الازاحة	
13- معادلات ماكسويل وتطبيقاتها	
14- الموجة الكهرومغناطيسية واشتقاقها	
15- خواص الموجة الكهرومغناطيسية	
16- اسئلة الفصل السابع	
الفصل الثامن	النظرية المجهرية للتمغظ <i>Microscopic theory of Magnetization</i>
1- الخواص المغناطيسية للمادة	
2- التمغظ	
3- المجال الجزيئي داخل المادة	
4- منشأ الدايامغناطيسية	
5- منشأ البارامغناطيسية	
6- النظرية الفيرومغناطيسية	
7- المناطق الفيرومغناطيسية	
8- الفيراييت	

Reference :

*Foundation Of Electromagnetic Theory*

By: *John R. Reitz, Frederick J. Milford & Robert W. Christy*

المصادر :-

الكتاب المقرر

الكتب المساعدة

ELECTROMAGNETICS , GENERAL THEORY OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD , CLASSICAL AND RELATIVISTIC ,APPROACHES . THIRD EDITION. Revised and Augmented by : Andrei NICOLAIDE (2012).

المجالات الكهرومغناطيسية الجزء الاول والثاني

اساسيات النظرية الكهرومغناطيسية الجزء الاول والثاني

سلسلة ملخصات شوم: الكهرومغناطيسيات (2000) تاليف جوزيف ادمنستر

**Definition (1-1) تعاريف :-**

ان استخدام تحليل المتجهات في موضوع الكهربائية والمغناطيسية يوضح الافكار الفيزيائية التي تتضمنها المعادلات الرياضية وللتعرف على عدد من المفاهيم الاساسية ، اليكم بعض التعاريف .

تقسم الكميات الفيزيائية الى نوعين :-

1- **كميات متجهة vectors**:- تعرف الكمية الاتجاهية على انها تلك الكمية التي تميز كليا بمقدارها واتجاهها مثل السرعة، التعجيل، القوة والمجال الكهربائي.

2- **كميات لامتجهة (عددية) scalars**:- وهي تلك الكمية التي تميز كليا بمقدارها فقط مثل درجة الحرارة، الكثافة ، الطول والحجم.

**متجهات الوحدة المتعامدة : unit vectors**

ومقدارها وحدة واحدة وتكتب  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  وهي باتجاه المحاور الديكارتية او الكارتيزية  $(x,y,z)$  على الترتيب .

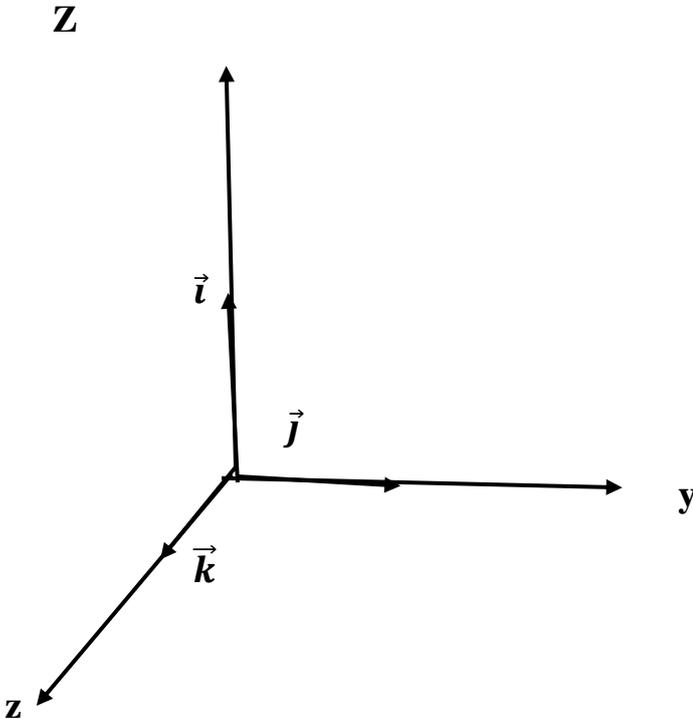
المقدار scalar      الاتجاه vector      وحدة المتجه

$\hat{i}$	$\vec{i}$	$ \vec{i} $
$\hat{j}$	$\vec{j}$	$ \vec{j} $
$\hat{k}$	$\vec{k}$	$ \vec{k} $

$$\hat{i} = [1,0,0]$$

$$\hat{j} = [0,1,0]$$

$$\hat{k} = [0,0,1]$$



مركبات المتجه :

حسب نظام الاحداثيات الديكارتيية يحدد المتجه بثلاث مركبات باتجاه الاحداثيات ( x , y , z )، لو فرضنا انه لدينا المتجه  $\vec{A}$  فيكون له ثلاث مركبات هي :-

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

$$\text{or } \vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z$$

$$\text{or } \vec{A} = \vec{i}|\vec{A}_x| + \vec{j}|\vec{A}_y| + \vec{k}|\vec{A}_z|$$

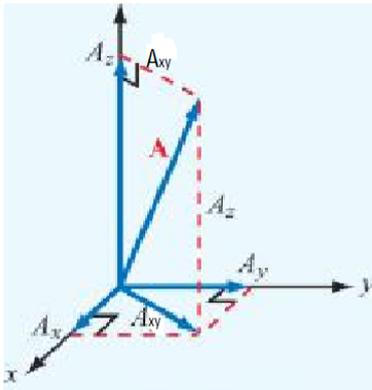
$$A_y = |\vec{A}_y|, A_z =$$

حيث :-

$$A_x = |\vec{A}_x|, |\vec{A}_z|$$

$$|\vec{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{\frac{1}{2}}$$

ومن الشكل التالي:-



$$\vec{A}_{xy} = \vec{A}_x + \vec{A}_y, \vec{A} = \vec{A}_{xy} + \vec{A}_z \quad \therefore \vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

(2-1) جبر المتجهات :- Vector algebra

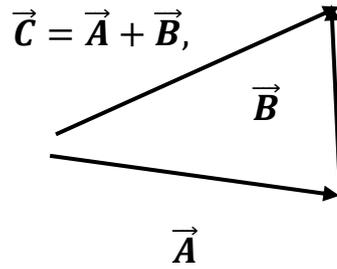
1- جمع وطرح المجهات :

يعرف حاصل جمع متجهين بأنه المتجه الذي تكون مركباته مساوية لمجموع المركبات المناظرة للمتجهين الاصيلين .

مثال :- اذا كان المتجه  $\vec{C}$  مساويا لمجموع المتجهين  $\vec{A}, \vec{B}$  فان :

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B},$$

$$\vec{C}_x = \vec{A}_x + \vec{B}_x, \quad \vec{C}_y = \vec{A}_y + \vec{B}_y, \quad \vec{C}_z = \vec{A}_z + \vec{B}_z$$



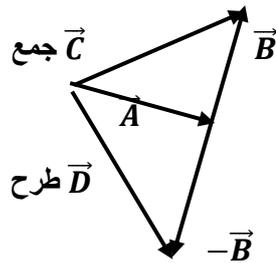
ويعرف طرح المتجهات بدلالة القيمة السالبة للمتجه .

**المتجه السالب :-** هو المتجه الذي تكون مركباته مساوية للمركبات المناظرة للمتجه الاصلي ولكن باشارة سالبة اي يساويه بالمقدار ويعاكسه بالاتجاه والزاوية بينهما (  $180^\circ$  ) .



وعليه تعرف عملية طرح المتجهات على انها جمع المتجه السالب اي ان :

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



وبما ان جميع الاعداد الحقيقية تمتلك خاصية الترافق ( *associative* ) فان عمليات الجمع والطرح للمتجهات تمتلك خاصية الترافق ايضا وبناء عليه لاجابة للاقواس عند جمع وطرح المتجهات اي ان :-

$$\vec{A} + (\vec{A} + \vec{B}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

اذا كان لدينا متجهين يلتقي راسيهما بنقطة واحدة فعند جمع او طرح المتجهين نلاحظ الزاوية بينهما :

أ- اذا كانت الزاوية بينهما حادة نستخدم قانون الجيب تمام لايجاد المحصلة بينهما

$$\vec{C}^2 = \vec{A}^2 + \vec{B}^2 + 2AB \cos \theta$$

ب- واذا كانت الزاوية منفرجة بصبح قانون جيب تمام كالآتي :

$$\vec{C}^2 = \vec{A}^2 + \vec{B}^2 - 2AB \cos \theta$$

ج - واذا كانت  $\theta = 90^\circ$  نستخدم قانون فيثاغورس

$$\vec{C}^2 = \vec{A}^2 + \vec{B}^2 \text{ as } \theta = 90^\circ \text{ and } \cos 90 = 0$$

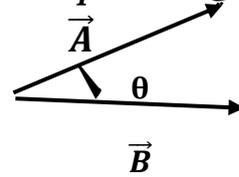
2- ضرب المتجهات :- **Vector Product**

أ- ضرب المتجه بمقدار عددي :- ويكون ناتج هذه العملية متجهًا ، تمتاز كل مركبة من مركباته بانها تساوي حاصل ضرب الكمية العددية بالمركبة المناظرة للمتجه الاصيلي اي ان :-

$$\vec{C} = A\vec{B} = A\vec{B}_x + A\vec{B}_y + A\vec{B}_z \quad \text{as} \quad \vec{C}_x = A\vec{B}_x, \quad \vec{C}_y = A\vec{B}_y, \quad \vec{C}_z = A\vec{B}_z$$

ب- ضرب متجهين :- ويكون على نوعين

اولا : الضرب العددي **dot product** : وله تسميات اخرى مثل الضرب العددي **scalar product** او الضرب الداخلي **inner product** ويكون الناتج النهائي لهذه العملية هو كمية عددية غير متجه .



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$$

ويكون الناتج كمية غير متجهة حيث :

$$\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z \quad \text{and} \quad \vec{B} = \vec{i}B_x + \vec{j}B_y + \vec{k}B_z$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad \text{as} \quad \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$$

لانه عندما  $\theta = 0$  ,  $\cos \theta = 1$  , وعندما تكون متعامدتان اي  $\theta = 90$  ,  $\cos \theta = 0$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}, \quad \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

ثانيا :- الضرب الاتجاهي **vector product** ، او **التتابع التقاطعي cross product** او **التتابع الخارجي outer product** :-

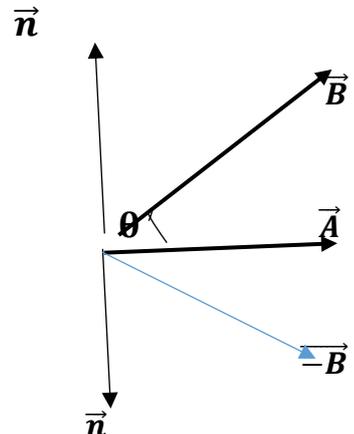
ويكون الناتج كمية متجهة ويكتب بالشكل :  $\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta \vec{n}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta \vec{n}, \quad \text{as} \quad \vec{n} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{AB \sin \theta}$$

اي ان الناتج هو حاصل ضرب مقدار كل من المتجهين بالآخر بجيب الزاوية المحصورة بين المتجهين الاصيليين ، علما ان الاتجاه يؤخذ حسب قاعدة اليد اليمنى .

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A} = -\vec{B} \times \vec{A}, \quad \vec{B} \times \vec{A} = |\vec{B}| |\vec{A}| \sin \theta \vec{n}$$

حيث ان اتجاه  $\vec{n}$  في هذه الحالة باتجاه الاسفل حسب قاعدة اليد اليمنى.



$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \vec{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \vec{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

where  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ ,  $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ ,  $\vec{k} \times \vec{i} =$

$\vec{j}$ ,  $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$

where  $\theta = 0$ ,  $\sin \theta = 0$ , then  $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$

if  $\vec{A} \times \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{A} \parallel \vec{B}$  and if  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$  then  $\vec{A} \perp \vec{B}$

وهناك حالتان مرتبطتان بالضرب العددي والاتجاهي وهما :

**1- الضرب الثلاثي العددي Triple scalar product**

وهو كمية عددية وتحصل عملية الضرب بالصيغة التالية :

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = -(\vec{C} \times \vec{B}) \cdot \vec{A}$$

ومن السهل التعبير عن حاصل الضرب الثلاثي للمتجهات بدلالة مركباتها المتعامدة بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \\ &= A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) + A_z(B_x C_y - B_y C_x) \end{aligned}$$

وتبعاً للمحدد (المصفوفة) التالي:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = -\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C})$$

ولضرورة لوضع الاقواس هنا حيث ان ناتج الضرب لا يتغير بالتبديل الدوري للمتجهات الثلاثة ولا بتبديل موضع النقطة (.) او (x)

**2- الضرب الاتجاهي الثلاثي Triple vector product :**

وهي كمية متجهة وتأخذ الصيغة:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{i} B_x + \vec{j} B_y + \vec{k} B_z)(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) \\ &\quad - (\vec{i} C_x + \vec{j} C_y + \vec{k} C_z)(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \end{aligned}$$

ويطلق على هذه القاعدة اسم "back cab rule" ووضع الاقواس هنا ضروري حيث بدونها تكون عملية الضرب غير معرفة

( 1-3 ) تفاضل المتجهات :-

1- الانحدار ( الميل ) : Gradient

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$\frac{\partial}{\partial x}$  : هي مشتقة اتجاهية يقصد بها تغير الدالة باتجاه معين . اذا دخل متجه الانحدار على كمية عددية مثل الجهد  $(\phi)$  اصبح الناتج كمية متجهة :

$$\vec{\nabla}\phi = \vec{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \text{grad } \phi$$

اي ان انحدار دالة غير متجهة ( scalar ) مثل الجهد تصبح كمية متجهة مقداره يساوي ذروة المشتقة الاتجاهية عند نقطة معينة واتجاهه يكون بنفس اتجاه ذروة المشتقة الاتجاهية عند تلك النقطة .

2- التباعد : Divergence

ويدخل على الكمية المتجهة فيصبح الناتج عدديا مثل

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \text{div } \vec{A} = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ويمثل التباعد غاية التكامل السطحي لوحدة الحجم عندما يقترب الحجم من الصفر اي ان:

$$\text{div } \vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} da$$

3- الالتفاف او الدوران : Curl

ويدخل على الكمية المتجهة فيصبح الناتج متجها مثل

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \text{curl } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

$$\text{curl } \vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{n} \times \vec{F} da$$

4- مؤثر لابلاس : The Laplacian operator

وتمثل عملية مزدوجة من تباعد وانحدار مثل:

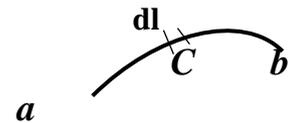
$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \text{div grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

**Vectors integration : تكامل المتجهات : (4-1)**

**1- التكامل الخطي : line integration**

ونائج التكامل كمية عددية . والتكامل هنا يعتمد على بداية ونهاية المنحني وكذلك على المنحني C .  
 فاذا كان المسار مفتوح اي المنحني مفتوح فيعبر عنه بالعلاقة:

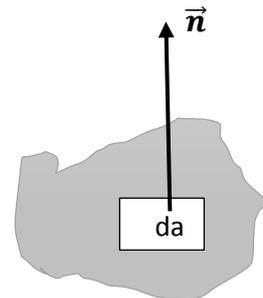
$$\int_a^b \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N A \cdot \Delta \ell$$



حيث a,b تمثل بداية ونهاية المنحني على التوالي ويشير c المنحني الذي ينجز عليه التكامل الخطي . اما اذا كان المسار مغلق ( منحني مغلق ) فيعبر عنه بالشكل الاتي :  $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$

**2- التكامل السطحي : Surface integration**

$$\int_S \vec{A} \cdot \vec{n} da = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$



سطح (S)

تمثل (da) مساحة صغيرة جدا على السطح (S) الذي تنجز عليه عملية التكامل و  $\vec{n}$  وحدة متجه عمودية على da واتجاهها يحدد بقاعدة اليد اليمنى right hand rule . اما اذا السطح مغلق فيكتب بالشكل :  $\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} da$

**3- التكامل الحجمي : Volume integral**

ويعبر عنه بالشكل التالي:

$$\int_V \vec{A} \cdot d\vec{V} = \int_V \vec{A} dx dy dz = \vec{A} \int dx dy dz$$

( 5-1 ) النظريات الخاصة بالمتجهات

1- نظرية التباعد : Divergence theorem

ان تكامل تباعد متجه خلال حجم ( V ) يساوي التكامل السطحي للمركبة العمودية للمتجه على السطح الذي يضم الحجم ( V ) اي ان:

$$\int_V \text{div} F dV = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} da = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

وهي علاقة بين التكامل السطحي والحجمي

2- نظرية ستوك : Stock's theorem

وهي علاقة بين التكامل السطحي والخطي وتنص على ان :- التكامل الخطي لمتجه حل مسار مغلق يساوي تكامل المركبة العمودية لالتفاف المتجه على اي سطح محاط بالمسار، اي ان:

$$\oint_C \vec{F} d\vec{\ell} = \int_S \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} da = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} da$$

حيث C يمثل المنحني المغلق المحيط بالسطح S.

(6-1) الاحداثيات :- Coordinates

هناك ثلاثة احداثيات مستخدمة هي :

1- الاحداثيات الديكارتية ( الكارتيزية ) Cartesian Coordinates

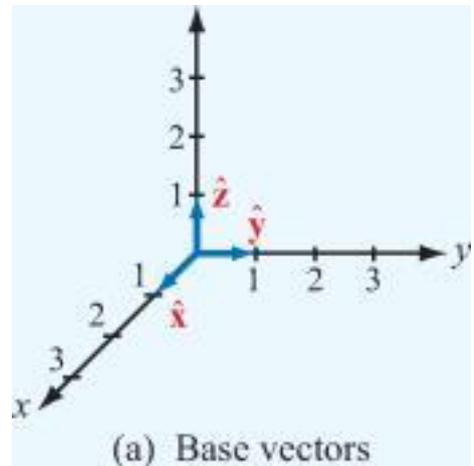
وتمثل الاحداثيات التي اوجدها العالم الفرنسي ديكارت

الاحداثيات = x,y,z ، المساحة = da = dx dy ، الحجم = dV = dx dy dz

$$\text{grad } \vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

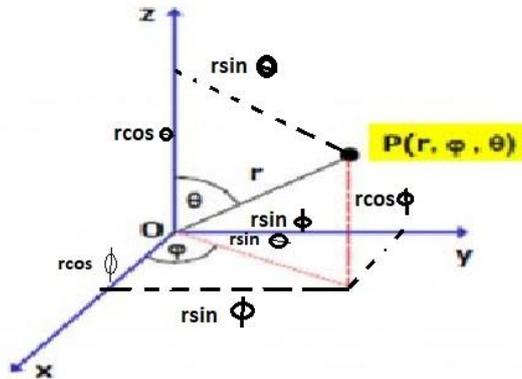
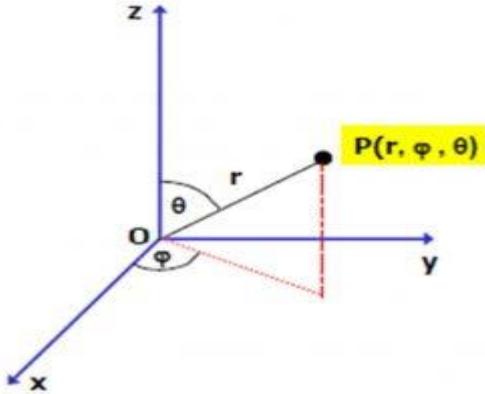
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

مؤثر لابلاس هو:



2- الاحداثيات الكروية : Spherical coordinates

الاحداثيات  $r, \theta, \phi$  ، المساحة  $da = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$  ، الحجم  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$   
 $x = r \sin \theta \cos \phi$  ،  $y = r \sin \theta \sin \phi$  ،  $z = r \cos \theta$



حيث  $\theta$  تمثل الزاوية القطبية ،  $r$  يمثل مقدار متجه نصف القطر من نقطة الاصل .

$$\text{grad } \vec{V} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

ومؤثر لابلاس هو:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

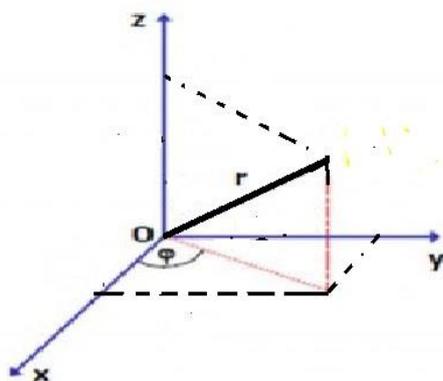
3- الاحداثيات الاسطوانية :- Cylindrical coordinates

الاحداثيات  $r, \phi, z$  ، المساحة  $da = r dr d\phi$  ، الحجم  $dV = r dr d\phi dz$

$$\text{grad } \vec{V} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



( 1-7 ) صيغ (متطابقات) مهمة من تحليل المتجهات :-

لو كان لدينا  $F, \psi, B, C$  دوال متجهة ولدينا  $\phi, \gamma$  دوال عددية فان :-

$$1 - \nabla(\psi + \gamma) = \nabla\psi + \nabla\gamma$$

$$2 - \nabla(\psi\gamma) = \psi\nabla\gamma + \gamma\nabla\psi$$

$$3 - \nabla \cdot (B + C) = \nabla \cdot B + \nabla \cdot C$$

$$4 - \nabla x(B + C) = \nabla xB + \nabla xC$$

$$5 - \nabla \cdot (B \cdot C) = (B \cdot \nabla)C + (C \cdot \nabla)B + Bx(\nabla xC) + Cx(\nabla xB)$$

$$6 - (B \cdot \nabla)C = \left( B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z} \right) C$$

$$7 - \nabla \cdot (\gamma B) = \gamma \nabla \cdot B + B \nabla \cdot \gamma$$

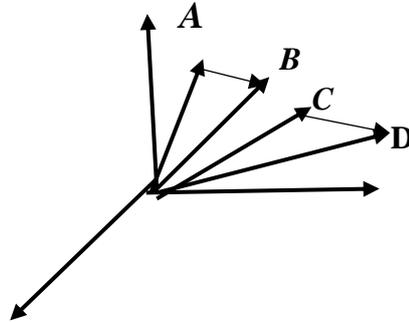
$$8 - \nabla x(\gamma B) = \gamma \nabla xB + \nabla \gamma xB = \gamma \nabla xB + Bx \nabla \gamma$$

$$9 - \nabla x \nabla \gamma = 0, \quad \text{always curl grad } \gamma = 0$$

**مسائل Problems:-**

س1/ اذا علمت ان المتجهات  $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ,  $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ ,  $\vec{C} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ ,  $\vec{D} = \hat{k} - \hat{j}$  تشير الى النقاط  $A, B, C, D$  ابتداء من نقطة الاصل، اثبت ان الخطين  $AB$  و  $CD$  متوازيان ثم جد النسبة بين طوليهما.

الجواب/ من الرسم ادناه



$$\vec{B} + \vec{AB} = \vec{A}$$

$$\vec{AB} = \vec{A} - \vec{B} = (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) - (2\hat{i} + 3\hat{j}) = -\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{CD} = \vec{C} - \vec{D} = (3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}) - (\hat{k} - \hat{j}) = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\text{if } \vec{AB} \times \vec{CD} = 0, \quad \text{then } \vec{AB} \parallel \vec{CD}$$

$$\vec{AB} \times \vec{CD} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \hat{i}(6 - 6) + \hat{j}(3 - 3) + \hat{k}(-6 + 6) = 0$$

$$\vec{AB} \times \vec{CD} = |\vec{AB}| |\vec{CD}| \sin\theta = 0, \quad \text{i.e. } \sin\theta = \frac{\vec{AB} \times \vec{CD}}{|\vec{AB}| |\vec{CD}|} = 0, \quad \therefore \theta = 0 \Rightarrow \vec{AB} \parallel \vec{CD}$$

$$\frac{|\vec{AB}|}{|\vec{CD}|} = \frac{\sqrt{1 + 4 + 1}}{\sqrt{9 + 36 + 9}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{54}}$$

س2/ اثبت ان المتجهين  $\vec{A} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ ,  $\vec{B} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$  متعامدان.  
الجواب/

$$\text{if } \vec{A} \cdot \vec{B} = 0, \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (4\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) = 4 + 8 - 12 = 0$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{\text{zero}}{AB} = 0, \quad \therefore \theta = 90 \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$$

**Prove**  $\vec{\nabla}|\vec{r}| = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \hat{r}$

س3/ اثبت ان:

الجواب/

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z \quad \text{and} \quad |\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}|\vec{r}| = \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{\nabla}|\vec{r}| = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} &= \hat{i} \left[ \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \right] + \hat{j} \left[ \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y \right] + \hat{k} \left[ \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2z \right] \\ &= \frac{\hat{i}x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{\hat{j}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{\hat{k}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \hat{r} \end{aligned}$$

**Prove that**  $\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2}$

س4/ اثبت ان :

الجواب/

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r}|} = \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} &= \hat{i} \left[ -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x \right] + \hat{j} \left[ -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y \right] \\ &\quad + \hat{k} \left[ -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2z \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{-\hat{i}x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\hat{j}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\hat{k}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)}{\left[ (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \right]^3} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$$= -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2 \cdot |\vec{r}|} \quad \text{but unit vector } \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \text{then } \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2}$$

وبنفس الطريقة نستطيع ان نثبت المسائل التالية

$$1 - \nabla \frac{1}{|\vec{r}|^2} = \frac{-2}{|\vec{r}|^3} \hat{r} = -\frac{2\vec{r}}{|\vec{r}|^4}$$

$$2 - \nabla \frac{1}{|\vec{r}|^3} = \frac{-3}{|\vec{r}|^4} \hat{r} = -\frac{3\vec{r}}{|\vec{r}|^5}$$

**H.W:-**

اذا كانت  $\phi$  دالة مجال غير متجهة اي دالة عددية scalar وان  $\vec{F}$  متجه اثبت ان :-

$$1 - \text{Curl grad } \phi = \nabla \times \nabla \phi = 0$$

التفاف انحدار اي مجال لامتجه = صفر

$$2 - \text{div curl } \vec{F} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{F} = 0$$

تباعد اي التفاف = صفر

$$3 - \text{curl curl } \vec{F} = \text{grad div } \vec{F} - \nabla^2 \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$$

اخذ الالتفاف لالتفاف مجال متجه

$$\text{prove that } \nabla \frac{1}{|\vec{r}|^2} = \frac{-2}{|\vec{r}|^3} \hat{r} = -\frac{2\vec{r}}{|\vec{r}|^4}$$

س/5

الجواب/

$$\begin{aligned} \nabla \frac{1}{|\vec{r}|^2} &= (\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z})(x^2 + y^2 + z^2)^{-1} \\ &= \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1} \\ &= \hat{i} [-1(x^2 + y^2 + z^2)^{-2} \cdot 2x] + \hat{j} [-1(x^2 + y^2 + z^2)^{-2} \cdot 2y] \\ &\quad + \hat{k} [-1(x^2 + y^2 + z^2)^{-2} \cdot 2z] \\ &= \frac{-2\hat{i}x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} - \frac{2\hat{j}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} - \frac{2\hat{k}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{-2(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)}{\left[ (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \right]^4} = -\frac{2\vec{r}}{|\vec{r}|^4} \\ &= -\frac{2}{|\vec{r}|^3} \hat{r} \end{aligned}$$

**prove that**  $\nabla \frac{1}{|\vec{r}|^3} = \frac{-3}{|\vec{r}|^4} \hat{r} = -\frac{3\vec{r}}{|\vec{r}|^5}$

س6/

الجواب/

$$\begin{aligned} \nabla \frac{1}{|\vec{r}|^3} &= \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \hat{i} \left[ -\frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x \right] + \hat{j} \left[ -\frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2y \right] \\ &\quad + \hat{k} \left[ -\frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2z \right] \\ &= \frac{-3\hat{i}x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\hat{j}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\hat{k}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-3(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)}{\left[ (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \right]^5} = -\frac{3\vec{r}}{|\vec{r}|^5} \\ &= -\frac{3}{|\vec{r}|^4} \hat{r} \end{aligned}$$

س7/ اذا علمت ان  $\vec{r}$  يمثل متجه مرسوم من نقطة الاصل الى النقطة  $(x,y,z)$  ، برهن صحة الصيغ الاتية:

- 1-  $\text{div } \vec{r} = 3$       2-  $\text{curl } \vec{r} = 0$       3-  $(\vec{u} \cdot \text{grad})\vec{r} = \vec{u}$  ,  $\vec{u}$  is any vector

حيث  $\vec{u}$  يمثل اي متجه .

الجواب/

$$1 - \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$2 - \vec{\nabla} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \hat{i} \left( \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left( \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) = 0$$

$$3 - (\vec{u} \cdot \text{grad})\vec{r} = \vec{u} \quad \text{let } \vec{u} = \hat{i}u_x + \hat{j}u_y + \hat{k}u_z$$

$$= \left[ (\hat{i}u_x + \hat{j}u_y + \hat{k}u_z) \cdot \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] (\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right] (\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z) \\
 &= u_x \frac{\partial}{\partial x} (\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z) + u_y \frac{\partial}{\partial y} (\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z) + u_z \frac{\partial}{\partial z} (\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z) \\
 &= \hat{i}u_x + \hat{j}u_y + \hat{k}u_z = \vec{u} \quad \therefore (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} = \vec{u}
 \end{aligned}$$

س8/ اذا كان  $A$  اي متجه ثابت بين ان :-

$$\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{r}) = \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{r}) = \vec{A}$$

الجواب /

$$\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z, \quad \vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z,$$

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = (\hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z) \cdot (\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z) = xA_x + yA_y + zA_z$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{r}) = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} A_x + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} A_y + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} A_z = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z = \vec{A}$$

prove that  $\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = 0$

س9/ اثبت ان:

الجواب /

if  $\vec{F} = \vec{r}$ , and  $\phi = \frac{1}{|\vec{r}|^3}$ , scalar

اذن حسب الفرضية :-

$$\vec{\nabla} \cdot \phi \vec{F} = \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \vec{\nabla} \phi = \frac{1}{|\vec{r}|^3} \vec{\nabla} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r}|^3}$$

ومن الامثلة السابقة تم اثبات مايلي:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3, \quad \nabla \frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2}, \quad \nabla \frac{1}{|\vec{r}|^3} = -3 \frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^4}$$

اذن :-

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} &= \frac{3}{|\vec{r}|^3} + \vec{r} \cdot \left( \frac{-3 \vec{r}}{|\vec{r}|^4 |\vec{r}|} \right) = \frac{3}{|\vec{r}|^3} - \frac{3 \vec{r} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^5} = \frac{3}{|\vec{r}|^3} - \frac{3 |\vec{r}|^2}{|\vec{r}|^5} = \frac{3}{|\vec{r}|^3} - \frac{3}{|\vec{r}|^3} \\
 &= 0, \quad \text{as } \vec{r} \cdot \vec{r} = r^2
 \end{aligned}$$

prove that  $\vec{\nabla}x \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = 0$

س10/

الجواب /

let  $\vec{F} = \vec{r}$ , and  $\phi = \frac{1}{|\vec{r}|^3}$

$$\nabla_{\mathbf{x}}\phi\mathbf{F} = \phi\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{F} + \nabla\phi_{\mathbf{x}}\mathbf{F}$$

وحسب الفرضية :

$$\vec{\nabla}x \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{1}{|\vec{r}|^3} \vec{\nabla}x\vec{r} + \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}|^3} x\vec{r}, \text{ but } \vec{\nabla}x\vec{r} = 0 \text{ and } \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}|^3} = -\frac{3\vec{r}}{|\vec{r}|^4}, \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{\nabla}x \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -\frac{3\hat{r}}{|\vec{r}|^4} x\vec{r} = -\frac{3\vec{r}x\vec{r}}{|\vec{r}|^5} = 0, \text{ as } \vec{r}x\vec{r} = 0$$

prove that  $\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2} \right) = \frac{1}{|\vec{r}|^2}$

س11/

الجواب /

let  $\vec{\psi} = \vec{r}$ ,  $\gamma = \frac{1}{|\vec{r}|^2}$  and according to  $\vec{\nabla} \cdot \gamma\vec{\psi} = \gamma\vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} + \vec{\psi} \cdot \nabla\gamma$

$$\therefore \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2} \right) = \frac{1}{|\vec{r}|^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}|^2}, \text{ but } \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3 \text{ and } \nabla \frac{1}{|\vec{r}|^2} = -\frac{2\vec{r}}{|\vec{r}|^4}$$

$$\therefore \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2} \right) = \frac{3}{|\vec{r}|^2} - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^4} = \frac{3}{|\vec{r}|^2} - \frac{2|\vec{r}|^2}{|\vec{r}|^4} = \frac{3}{|\vec{r}|^2} - \frac{2}{|\vec{r}|^2} = \frac{1}{|\vec{r}|^2}$$

### امثلة محلولة

مثال 1/ اوجد المتجه  $\vec{A}$  الذي يتجه من  $(2, -4, 1)$  الى  $(0, -2, 0)$  بالاحداثيات الكارتيزية واوجد متجه الوحدة على طول  $\vec{A}$ .

الجواب /

$$\vec{A} = (0 - 2)\mathbf{a}_x + [-2 - (-4)]\mathbf{a}_y + (0 - 1)\mathbf{a}_z$$

$$\vec{A} = -2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z, \quad |\vec{A}|^2 = (-2)^2 + (2)^2 + (-1)^2 = 9$$

$$\mathbf{a}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = -\frac{2}{3}\mathbf{a}_x + \frac{2}{3}\mathbf{a}_y - \frac{1}{3}\mathbf{a}_z$$

مثال 2/ اثبت ان المتجهين  $\vec{A} = 4\vec{a}_x - 2\vec{a}_y - \vec{a}_z$  و  $\vec{B} = \vec{a}_x + 4\vec{a}_y - 4\vec{a}_z$  متعامدين .

الجواب /

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (4 \times 1) + (-2 \times 4) + (-1 \times -4) = 0$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta, \quad \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = 0, \quad \text{then } \theta = 90, \quad \therefore \vec{A} \perp \vec{B}$$

مثال 3/ اذا كان  $\vec{A} = 2\vec{a}_x + 4\vec{a}_y$  و  $\vec{B} = 6\vec{a}_y - 4\vec{a}_z$  متجهين ، اوجد قيمة الزاوية الصغرى بينهما باستخدام :  
1- الضرب الاتجاهي 2- الضرب العددي .

الجواب / الفرع الاول من السؤال:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -16\vec{a}_x + 8\vec{a}_y + 12\vec{a}_z$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (0)^2} = 4.47, \quad |\vec{B}| = \sqrt{0^2 + 6^2 + (-4)^2} = 7.21$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(-16)^2 + (8)^2 + (12)^2} = 21.54$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{21.54}{4.47 \times 7.21} = 0.668, \Rightarrow \theta = 41.9^\circ$$

الفرع الثاني من السؤال:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2 \times 0) + (4 \times 6) + (0 \times -4) = 24$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{24}{4.47 \times 7.21} = 0.745, \Rightarrow \theta = 61.9$$

مثال 4/ اذا كان  $\vec{A} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$  و  $\vec{B} = \vec{a}_x + 2\vec{a}_z$  و  $\vec{C} = 2\vec{a}_y + \vec{a}_z$  ، اوجد  $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$  و  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$  وقارن بينهما

الجواب /

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{a}_x - 2\vec{a}_y - \vec{a}_z$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{a}_x + 4\vec{a}_z$$

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{a}_x - \vec{a}_y + 2\vec{a}_z$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{a}_x - 2\vec{a}_y + 3\vec{a}_z$$

وعلى ذلك يتضح مدى اهمية وضع الاقواس في الضرب الاتجاهي الثلاثي .

مثال 5 / باستخدام المتجهات  $A, B, C$  في السؤال الرابع اوجد  $(\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A}$  وقارن النتيجة مع  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$ .

الجواب / من السؤال السابق نجد ان :

$$(\vec{B} \times \vec{C}) = -4a_x - a_y + 2a_z$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (1 \times -4) + (1 \times -1) + (0 \times 2) = -5$$

وايضا من السؤال السابق نجد:

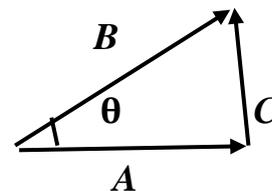
$$\vec{A} \times \vec{B} = 2a_x - 2a_y - a_z$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (2 \times 0) + (-2 \times 2) + (-1 \times 1) = -5$$

النتيجة نفسها مما يدل على وضع الاقواس في هذا النوع من الضرب الثلاثي غير ضرورية طالما ان المتجهات تظهر بنفس الترتيب الدوري فان النتيجة تكون واحدة اذ تتغير الاشارة عندما لا تكون بنفس الترتيب الدوري .

مثال 6 / بتربيع طرفي المعادلة  $\vec{A} = \vec{B} - \vec{C}$  برهن قانون الجيب تمام .

الجواب /



$$\vec{A} + \vec{C} = \vec{B} \Rightarrow \vec{A} = \vec{B} - \vec{C} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{A} = A^2 = (\vec{B} - \vec{C}) \cdot (\vec{B} - \vec{C}) = \vec{B} \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{C} - \vec{B} \cdot \vec{C} + \vec{C} \cdot \vec{C}$$

$$= B^2 - 2\vec{B} \cdot \vec{C} + C^2 = B^2 - 2BC \cos \theta + C^2$$

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos \theta$$

مثال 7 / جد تباعد والتفاف المتجه  $\vec{A} = \hat{i}(x^2 + y^2) + \hat{j}(y^2 + zx) + \hat{k}(z^2 + xy)$ .

الجواب /

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot [\hat{i}(x^2 + y^2) + \hat{j}(y^2 + zx) + \hat{k}(z^2 + xy)]$$

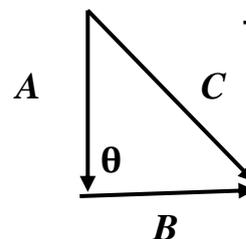
$$= \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) + \frac{\partial}{\partial y} (y^2 + zx) + \frac{\partial}{\partial z} (z^2 + xy) = 2x + 2y + 2z$$

$$= 2(x + y + z)$$

$$\begin{aligned} \text{curl } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x^2 + y^2) & (y^2 + zx) & (z^2 + xy) \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \left[ \frac{\partial}{\partial y} (z^2 + xy) - \frac{\partial}{\partial z} (y^2 + zx) \right] + \hat{j} \left[ \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2) - \frac{\partial}{\partial x} (z^2 + xy) \right] \\ &+ \hat{k} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (y^2 + zx) - \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) \right] = \hat{i}(x - x) + \hat{j}(0 - y) + \hat{k}(z - 2y) \\ &= -\hat{j}y + \hat{k}(z - 2y) \end{aligned}$$

مثال 8 / برهن على ان المتجهات الثلاثة :  $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ,  $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ ,  $\vec{C} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$  تمثل جوانب مثلث قائم الزاوية.

الجواب/ من الرسم :-



$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + (\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}) = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \cdot (\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}) = 2 + 3 - 5 = 0,$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = 0 \Rightarrow \theta = 90 \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$$

**( 1-3 ) مقدمة :**

ان حل اي مسألة كهروستاتيكية يكون سهلا في حالة معرفة التوزيع الشحني حيث يمكن ايجاد كل من المجال والجهد الكهربائي بسهولة وبصورة مباشرة وذلك بأخذ التكامل لتوزيع الشحنة بأجمعه وهذا ما رأيناه في الفصل السابق . اما اذا كان التوزيع الشحني غير محدد او غير معلوم فعليه يجب تعيين المجال الكهربائي اولا ، وفي هذا الفصل سنطور اسلوب بديل لمعالجة المسائل الكهروستاتيكية وسنتعامل في هذا الفصل مع الاجسام الموصلة ونترك المواد العازلة للفصل الرابع.

**( 2-3 ) معادلة بوزون : Poisson's Equation**

من الصيغة التفاضلية لقانون كاوس :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{but : } \vec{E} = -\nabla u, \quad \therefore \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} u = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

هذه معادلة بوزون

وتعطي  $\nabla^2 u$  وفق الاحداثيات الكارتيزية ( x,y,z ) كالآتي :

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ووفق الاحداثيات الكروية ( r, θ, ϕ ) :

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ووفقا للاحداثيات الاسطوانية ( r, ϕ, z ) :

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

**( 3-3 ) معادلة لابلاس : Laplace's Equation**

في طائفة معينة معينة من المسائل الكهروستاتيكية والتي تتضمن مواد موصلة تكون الشحنة بأجمعه مستقرة على سطح الموصل اي في مثل هذه الحالة تكون  $\rho = 0$  عند معظم النقاط في الفراغ وعندها ستؤول معادلة بوزون الى مايعرف بمعادلة لابلاس حيث تتلاشى كثافة الشحنة .

$$\nabla^2 u = 0$$

معادلة لابلاس .

( 3 - 4 ) حل معادلة لابلاس بمتغير واحد مستقل :

**Solution of Laplace's Equation in one independent variable**

1- عندما يكون  $u=u(x)$  اي دالة لمتغير واحد فقط هو  $x$  فان حل المعادلة بالاحداثيات الكارتيزية يكون كالتالي :-

$$\nabla^2 u(x) = 0, \Rightarrow \frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \Rightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dx} \right) = 0 \text{ or: } d \left( \frac{du}{dx} \right) = 0$$

$$\int d \left( \frac{du}{dx} \right) = \int 0, \Rightarrow \frac{du}{dx} = a, \int du = \int a dx, \quad \text{then: } u = ax + b$$

وهو الحل العام لمعادلة لابلاس بالاحداثيات الكارتيزية والقيم  $a, b$  هي ثوابت.

$$\text{but : } \vec{E} = -\vec{\nabla}u = -\frac{du}{dx} = -\frac{d}{dx}(ax + b) = -a$$

$$\therefore \vec{E} = -a$$

2- وفقا للاحداثيات الكروية لمتغير واحد مثلا اذا كان  $u=u(r)$  اي متغير فقط الى  $r$  اي ان :-

$$u = u(r), \quad \nabla^2 u = 0$$

وبالاحداثيات الكروية:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

ولمتغير واحد فقط مثل  $r$  فان :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0 \Rightarrow d \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0, \Rightarrow \int d \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) = \int 0 = A$$

$$\therefore r^2 \frac{du}{dr} = A, \Rightarrow \frac{du}{dr} = \frac{A}{r^2}, \Rightarrow \int du = A \int \frac{dr}{r^2}, \Rightarrow u = -\frac{A}{r} + B$$

وهي الحل العام بالاحداثيات الكروية حيث  $A, B$  ثوابت .

$$\text{but : } \vec{E} = -\vec{\nabla}u = -\frac{du}{dr} = -\frac{d}{dr} \left( -\frac{A}{r} + B \right) = \frac{-A}{r^2}$$

$$\therefore \vec{E} = -\frac{A}{r^2}$$

3- وفقا للاحداثيات الاسطوانية لمتغير واحد فقط :-

$$u = u(r), \quad \nabla^2 u = 0$$

اذا كانت ( $u$ ) دالة لمتغير واحد مثل ( $r$ ) اي :

وبالاحداثيات الاسطوانية :-

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = 0$$

$$\int d \left( r \frac{du}{dr} \right) = \int 0 \Rightarrow r \frac{du}{dr} = A$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{A}{r} \Rightarrow du = \frac{A}{r} dr \Rightarrow \int du = A \int \frac{dr}{r}$$

$$u = A \ln r + B$$

المعادلة اعلاه تمثل الحل العام لمعادلة لابلاس بالاحداثيات الاسطوانية حيث و  $A, B$  ثوابت .

$$\vec{E} = -\nabla u = -\frac{du}{dr} = -\frac{d}{dr} (A \ln r + B)$$

$$\therefore \vec{E} = -\frac{A}{r}$$

### ( 3 - 5 ) حل معادلة بويزون : Solution of Poisson's Equation

قد بينا سابقا ان معادلة لابلاس ملائمة لحل المسائل الكهروستاتيكية التي تمتاز بأن تكون الشحنة مستقرة على سطوح الموصلات او متمركزة على شكل شحنات نقطية او خطية ، كذلك تصح معادلة لابلاس اذا ماملنت المنطقة الكائنة بواحد او اكثر من الاوساط العازلة البسيطة .

لو أخذنا مسألة كهروستاتيكية بحيث يكون جزء من الشحنة معطى بدلالة كثافة الشحنة  $\rho(x, y, z)$  والجزء الباقي من الشحنة ( الشحنة المحتثة ) مستقرا على سطوح الموصلات ، ان مسألة من هذا النوع تتطلب حلا لمعادلة بويزون وكمثال على هذه نأخذ السؤال الاتي:-

س/ جد شدة المجال الكهربائي داخل حجم كروي فيه شحنات ، علما ان كثافة الشحنة الحجمية ثابتة وتساوي  $\rho$  وهي دالة للاحداثي  $r$  فقط وتتوزع الشحنة الكلية بشكل كروي متناظر .

الجواب/

$$\therefore \nabla^2 u = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) = -\frac{\rho r^2}{\epsilon_0}, \Rightarrow \int d \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \int r^2 dr$$

$$r^2 \frac{du}{dr} = -\frac{\rho r^3}{3 \epsilon_0} + C$$

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\rho r}{3 \epsilon_0} + \frac{C}{r^2}, \quad \rightarrow \int du = -\frac{\rho}{3 \epsilon_0} \int r dr + C \int \frac{dr}{r^2}$$

$$u = -\frac{\rho r^2}{6 \epsilon_0} - \frac{C}{r} + B$$

وهو الحل العام لمعادلة بويزون لمتغير واحد ( $r$ ) بالاحداثيات الكروية .

ولايجاد المجال الكهربائي:

$$\vec{E} = -\nabla u = -\frac{du}{dr} = -\frac{d}{dr} \left( \frac{-\rho r^2}{6 \epsilon_0} - \frac{C}{r} + B \right)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} - \frac{C}{r^2}$$

س/ جد الحل العام لمعادلة بويزون بالاحداثيات الكارتيزية عندما ( $x, z$ ) ثوابت .

الجواب /

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \text{but } x, z = \text{constant}$$

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{-\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{d}{dy} \left( \frac{du}{dy} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\int d \left( \frac{du}{dy} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \int dy$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{-\rho}{\epsilon_0} y + C \Rightarrow \int du = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \int y dy + C \int dy$$

$$\therefore u = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{y^2}{2} + Cy + b$$

$$\vec{E} = -\nabla u = -\frac{du}{dy}, \quad \vec{E} = -\frac{d}{dy} \left( -\frac{\rho y^2}{2 \epsilon_0} + Cy + b \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} y - C$$

س/ جد الحل العام لمعادلة بويزون بالاحداثيات الاسطوانية لمتغير واحد فقط .

الجواب / نفرض المتغير هو  $r$  فقط .

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

وبالاحداثيات الاسطوانية لمتغير واحد تصبح المعادلة :-

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} r, \quad \int d \left( r \frac{du}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \int r dr, \quad r \frac{du}{dr} = -\frac{\rho r^2}{2 \epsilon_0} + A$$

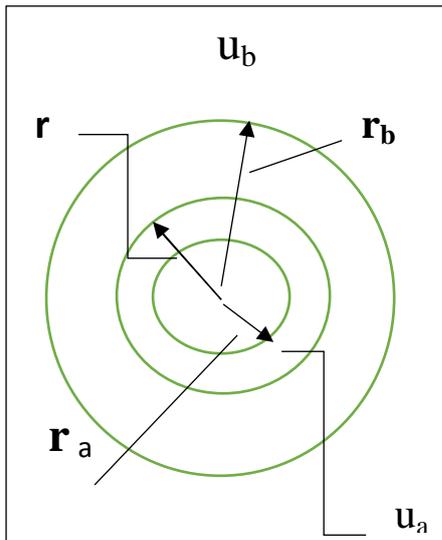
$$\therefore \frac{du}{dr} = \frac{-\rho r}{2 \epsilon_0} + \frac{A}{r}, \quad \int du = -\frac{\rho}{2 \epsilon_0} \int r dr + A \int \frac{dr}{r}$$

$$u = -\frac{\rho r^2}{4 \epsilon_0} + A \ln r + B$$

$$\vec{E} = -\nabla u = -\frac{du}{dr} = \frac{d}{dr} \left( -\frac{\rho r^2}{4 \epsilon_0} + A \ln r + B \right) = \frac{\rho r}{2 \epsilon_0} - \frac{A}{r}$$

### أسئلة الفصل الثالث

س1/ قشرتان كرويتان موصلتان نصف قطريهما  $r_a$  و  $r_b$  على الترتيب وضعتا بحيث ينطبق مركز الاولى على الثانية ثم شحنتنا الى ان اصبح جهد احدهما  $u_a$  و  $u_b$  على الترتيب ، فإذا كان  $r_b > r_a$  ، جد (1) الجهد عند النقاط الواقعة بين القشرتين . (2) الجهد عند النقاط الواقعة خارج القشرة الكبيرة.



الجواب /

1- لايجاد الجهد عند النقاط بين القشرتين اي:  $r_a < r < r_b$  وبما ان الكرتان موصلتان ، اذن ستكون المنطقة بينهما خالية من الشحنات  $\rho = 0$  لان الشحنات تستقر على السطح وهذا يعني ان:-

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

وبما ان  $u$  دالة الى  $r$  عليه سيكون :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0$$

والحل كما مر علينا سابقا

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0, \quad r^2 \frac{du}{dr} = A, \quad \int du = \int \frac{A}{r^2} dr, \Rightarrow u = -\frac{A}{r} + B$$

$$u = -\frac{A}{r} + B \dots \dots \dots (1)$$

هذا هو الحل العام بالاحداثيات الكروية : الان نطبق الشروط الحدودية لايجاد الثوابت A,B وهي .

$$\text{when } r = r_a, \quad u = u_a, \quad \text{and } r = r_b, \quad u = u_b$$

نعوض هذه الشروط في معادلة (1) فنحصل على :

$$u_a = -\frac{A}{r_a} + B \dots \dots \dots (2)$$

$$u_b = -\frac{A}{r_b} + B \dots \dots \dots (3)$$

نطرح معادلة (3) من معادلة (2) :

$$(u_a - u_b) = -A \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) = -A \left( \frac{r_b - r_a}{r_a r_b} \right)$$

$$\therefore -A = \frac{(u_a - u_b)}{(r_b - r_a)} (r_a r_b) \dots \dots \dots (4)$$

نعوض معادلة (4) في معادلة (2) لنجد قيمة B :-

$$u_a = \frac{(u_a - u_b)(r_a r_b)}{(r_b - r_a)r_a} + B, \quad \therefore B = u_a - \frac{(u_a - u_b)r_b}{r_b - r_a} \dots \dots \dots (5)$$

نعوض المعادلات (4) و (5) في معادلة (1) :-

$$u = \frac{(u_a - u_b)r_a r_b}{(r_b - r_a)r} + u_a - \frac{(u_a - u_b)r_b}{r_b - r_a}$$

$$= \frac{(u_a - u_b) \frac{r_a r_b}{r} + u_a(r_b - r_a) - (u_a - u_b)r_b}{r_b - r_a}$$

$$u = \frac{(u_a - u_b) \frac{r_a r_b}{r} + u_a r_b - u_a r_a - u_a r_b + u_b r_b}{r_b - r_a}$$

$$\therefore u = \frac{r_b u_b - r_a u_a + (u_a - u_b) \frac{r_a r_b}{r}}{r_b - r_a}$$

2- عندما  $r > r_b$  اي خارج القشرة الكبيرة :-

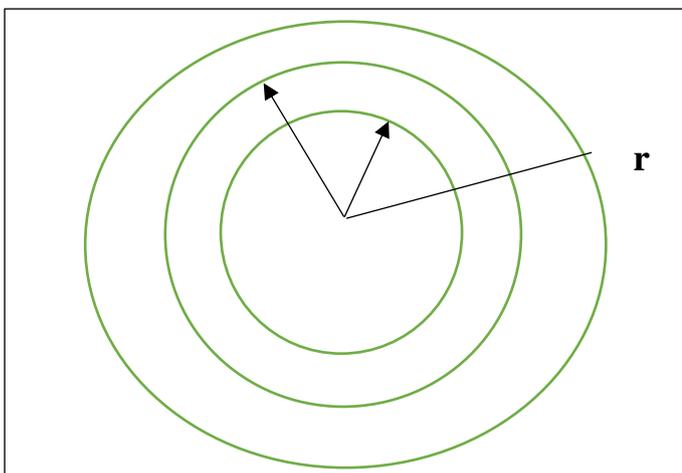
بما ان  $r$  تقع خارج القشرة فأحتمال ان تكون

النقطة في المالا نهائية وعليه الجهد يساوي صفر لان:

$$u = \frac{q}{4\pi r \epsilon_0} \rightarrow u \propto \frac{1}{r}$$

if  $r = \infty$ , then  $u = 0$

then :  $\nabla^2 u = 0$



وتأخذ نفس شكل الحل العام :

$$u = -\frac{A}{r} + B \dots \dots \dots (1)$$

نعوض الشروط الحدودية:-

$$\text{if } r = \infty, \quad \text{then } u = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{if } r = r_b, \quad \text{then } u = u_b \dots \dots \dots (3)$$

نعوض معادلة (2) في (1) :-

$$0 = -\frac{A}{\infty} + B, \quad \therefore B = 0 \dots \dots \dots (4)$$

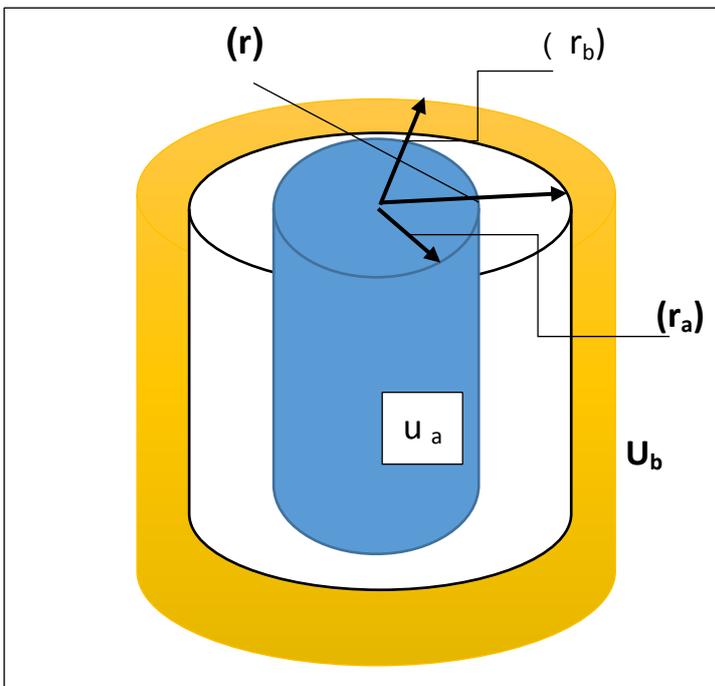
بتعويض معادلة (3) و (4) في (1) نحصل على :

$$u_b = -\frac{A}{r_b} + 0, \quad \therefore -A = r_b u_b \dots \dots \dots (5)$$

وبتعويض (4) و(5) في معادلة (1) نحصل على :-

$$u = \frac{r_b u_b}{r}$$

س2/ قشرتان اسطوانيتان متحدتا المركز نصف قطريهما  $r_b, r_a$  شحنتا الى ان اصبح جهدهما  $u_b, u_a$  على الترتيب جد الجهد عند النقاط بين القشرتين.



الجواب/

المنطقة بين القشرتين خالية من الشحنات

$$\rho = 0$$

اي ان :  $\nabla^2 u = 0$

ومعادلة لابلاس بالاحداثيات الاسطوانية :

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{والحل العام}$$

لمعادلة لابلاس بالمحاور الاسطوانية:-

$$u = A \ln r + B \dots \dots (1)$$

نطبق الشروط الحدودية لمعرفة الثابت  $A, B$

$$\text{when } r = r_a, \quad u = u_a, \quad \text{and } r = r_b, \quad u = u_b$$

$$u_a = A \ln r_a + B \dots \dots (2)$$

$$u_b = A \ln r_b + B \dots \dots (3)$$

ب طرح المعادلتين نحصل على :-

$$u_a - u_b = A(\ln r_a - \ln r_b) = A \ln \frac{r_a}{r_b}, \quad \therefore A = \frac{u_a - u_b}{\ln \frac{r_a}{r_b}} \dots \dots \dots (4)$$

نعوض معادلة (4) في معادلة (2) ليجاد الثابت B :-

$$B = u_a - \frac{u_a - u_b}{\ln \frac{r_a}{r_b}} \ln r_a \dots \dots \dots (5)$$

نعوض معادلة (4) و(5) في معادلة (1) :-

$$U = \frac{u_a - u_b}{\ln \frac{r_a}{r_b}} \ln r + u_a - \frac{u_a - u_b}{\ln \frac{r_a}{r_b}} \ln r_a = \frac{(u_a - u_b) \ln r + u_a \ln \frac{r_a}{r_b} - (u_a - u_b) \ln r_a}{\ln \frac{r_a}{r_b}}$$

$$= \frac{(u_a - u_b) \ln r + u_a (\ln r_a - \ln r_b) - (u_a - u_b) \ln r_a}{\ln \frac{r_a}{r_b}}$$

$$\therefore U = \frac{u_b \ln r_a - u_a \ln r_b + (u_a - u_b) \ln r}{\ln \frac{r_a}{r_b}}$$

س3/ اثبت ان جهد الشحنة النقطية يحقق معادلة لابلاس .

الجواب / يعطى جهد الشحنة النقطية بالعلاقة الآتية :-

$$u = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{q}{|\vec{r}|}$$

وبأستخدام هذه المعادلة يجب ان تحقق معادلة لابلاس (  $\nabla^2 u = 0$  ) وسنستخدم الاحداثيات الكروية ولمتغير واحد ( r )

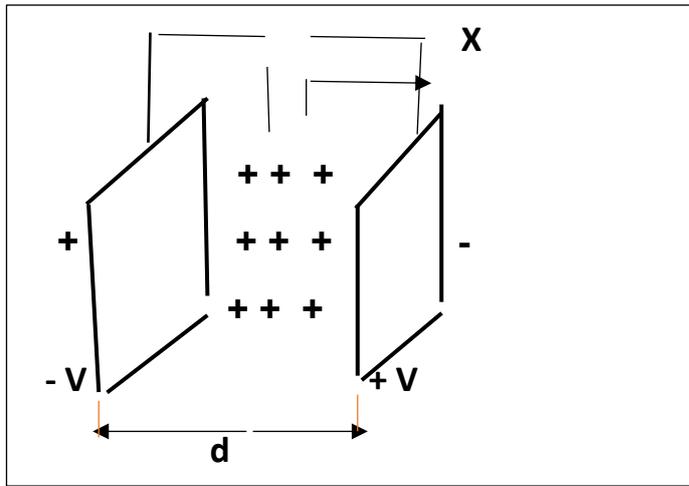
$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r} \right] \right) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ \frac{qr^2}{4\pi \epsilon_0} \left( -\frac{1}{r^2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{-q}{4\pi \epsilon_0} \right) = 0$$

لان مشتقة الثابت = صفر لذلك :

$$\nabla^2 u = 0$$

س4 / ربطت صفيحتا متسعة ذات لوحين متوازيين المسافة بينهما ( d ) ببطارية بفرق جهد ( V ) فإذا كانت كثافة الشحنة في الفراغ بين الصفيحتين تساوي ( ρ ) وهي منتظمة ، اوجد في كل نقطة داخل المتسعة العلاقة الخاصة لكل من 1- الجهد بالنسبة للصفحة الموجبة ، 2- شدة المجال.



الجواب /

نلاحظ ان الجهد u يتغير باتجاه واحد عمودي على مستوي الصفيحتين وليكن بالاتجاه x .  
ولحل هذا السؤال نستخدم معادلة بويزون وذلك لكون ρ محدودة ومعلومة اي ان :-

$$\nabla^2 u = \frac{-\rho}{\epsilon_0}$$

ولو كانت الكثافة ρ غير معلومة لاستخدمنا معادلة لابلاس ( ∇²u = 0 )

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dx} \right) = \frac{-\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \int d \left( \frac{du}{dx} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \int dx \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{\rho x}{\epsilon_0} + A$$

$$\int du = \frac{-\rho}{\epsilon_0} \int x dx + A \int dx \Rightarrow U = -\frac{\rho x^2}{2 \epsilon_0} + Ax + B \dots \dots \dots (1)$$

هذا هو الحل العام ولايجاد الثوابت A , B نطبق الشروط الحدودية :

if x = 0 , then U = U<sub>o</sub> , and if x = d , then U = U<sub>o</sub> - V

نعوض الشروط الحدودية في معادلة ( 1 ) نحصل على :-

if x = 0, U = U<sub>o</sub>, B = U<sub>o</sub>

if x = d, U = U<sub>o</sub> - V, ∴ U<sub>o</sub> - V = -\frac{\rho d^2}{2 \epsilon\_0} + Ad + U<sub>o</sub>, ∴ A = -\frac{V}{d} + \frac{\rho d}{2 \epsilon\_0}

نعوض قيم الثوابت A, B في معادلة (1) فنحصل على :-

$$U = -\frac{\rho x^2}{2 \epsilon_0} + \left( \frac{\rho d}{2 \epsilon_0} - \frac{V}{d} \right) x + U_0$$

ولايجاد قيمة المجال E ، حيث U تتغير باتجاه x فقط فان :

$$E_x = -\nabla U = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx} \left[ -\frac{\rho x^2}{2 \epsilon_0} + \left( \frac{\rho d}{2 \epsilon_0} - \frac{V}{d} \right) x + U_0 \right]$$

$$E_x = \left[ \frac{V}{d} + \frac{\rho}{2 \epsilon_0} (2x - d) \right]$$

ملاحظة :- اذا كانت ρ = 0 فان E = \frac{V}{d} وهي تمثل العلاقة بين الجهد و شدة المجال بين لوحى المتسعة .

### ( 8 - 1 ) الخواص المغناطيسية للمادة :- *Magnetic Properties of Matter*

تتكون المادة من ذرات وكل ذرة تحتوي على الكترونات في حالة متحركة وحركة كل الكترون مقيدة داخل الذرة التي تنتمي اليها . هذه الدوائر الكهربائية الناشئة عن حركة الالكترونات في الذرة تسمى بالتيارات الذرية . لذا سيكون هناك نوعان من التيارات الذرية :

- 1- تيار حقيقي يتكون من انتقال الشحنة بسبب حركة الالكترونات الطليقة والايونات المشحونة .
  - 2- تيار ذري ناشئ من حركة دورانية بحتة لاتؤدي الى حدوث انتقال في الشحنة .
- ومع ذلك نجد ان كلا من هذين النوعين من التيار يساهم في تكوين المجالات المغناطيسية .

### ( 8 - 2 ) التمعظ : *Magnetization*

يعد كل تيار ذري بمثابة دائرة كهربائية صغيرة جدا ذات ابعاد ذرية ولهذا السبب قد يكون من الملازم وصفه كثنائي قطب مغناطيسي والحقيقة ان عزم ثنائي القطب المغناطيسي هو المقدار هو المقدار الذي يهمننا طالما ان مجال الحث المغناطيسي الناشئ عن ذرة منفردة عند نقاط بعيدة يحدد كليا بعزم ثنائي القطب المغناطيسي لها  $m$  . نفرض ان العزم المغناطيسي لذرة ما هو  $(m)$  اما  $M$  فهي كمية عينية متجهة ناتجة من جمع كل عزوم ثنائيات الاقطاب المغناطيسية الموجودة في عنصر صغير من الحجم  $\Delta V$  جمعا اتجاها ومن ثم تقسيم ناتج الجمع على  $\Delta V$  اي ان :-

$$M = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i m_i$$

وبمعنى اخر ان التمعظ يساوي عزوم ثنائي القطب لوحدة الحجم من المادة . ففي حالة ان تكون المادة غير مغمطة فان ناتج كل الجمع  $\sum_i m_i$  سيؤول الى الصفر نتيجة للاتجاهات العشوائية لعزوم ثنائيات القطب  $m_i$  ولكن بوجود مجال مغناطيسي خارجي ينشأ تمغظ  $M$  يعتمد على هذا المجال . اي الدالة  $M$  تعطي وصفا عينيا للتيارات الذرية داخل المادة اي انها تقيس عدد الدوائر الذرية لوحدة الحجم مضروبا بمتوسط العزم المغناطيسي لكل دائرة كهربائية . مما سبق نلاحظ ان الصفات العينية للتمعظ اعطيت بدلالة الدالة  $M$  التي تصف الصفات المغناطيسية للمادة . وفي هذا الفصل سننظر الى الموضوع من وجهة نظر مجهرية *microscopic view of point* ( اي مجموعة ذرات وجزينات ) وكيف تستجيب الجزينات انفراديا لتأثير المجال المغناطيسي وبالتالي نصل الى صباغة نظرية لقابلية التمعظ للوسط المادي واستخراج علاقة بين  $B - H$  لكافة انواع المواد وسنشير هنا بالرمز  $m$  اسفل  $B$  او  $H$  للاشارة الى كلمة مجهري اي تصبح  $B_m$  او  $H_m$  .

### ( 8 - 3 ) المجال الجزيني داخل المادة : *Molecular field inside matter*

يعد المجال المغناطيسي فعالا في تأثيره المتبادل مع التيارات الذرية في ذرة او وجزينة يطلق عليه اسم المجال الجزيني

$$B_m = \mu_0 H_m$$

حيث :  $B_m$  : المجال المغناطيسي للجزينة او الذرة .

$H_m$  : شدة المجال المغناطيسي للذرة او الجزينة .

ويسمى  $B_m$  احيانا بالمجال الموقعي وهو المجال المغناطيسي عند موقع جزيني او ذري في المادة وينشأ عن مصادر خارجية وعن كافة ثنائيات القطب الجزينية في المواد مع استثناء الجزينة الواحدة (الذرة) عند النقطة قيد الدرس . هذا يعني أن  $B_m$  ليس بالضرورة ان يكون مساوي لمجال الحث العيني ( *Macroscopic* ) لأن الاخير متعلق بالقوة على عنصر تيار ذي ابعاد كبيرة مقارنة مع الابعاد الجزئية . لوناخذ قطعة صغيرة من جسم مادي يمتلك تمغظ منتظم قدره  $M$  تاركين تجويفا كرويا يحيط بالنقطة المراد قياس المجال الجزيني عندها ، ثم نعالج جزء المادة المتبقية كسلسلة متصلة وذلك من وجهة النظر العينية ومن ثم نعيد وضع المادة المستقطبة داخل التجويف جزينة بعد جزينة ، ماعدا الجزينة التي تقع عند مركز التجويف حيث ينبغي حساب المجال الجزيني عند موقعها . اما الجزينات التي اعيدت الان فتعامل كثنائيات قطب منفردة او زمر من الثنائيات وليست كمادة متصلة كما في الحالة العينية . يمكن ايجاد شدة المجال المغناطيسي  $H$  او المجال العيني كالآتي :

$$H = \frac{1}{4\pi} \int \frac{JX(r - \hat{r})}{|r - \hat{r}|^3} dV + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho_m(r - \hat{r})}{|r - \hat{r}|^3} dV + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\sigma_m(r - \hat{r})}{|r - \hat{r}|^3} da$$

لذا يمكننا ايجاد المجال الجزئي  $H_m$  بطريقة مماثلة ما عدا هناك اسهامات اضافية ناتجة عن سطح التجويف وعن ثنائيات القطب المنفردة في التجويف . نلاحظ انه لايشمل التكامل  $\frac{\rho_m(r-\hat{r})}{|r-\hat{r}|^3}$  حول التجويف لأن :

$$\rho_m = -div M = 0$$

في عينة منتظمة التمعظ. وبهذا فإن :

$$H_m = H + H_S + \dot{H} \dots \dots \dots (1)$$

حيث :  $H$ : شدة المجال المغناطيسي العيني في النموذج .  $H_S$  :- الاسهام الناتج عن كثافة القطب السطحية  $\sigma_M = M_n$  على سطح التجويف .  $\dot{H}$  : الاسهام الناتج عن ثنائيات القطب المختلفة داخل التجويف . وهذا يعني ان  $H_S$  يكتب بالصيغة التالية:

$$H_S = \frac{1}{3} M \dots \dots \dots (2)$$

كذلك فإن اسهام ثنائي القطب يكون :

$$\dot{H} = \frac{1}{4\pi} \sum_i \left[ \frac{3(m_i \cdot r_i)r_i}{r_i^5} - \frac{m_i}{r_i^3} \right] \dots \dots \dots (3)$$

حيث  $r_i$  المسافة من ثنائي القطب ( $i$ ) الى مركز التجويف وهذه المعادلة مشابهة الى صيغة الحد المناظر لثنائي القطب الكهربائي  $\dot{E}$ .

فأذا حصرنا اهتمامنا بصنف كبير من المواد التي تمتاز بأن تتلاشى فيها المعادلة (3) فان المعادلة (1) تختزل الى الاتي:

$$H_m = H + \frac{1}{3} M \dots \dots \dots (4)$$

$$B_m = \mu_o H_m \dots \dots \dots (5)$$

والمعادلتان (4) و (5) تمثل المجال الجزئي بدلالة الشدة المغناطيسية العينية والتمغظ . لمعظم المواد البارا والدايا مغناطيسية يكون الحد

$$\frac{1}{3} M = \frac{1}{3} \chi_m H$$

صغيرا ومهملا في حين للمواد الفيرومغناطيسية يكون مهما للغاية.

### ( 4 – 8 ) منشأ الدايا مغناطيسية : *Origin Of Diamagnetism*

الدايامغناطيسية ظاهرة ناتجة عن تطبيق قانون لنز على النطاق الذري فعند تسليط المجال المغناطيسي تحور التيارات الالكترونية في كل ذرة بطريقة بحيث انها تحاول ان تضعف تأثير هذا المجال . ولحساب قابلية التمعظ الدايامغناطيسية لمجموعة ذرات ينبغي معرفة بعض الشئ عن الحركة الالكترونية في الذرة نفسها . لنفرض ان الكترون يدور في مدار ما حول النواة الذرية ، لنأخذ مدارا دائريا نصف قطره  $R$

في مستوي عمودي على المجال المغناطيسي المؤثر ، وحسب الميكانيك الكمي فإن الالكترونات لاتدور حول النواة بمدارات معرفة بدقة لذا وبعد حل معادلة شرودنجر لالكترون ذري في مجال مغناطيسي سنحصل على القيمة التقريبية لحساب قابلية التمعظ

للمواد الدايامغناطيسية . قبل تسليط مجال الحث المغناطيسي ، فإن الالكترون يكون في حالة مستقرة في مداره .

$$F_q = m_e \omega_o^2 R_i \dots \dots \dots (6)$$

حيث ان :  $F_q$  تمثل القوة الكهربائية التي تبقى الالكتران في ذرته .  $\omega_o$  : تمثل التردد الزاوي في مداره .  $m_e$  : كتلة الالكتران .

فعدتسليط مجال مغناطيسي تنشأ قوة اضافية مؤثرة على الالكتران قدرها  $(-qvXB_m)$  وعلى فرض بقاء الالكتران بالمدار نفسه نجد ان :

$$F_q \mp q\omega R_o B_m = m_e \omega^2 R$$

وعند دمجها مع معادلة (6) :

$$\mp q\omega B_m R = R m_e (\omega^2 - \omega_o^2)$$

$$\mp q\omega B_m = m_e (\omega - \omega_o)(\omega + \omega_o) \dots \dots \dots (7)$$

حيث :  $\Delta\omega = \omega - \omega_o$  تمثل التغير في التردد الزاوي للالكتران .

لذا فإن الالكتران إما يتسارع او يتباطأ في مداره معتمدا على التفاصيل الهندسية ( اي معتمداً على اتجاه  $\nabla XB_m$  بالنسبة الى  $F_q$  ) . ولكن في كلتا الحالتين ووفقا لقانون لنز نجد ان التغير في العزم المغناطيسي المداري يكون في اتجاه مضاد للمجال المؤثر ، لذا فعد المجالات الكبيرة فإن  $\Delta\omega$  تكون صغيرة جدا بالنسبة الى  $\omega_o$  لذا يمكن تقريب معادلة (7) الى الصيغة الاتية :-

$$\Delta\omega = \mp \frac{q}{2m_e} B_m \dots \dots \dots (8)$$

ويسمى بتردد لارمور **Larimore Frequency**.

افتراضنا لحد الان بقاء الالكتران في المدار نفسه ، كما استخدمنا هذه الفرضية بالاضافة الى توازن القوى لأشتقاق معادلة (8) ولبقاء الالكتران في مداره فإن التغير في طاقته الحركية طبقا لقانون فاراداي للحث يجب ان يكون مطابقا للمعادلة (8) .

وعند بدء تأثير المجال المغناطيسي يصبح هناك تغير في الفيض خلال المدار والذي يطى بالكمية  $(\pi R^2 \Delta B_m)$  وهذا الفيض يكون مرتبطا بدورات الالكتران والتي قدرها  $\Delta n$  حيث انها تمثل عدد الدورات التي يعملها الالكتران خلال فترة تغير المجال . هذا التغير في الفيض يولد قوة دافعة كهربائية تمثل بالعلاقة الاتية :-

$$\varepsilon = \pi R^2 \frac{dB_m}{dt} \Delta n = \pi R^2 \frac{dn}{dt} \Delta B_m \dots \dots \dots (9)$$

اما الطاقة المعطاة للالكتران في هذه العملية فتكون  $\varepsilon_e$  وتظهر كتغير في الطاقة الحركية قدره :-

$$\frac{1}{2} m_e R^2 (\omega^2 - \omega_o^2) = e\pi R^2 \frac{dn}{dt} \Delta B_m \dots \dots \dots (10)$$

حيث :  $\Delta B_m$  يمثل القيمة النهائية للمجال  $B_m$  ومعدل قيمة  $dn/dt$  تساوي :

$$\frac{dn}{dt} = \frac{(\omega + \omega_o)}{4\pi}$$

وبهذا تكون :-

$$\frac{1}{2} m_e R^2 (\omega - \omega_o)(\omega + \omega_o) = e\pi R^2 \frac{(\omega + \omega_o)}{4\pi} B_m$$

$$\therefore \Delta\omega = (\omega - \omega_o) = \frac{e}{2m_e} B_m$$

متفقة مع المعادلة (8) اي ان فرضية المدار الثابت لاتقود الى تناقض للمعادلة (9) ومعادلة القوة . وبسبب التغير في السرعة الزاوية المتوقع من المعادلة من معادلة (8) تغيرا في عزم مغناطيسي قدره:

$$\Delta m = -\frac{e}{2\pi} \pi R^2 \frac{e}{2m_e} B_m = -\frac{e^2}{4m_e} R^2 \mu_o H_m \dots \dots \dots (11)$$

حيث :  $B_m = \mu_0 H_m$  ولايجاد التمغنت لابد من جمع هذه النتيجة لكافة الالكترونات في وحدة الحجم  $N$  على اعتبار أن الجزيئات من صنف واحد .

$$M = -\frac{Ne^2}{4m_e} \mu_0 H_m \sum_i R_i^2 \dots \dots \dots (12)$$

حيث يغطي الجمع كافة الالكترونات الموجودة في الجزيئة الواحدة. واما المواد الدايمغناطيسية فإننا نجد ان  $H_m$  يختلف جزئيا عن  $H$  . لذا فإن قابلية التمغنت للدايمغناطيسية هي :

$$\chi_m = -\frac{Ne^2 \mu_0}{4m_e} \sum_i R_i^2$$

حيث :  $\chi_m = \frac{M}{H_m}$

تم الحصول على هذه النتيجة على فرض ان كافة الالكترونات تدور في مستويات عمودية على المجال  $H_m$  . وعند ميلان المدار بحيث ان العمود على المدار يصنع زاوية قدرها  $\theta_i$  مع المجال . فان مركبة  $H_m$  على طول هذا العمود (  $H_m \cos \theta_i$  ) تكون فعالة في تغيير السرعة الزاوية للالكترون بالاضافة الى ذلك فان مركبة  $\Delta m$  الموازية للمجال تكون اصغر بمعامل قدره  $\cos \theta_i$  اي افضل قيمة لقابلية التمغنت الدايمغناطيسية التقريبية تعطى بالعلاقة :

$$\chi_m = -\frac{N\mu_0 e^2}{4m_e} \sum_i R_i^2 \cos^2 \theta \dots \dots \dots (13)$$

من المفروض ان تظهر الدايمغناطيسية في كافة المواد ولكن يحجب تأثيرها اعتياديا نتيجة للسلوكين البارافيرومغناطيسية اللذان يمكن ان يحدثا انياً في المادة . ويتفوقان على سلوك الدايمغناطيسية . يكون سلوك الدايمغناطيسية هو المتغلب في مواد متكونة كلياً من ذرات او ايونات ذات قشرات الكترونية مغلقة حيث تتعادل كافة المساهمات البارامغناطيسية ويزول تأثيرها في مثل هذه المواد.

### ( 8 - 5 ) منشأ البارامغناطيسية : *Origin of Para magnetism*

يمكن وصف الحركة المدارية لأي الكترون في ذرة أو جزيئة بدلالة العزم المغناطيسي وكذلك فمن المعروف ان الالكترون يمتلك خاصية ذاتية يطلق عليها خاصية البرم كما يمتلك عزماً مغناطيسياً ذاتياً مرافقاً لشحنته التي تكون في حالة حركة مغزلية ( *spin* ) . لذا فإن لكل جزيئة عزم مغناطيسي مقداره  $m_i$  والذي يمثل الجمع الاتجاهي للعزوم المدارية والبرمية الناشئة عن الالكترونات المختلفة في الجزيئة . وبإختصار فإن البارامغناطيسية تنتج عن ميل هذه العزوم الجزيئية للترافف مع المجال المؤثر كما هي الحالة في دائرة التيار الكهربائي التي تميل الى ترافف نفسها مع المجال وهذه الحالة ليست ببساطة التيار ووضوحه في دائرة كهربائية والحقيقة ان هناك تعقيدين هما :-

اولا :- في حالة وجود مجال مغناطيسي

ثانيا :- ان الحركة الالكترونية داخل الذرة التي تؤدي الى تكوين  $m_i$  تولد ايضا زخماً زاوياً حول الذرة والحقيقة ان  $m_i$  ترتبط بعلاقة خطية مع هذا الزخم الزاوي.

تحت هذه الشروط فإن العزم المغناطيسي سوف لايعمل على ترافف عزم ثنائي القطب  $m_i$  مع المجال مباشرة ولكن سيؤدي الى طوافها *Precis's* حول المجال وبميل ثابت . وتكون الذرات او الجزيئات في منظومتنا المادية في حالة تلامس حراري فيما بينها وتكون الذرات في الغاز او السائل في حالة تصادم مع بعضها البعض باستمرار في حين تخضع الذرات في المواد الصلبة لتذبذب حراري وتحت هذه الظروف تتمكن  $m_i$  من استبدال الطاقة المغناطيسية بالطاقة الحرارية ومن الانتقال من حالة الى حالة اخرى ذات طابع مختلف وتحاول طاقة المنظومة الحرارية ان تؤثر بطريقة معينة بحيث ينتج عنها اتجاه عشوائي لـ  $m_i$  الا ان اتجاهات  $m_i$  التي تكون باتجاه المجال او بالاتجاه القريب من ذلك

تمتلك طاقة مغناطيسية اقل وبهذا فان تلك الاتجاهات تصبح متغلبة . هذه الحالة تشبه تماما حالة الجزيئات القطبية  
الموضوعة في مجال كهربائي .  
ولمادة متجانسة من نوع جزيئي واحد حيث تمتلك كل جزيئة عزما مغناطيسية قدره  $m_o$  يعطى الاتجاه بصورة تقريبية  
بواسطة  
دالة لانجفن :-

$$\langle m_o \cos\theta \rangle = m_o \left[ \coth y - \frac{1}{y} \right]$$

حيث:

$$y = \frac{m_o \mu_o H_m}{KT} \dots \dots \dots (14)$$

ويعطى التمعنت بالعلاقة الاتية :

$$|M| = Nm_o \left[ \coth y - \frac{1}{y} \right] \dots \dots \dots (15a)$$

حيث تمثل  $N$  عدد الجزيئات لوحدة الحجم .

يمكننا تقريبات دالة لانجفن لتشمل الحد الاول من متسلسلتها الأسية اذا تم استثناء درجات الحرارة القريبة من الصفر  
المطلق وبهذا :

$$M = \frac{Nm_o^2}{3KT} \mu_o H_m \dots \dots \dots (15b)$$

والتي تؤول الى الصيغة الاتية لقابلية التمعنت المغناطيسية .

$$\chi_m = \frac{Nm_o^2 \mu_o}{3KT} \dots \dots \dots (16)$$

ووفقا للنظرية الذرية ، فان قيمة  $m_o$  تكون بحدود بضعة مغنيتون بور ( $1 \text{ Bohr } ) Bohr magneton$

$magneton = \frac{eh}{4\pi m_e}$  هو ثابت بلانك ) . باختصار ولمعرفة سلوكية البارامغناطيسية فان ذرات او جزيئات المنظومة

ينبغي ان تمتلك عزوما مغناطيسية دائمة تميل الى التراصف مع اتجاه المجال المؤثر . كذلك فان العزوم المغناطيسية  
المختلفة تكون غير مزدوجة اي انها تقوم بالطواف حول المجال المغناطيسي كوحداث منفردة (وليس كمجموعة  
منسجمة ) ولكنها قادرة على تبادل الطاقة بسبب التماس الحراريمع محيطها باستثناء الدرجات الحرارية القريبة من  
الصفر المطلق وتأثير المجالات الانية الكبيرة فان التمعنت يكون فيها اقل بكثير من متجه التشبع المغناطيسي التي يمكن  
الحصول عليها عند تراصف كافة عزوم ثنائيات القطب .

### ( 6 – 8 ) النظرية الفيرومغناطيسية : Theory of Ferromagnetism

في المواد الفيرومغناطيسية تكون العزوم المغناطيسية الذرية او الجزيئية متراصفة تقريبا حتى في حالة غياب المجال  
المؤثر ويؤدي هذا التراصف الى نشوء المجال الجزيئي  $H_m$  الذي لايتلاشى بغياب المجال الخارجي  $H=0$  مالم تتلاشى  
 $M$  انياً ويعمل التمعنت على انشاء مجال جزيئي ولكن مالم يولد هذا المجال الجزيئي نفس مقدار التمعنت  $M$  الذي  
يفترض وجوده في المادة فان الحل يكون متناقضا وان المشكلة هي تعيين الظروف التي تجعل التمعنت قادرا على دعم  
نفسه بواسطة المجال الجزيئي .

$$H_m = H + \gamma M , \quad \text{if } H = 0 \text{ then } H_m = \gamma M \dots \dots \dots (16a)$$

ووفقا للنظرية فان :  $H_s = \frac{1}{3} M$  وهذا يعني ان  $\gamma = \frac{1}{3}$  فاذا كان جمع حدود المعادلة (3) لايساوي صفر

فان قيمة  $\gamma$  قد لايساوي  $\frac{1}{3}$  ومع ذلك فاننا نتوقع ان تكون قيمتها ( $\gamma$ ) كذلك . اذا اخذنا مادة متجانسة من نوع واحد من

الذرات ( نوع ذري واحد ) حيث تمتلك كل ذرة عزمًا مغناطيسياً قدره  $m_o$  وان عدد الذرات لوحدة الحجم  $N$  فإذا كانت العزوم الذرية متراففة تقريباً فإن  $M$  يجب ان تمثل جزءاً كبيراً من  $Nm_o$  اي دعنا نأخذ :

$$M > 0.7 Nm_o \dots \dots \dots (17)$$

وحسب المعادلة ( 15a ) ينتج :-

$$\left[ \coth y - \frac{1}{y} \right] > 0.7 \quad \text{or } y = 3$$

كما هو معروف بالمعادلة (14) فان :

$$y = \frac{m_o \mu_o H_m}{KT} > 3$$

وبدمج المعادلتين (16a) مع (17) نحصل على :-

$$0.7 \frac{\gamma N \mu_o m_o^2}{KT} > 3 \dots \dots \dots (18)$$

وهذا هو الشرط التقريبي لحدوث الفيرومغناطيسية . لذا تتطلب المعادلة (18) بان تكون قيمة  $\gamma$  حوالى  $10^3$  والتي تكون اكبر بكثير مما يمكن اخذه بالحسبان في الاشتقاق المقدم لذا يظهر ان منشأ الفيرومغناطيسية يكون معقداً بشكل كبير اكثر من الحالة المناظرة في الفيروكهربائية. يعتبر بييرويس اول من ادرك الدور الاساس الذي يؤديه المجال الجزيئي ولم يستطع توضيح قيمة  $\gamma$  الكبيرة ولكنه اقراها كحقيقة حيث وجد ان نظرية ويس *Weiss* قريبة من التطابق مع التجارب ومن ثم اتى هايزنبرك بعده وقام بتوضيح القيمة الكبيرة لـ  $\gamma$  حيث اوضح مايلى :-  
 اولاً :- ان العزوم البرمية المغناطيسية تسهم في انشاء المجال الجزيئي فقط .  
 ثانياً :- ان المجال ينشأ اساساً من قوى كهروستاتيكية .

كما بين هايزنبرك ان المجال ينشأ على اساس الميكانيك الكمي بأنه متى ماتغير برم الذرات من تراصف متواز الى تراصف معاكس للتوازي فانه ينبغي ان يكون هناك تغير آني في التوزيع الشحني الالكتروني في الذرات ، وهذا بدوره يغير من طاقة المنظومة الكهروستاتيكية وفي بعض الحالات يكون باتجاه تراصف التوازي (الفيرومغناطيسية) وعندها يمكن دراسة الطاقة التي تعتمد على طريقة ترتيب برم المنظومة بدلالة القوة او العزم الذي ينشأ على احدى الذرات عند تغيير الترتيب.

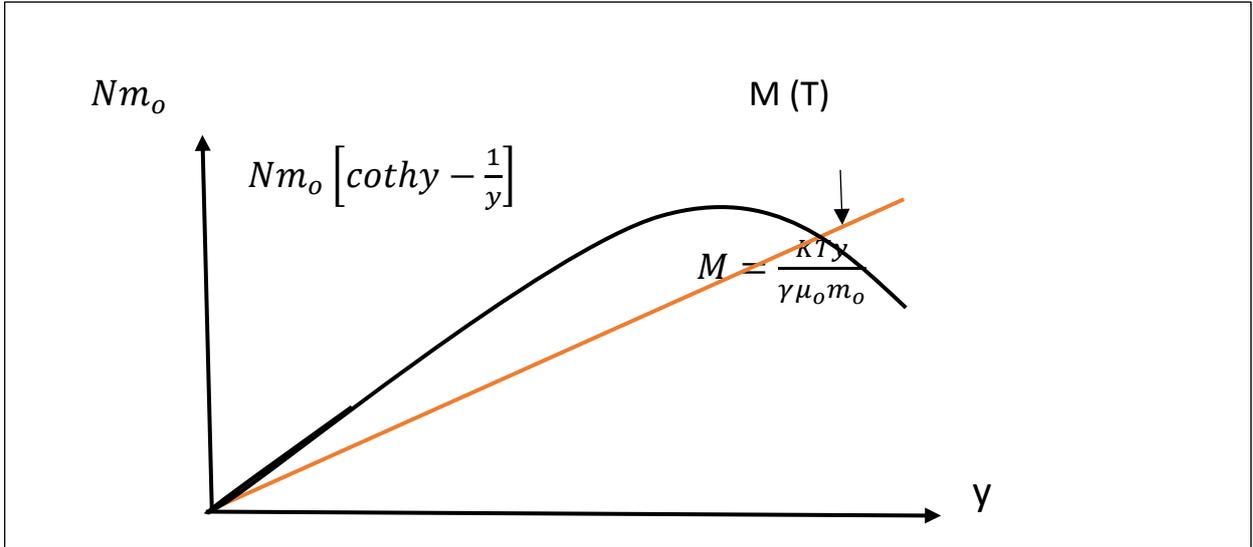
يمكن استخدام نظرية ويس – هايزنبرك *Weiss-Heisenberg* للتنبؤ بالطريقة التي يتغير بها تمغنت الفيرو مع درجة الحرارة حيث تصور هذه النظرية حالة الفيرو كحالة نهائية للبارا في مجال كبير الى حد ما ولكن هذا المجال ينشأ عن التمغنت نفسه .

وبدمج المعادلات ( 16a ) و (14) و (15) ينتج :

$$M = Nm_o \left[ \coth y - \frac{1}{y} \right] \dots \dots \dots (19)$$

$$M = \frac{KTy}{\gamma \mu_o m_o} \dots \dots \dots (20)$$

ويمكن ايجاد التمغنت الذاتي ( التمغنت عندما يكون المجال الخارجي يساوي صفراً ) لدرجة حرارة معينة من الحل الانبي للمعادلتين (19) و (20) وذلك برسم  $M$  كدالة الى  $y$  كما موضح ادناه :

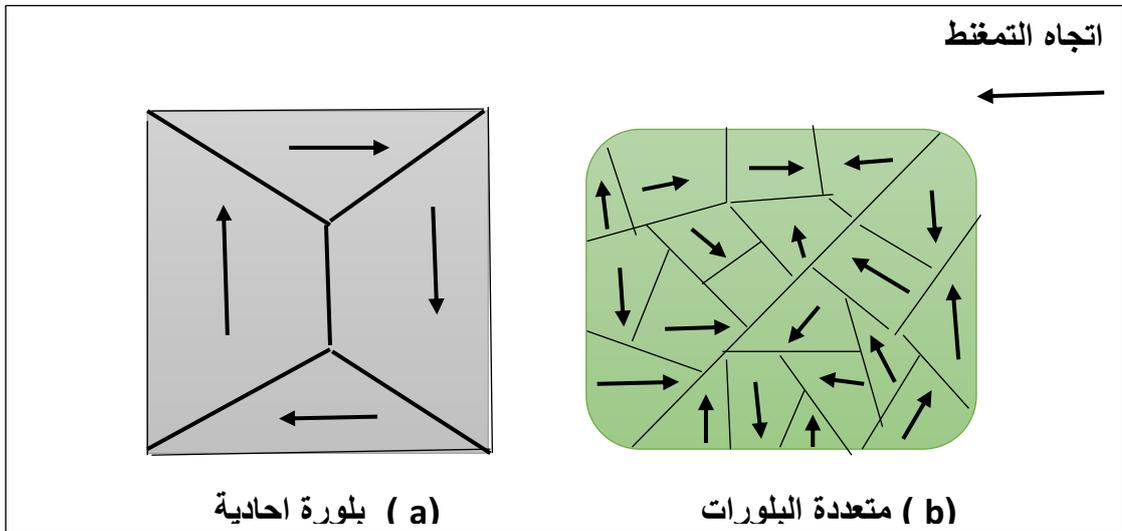


الشكل يوضح ايجاد التمعظ الذاتي  $M(T)$  بمساعدة دالة لانجفن ونقطة التقاطع تعطي التمعظ الذاتي  $M(T)$ .

كلما زادت درجة الحرارة فان المنحني الخطي الممثل بالمعادلة (20) يصبح اكثر انحدارا حين لا تتغير المعادلة (19) بتغير درجة الحرارة ، ولهذا فان نقطة التقاطع سوف تتحرك نحو يسار الشكل ونحصل على قيمة اصغر للتمعظ الذاتي الى ان تصل درجة الحرارة تكون فيها المعادلة (20) في تماس مع المعادلة (19) عند نقطة الاصل. عند هذه الدرجة والدرجات الحرارية الاعلى منها يكون التمعظ الذاتي مساويا للصفر ويطلق على هذه الدرجة بدرجة حرارة كيوري  $T_C$  وعند درجات حرارة اعلى منها يتلاشى التمعظ وتصبح المادة ذات سلوكية بارامغناطيسية اعتيادية .

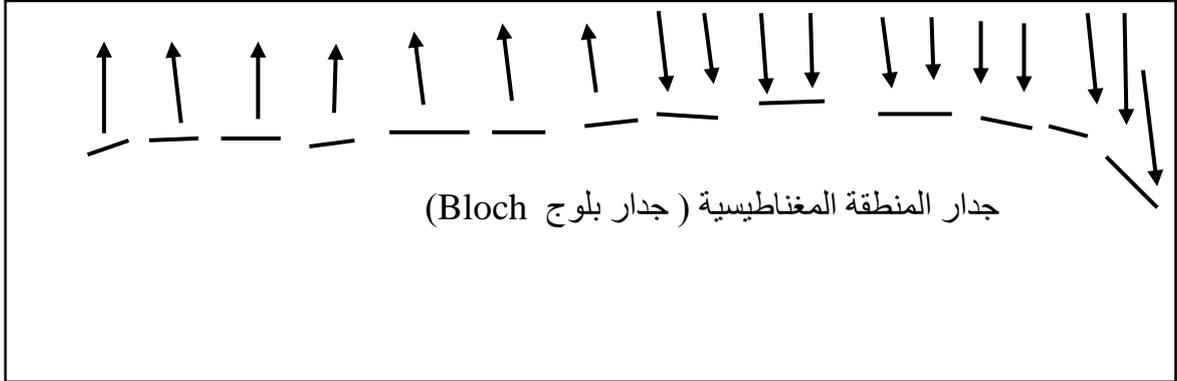
### ( 7 - 8 ) المناطق الفيرومغناطيسية : *Ferromagnetic Domains*

ينبغي على عينة فيرومغناطيسية ان تتمغظ بدرجة قريبة من حالة الاشباع عن درجات حرارة اوطأ من درجة حرارة كيوري (بغض النظر عن الماضي المغناطيسي للعينة ) وهذا مغاير للملاحظات التجريبية فمثلا يمكن ايجاد قطعة من الحديد في حالة ممغنطة او غير ممغنطة . والجواب لهذه الظاهرة التي تبدو متناقضة هو ان المواد الفيرومغناطيسية تتكون من مناطق مغناطيسية كل منطقة تكون ممغنطة بالكامل ومنسجمة مع النتائج السابقة ولكن يمكن للمناطق المغناطيسية المختلفة ان تكون باتجاهات عشوائية متباينة كما في الشكل ادناه وبهذا تظهر على هيئة غير ممغنطة ومن وجهة النظر العينية وان ويس Weiss اول من فرض وجود المناطق الفيرومغناطيسية.



يمثل الشكل تراكيب المواد الفيرومغناطيسية .

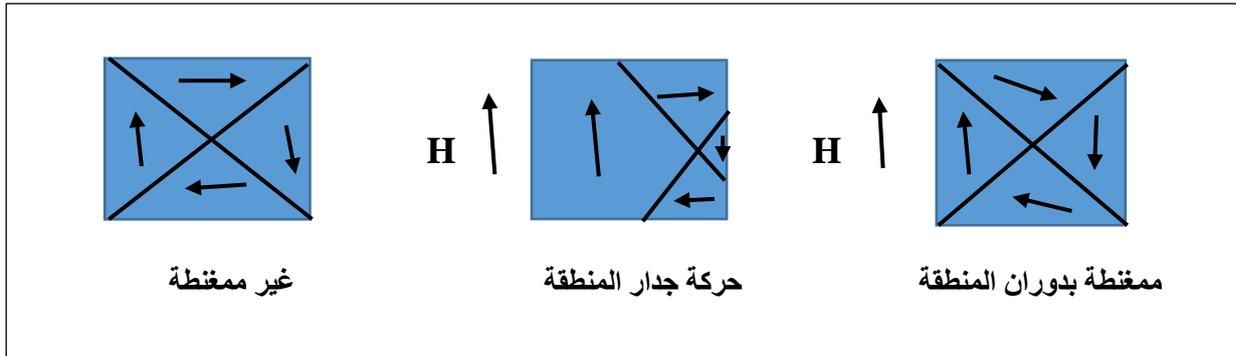
عند العبور من منطقة مغناطيسية الى اخرى مجاورة لها فان متجه العزم الذري  $m_0$  يدور تدريجيا من اتجاهه الاصلي الى الاتجاه الجديد على مدى 100 ذرة يطلق على هذه المنطقة الواقعة بي المنطقتين المغناطيسيتين اسم جدار المنطقة المغناطيسية والذي يظهر ان عزم البرم الذري في منطقة الجدار يقع تحت تأثير مجال جزيني اقل بقليل مما يتعرض عزم البرم الذري داخل اصل المنطقة المغناطيسية .



ومن جهة اخرى فان عينة متكونة من منطقة مغناطيسية واحدة تتطلب بقاء مجال مغناطيسي خارجي كبير على حين العينة المتكونة من مناطق مغناطيسية متعددة الطاقة المغناطيسية ماحبة لترتيب مجالها اقل مما عليه في حالة المنطقة المنفردة لذا فالتركيب المتكون من مناطق مغناطيسية متعددة يكون هو المفضل من وجهة نظر الطاقة.

من مظاهر التمغنت العينية في المواد الفيرومغناطيسية هي :-

- 1- تكون متعلقة بتغيرات هيئة المنطقة المغناطيسية .
- 2- الزيادة في التمغنت الناتجة عن تأثير المجال المغناطيسي المؤثر يحدث بعمليتين مستقلتين هما:  
اولا: بزيادة حجم المناطق المغناطيسية التي يكون اتجاهها متفقاً مع اتجاه المجال الخارجي على حساب المناطق المغناطيسية الاخرى التي لاتكون باتجاه المجال ( حركة جدار المنطقة المغناطيسية ).  
ثانيا : دوران تمغنت المنطقة المغناطيسية نحو اتجاه المجال .

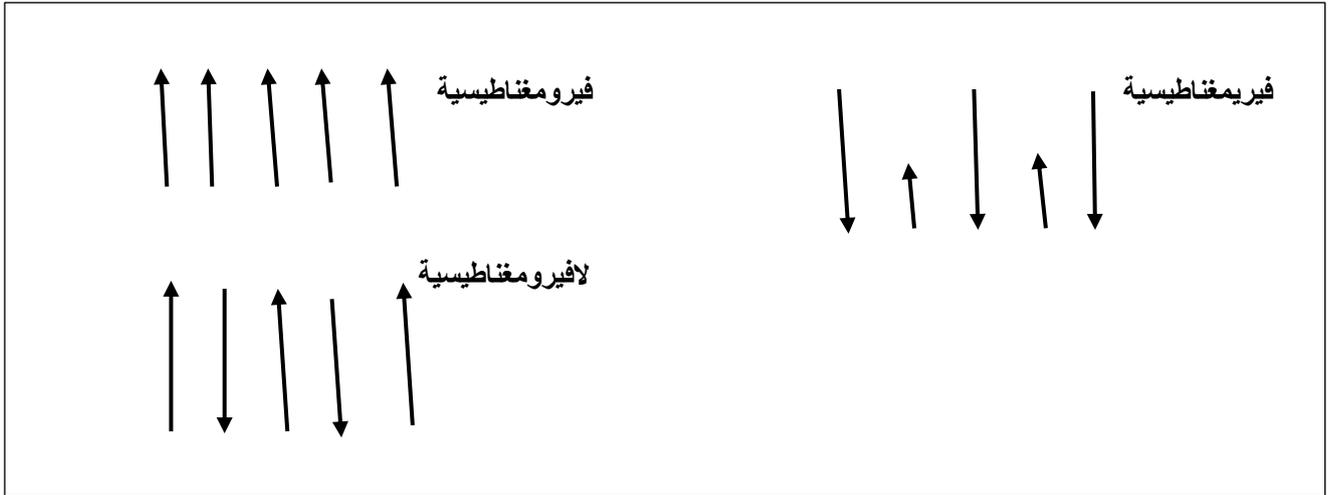


ف عند تسليط مجالات ضعيفة يتغير التمغنت اعتياديا بطريقة حركة جدار المنطقة المغناطيسية . في المواد النقية تكون حركة الجدار والى مدى واسع قابلة للعكس عند منطقة المجال الضعيف ، وفي المجالات الاقوى ينمو التمغنت بفضل حركة الجدار الغير قابلة للعكس ، وبسبب دوران المناطق المغناطيسية تبقى المادة ممغنة عند زوال المجال المغناطيسي الخارجة.

### ( 8 – 8 ) الفيراييت : Ferrites

وفقاً للنظرية الفيرومغناطيسية لهايزنبرك هناك تغير في الطاقة الكهروستاتيكية مرافقة للتغير الذي يحدث في البرم من وضع تراصف التوازي الى وضع التراصف المعاكس للتوازي للذرات المجاورة . فأذا كان هذا التغير في الطاقة لصالح تراصف التوازي وفي الوقت نفسه ذا مقدار محسوس فان المادة المكونة لهذه الذرات تكون فيرومغناطيسية . اما اذا كان التغير في الطاقة في صالح التراصف المعاكس للتوازي فانه لايزال بإمكاننا ايجاد تركيب برمي مرتب ولكن بصورة برم متناوب من ذرة الى اخرى خلال البلورة . يطلق على تركيب برمي مرتب وذو عزم مغناطيسي صافي يساوي صفر بلافيرومغناطيسي ( ضد الفيرومغناطيسية *antiferromagnetic* ) . والتركيب البرمي الذي يحتوي على كلا المركبتين ( برم اعلى ) و ( برم اسفل ) ولكن صافي العزم المغناطيسي لايساوي صفر يسمى فيرومغناطيسية او للسهولة فيرايت . ومن هذه المواد الفيرايتية هي الاكاسيد مثل  $MoFe_2O_4$  او معادن اكاسيد الحديد الاسود ، ولهذه المواد الفيرايتية اهمية كبيرة في مجال التطبيقات التكنولوجية بسبب كونها ضعيفة التوصيل للكهربائية اضافة الى كونها ذات ذات تمغنت اشباع كبير نسبياً لذا فيمكن استخدامها في تطبيقات التردد العالي حيث يكون لفقدان الطاقة الناتج عن التيارات الدوامة ( *eddy current* ) في المواد الموصلة مشاكل خطيرة .

وتقع المقاومة النوعية لمواد الفيرايت ضمن المدى  $10000\ ohm.m \rightarrow 1$  وللمقارنة فان المقاومة النوعية للحديد تساوي  $10^{-7}$  اوم متر تقريباً.



**(2-1) الشحنة الكهربائية : Electric charge**

الشحنة هي خاصية اساسية مميزة للجسيمات الاولية التي تتكون منها المادة والحقيقة ان جميع المواد تتكون من بروتونات والكترونات ونيوترونات واثنين من هذه الجسيمات تحملان شحنة هي ( البروتونات والالكترونات ) والمقصود بالشحنة من وجهة النظر العينية هو صافي الشحنة او الشحنة الفائضة فعندما نقول ان الجسم مشحون فان ذلك يعني ان الجسم يمتلك شحنة فائضة ناتجة اما عن فائض في عدد الالكترونات (سالب الشحنة) او فائض في عدد البروتونات (موجب الشحنة) والحقيقة ان الشحنة محفوظة لايمكن ان تفتنى او تخلق.

**(2-2) قانون كولوم : Coulomb Law**

أن حصيلة القياسات التجريبية على القوى العاملة بين الشحنات الكهربائية هي:

1- هناك نوعان فقط من الشحنات الكهربائية هي الشحنات الموجبة والشحنات السالبة.

2- تؤثر شحنتان نقطيتان احدهما على الاخرى بقوة :

أ- تعمل على امتداد الخط الواصل بين الشحنتين .

ب- يتناسب مقدار هذه القوة طرديا مع حاصل ضرب الشحنتين .

ج- يتناسب مقدارها عكسيا مع مربع المسافة بينهما .

3- القوة المؤثرة بين الشحنتين اما قوة تنافر اذا كانت الشحنتان متماثلتين او تجاذب اذا كانت الشحنتان مختلفتين.

يمثل النشان الاخيران (نقطة 2,3) نص قانون كولوم : (القوة الكهربائية بين شحنتين تتناسب طرديا مع حاصل ضرب الشحنتين وعكسيا مع مربع المسافة بينهما).

ويمكن صياغة قانون كولوم بصيغة المتجهات على النحو الاتي:

$$\vec{F}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \hat{r}_{12} \dots \dots \dots (1)$$

But  $\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^3} \vec{r}_{12}$$



وحداتها نيوتن N وان :

حيث ان :  $\vec{r}_{12}$  المتجه من  $q_1$  الى  $q_2$  . وكذلك

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{F}{m} \text{ or } \frac{C^2}{J} \text{ or } \frac{C^2}{N.m^2}, \text{ and } K = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{coul^2}$$

يستخدم قانون كولوم على الشحنات النقطية ، ويقصد بالشحنة النقطية حسب المفهوم العيني ، بأنها تلك الشحنة التي حيزا ابعاده صغيرة جدا مقارنة مع اي طول.

ويطبق قانون كولوم على الشحنات المستقرة النقطية في الفراغ وفي العوازل والموصلات ويصح تطبيق قانون كولوم على الجسيمات الاولية المشحونة (البروتونات والالكترونات).

$$\vec{F}_{21} = K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{21}|^3} \hat{r}_{21}, \quad |\vec{F}_{21}| = |\vec{F}_{12}| \quad \text{but} \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

(3-2) قاعدة التراكم للقوى :-

في حالة وجود اكثر من شحنتين نقطيتين ، فيمكن تعيين القوى المتبادلة بين هذه الشحنات بتكرار استخدام معادلة (1) . لو افترضنا وجود منظومة من من (N) من الشحنات النقطية ، فالقوى المؤثرة على الشحنة  $q_i$  هي:

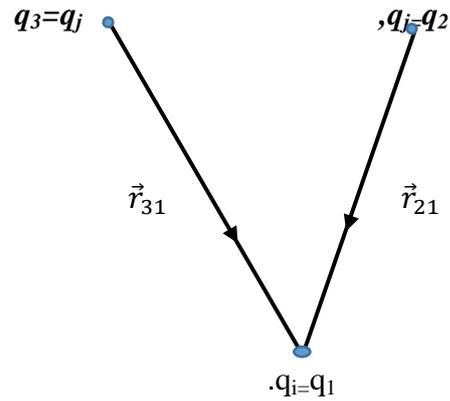
$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_i \sum_{j \neq i}^N q_j \frac{\vec{r}_{ji}}{|\vec{r}_{ji}|^3}$$

اذ تشير علامة الجمع (  $\sum$  ) الى حقيقة ان الجمع الاتجاهي يشمل جميع الشحنات عدا الشحنة (  $i$  ) وهذه هي قاعدة التراكم للقوى والتي تنص على ان :-

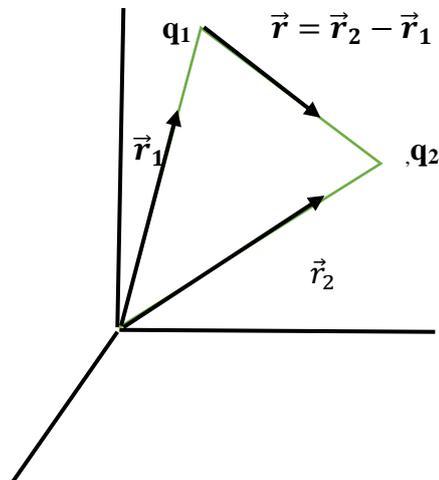
القوى الكلية المؤثرة على جسم تساوي المجموع الاتجاهي لجميع القوى المؤثرة على الجسم كلا على انفراد.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{21}|^2} \hat{r}_{21} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{|\vec{r}_{31}|^2} \hat{r}_{31} + \dots \quad \text{as } q_i = q_1, \text{ and } q_j = q_2, q_3, \dots \dots$$

حيث  $q_1$  تكون مرجع وليس نقطة اصل .  $\vec{F} = K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{21}|^2} \hat{r}_{21} + K \frac{q_1 q_3}{|\vec{r}_{31}|^2} \hat{r}_{31}$  كما في الرسم التوضيحي التالي:-



اذا عبرنا عن مواقع الشحنات بوجود نقطة الاصل :  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  .



$$\vec{F} = K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{[\hat{i}(x_2 - x_1) + \hat{j}(y_2 - y_1) + \hat{k}(z_2 - z_1)]}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}}$$

## ( 2 - 4 ) كثافة الشحنة : Charge density

يمكن توسيع فكرة لتأثير المتبادل بين  $N$  من الشحنات النقطية وجعلها تشمل التأثير المتبادل بين شحنة نقطية وتوزيع متصل (ممتد) من الشحنة .

**معنى التوزيع المتصل للشحنة:** ان الشحنة الكهربائية تتكون من مضاعفات لشحنة اساسية هي شحنة الالكترن (  $1.6 \times 10^{-19} \text{ coul}$  ) وهو مقدار ضئيل جدا ، وهذا يعني ان قيمة اي شحنة كهربائية يجب ان تكون مساوية لشحنة الالكترن مضروبة في عدد صحيح . وهذا بدوره يعني ان اي عنصر صغير من الحجم مأخوذ من توزيع شحني يحتوي على عدد كبير جدا من الالكترونات وعندئذ يصبح بالامكان ان نصف اي توزيع شحني **بدلالة دالة كثافة الشحنة والتي تمثل :- غاية الشحنة لوحدة الحجم عندما يصبح حجم الشحنة متناهي الصغر ويمكن وصف التوزيع الشحني بدلالة الدوال النقطية الاتية:**

1- دالة كثافة الشحنة الحجمية  $\rho$  :- وتعرف كثافة الشحنة الحجمية بموجب العلاقة

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad \text{and } dq = \rho dV, \therefore q = \int \rho dV$$

2- كثافة الشحنة السطحية  $\sigma$  :- وتعرف الكثافة السطحية للشحنة بموجب العلاقة

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \quad \text{and } dq = \sigma dS \therefore q = \int \sigma dS$$

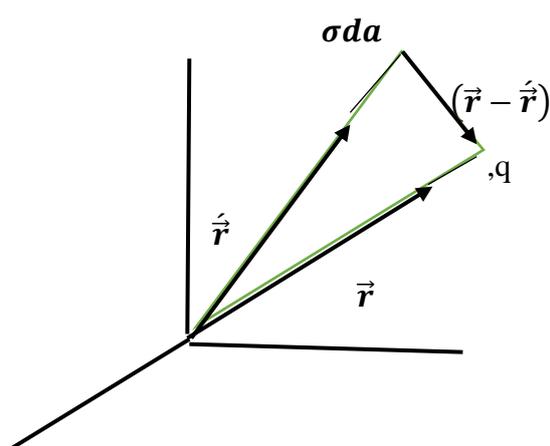
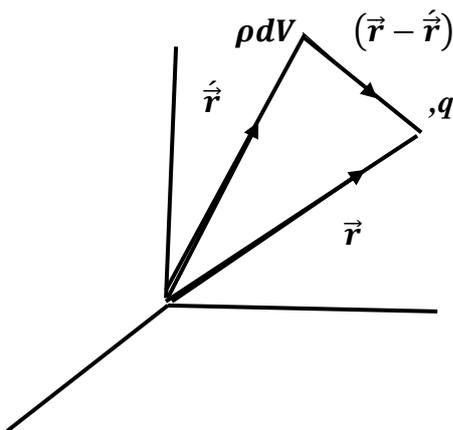
3- كثافة الشحنة الطولية  $\lambda$  :- وتعرف كثافة الشحنة الطولية بموجب العلاقة

$$\lambda = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta \ell} = \frac{dq}{d\ell} \quad \text{and } dq = \lambda d\ell, \quad q = \int \lambda d\ell$$

ان  $\rho, \sigma, \lambda$  تمثل كثافة الشحنة الفائضة او كثافة صافي الشحنة .

اذا توزعت الشحنة بحيث شغلت حجما قدره  $V$  بكثافة حجمية  $\rho$  واصبحت كثافتها السطحية  $\sigma$  على السطح  $S$  المحيط بالحجم  $V$  لا يمكن ايجاد قوة كولوم التي يؤثر بها هذا التوزيع الشحني على شحنة نقطية  $q$  محدد موضعها بالمتجه  $\vec{r}$  وفق العلاقة التالية:-

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \hat{r}')}{|\vec{r} - \hat{r}'|^3} \rho dV + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \hat{r}')}{|\vec{r} - \hat{r}'|^3} \sigma da$$



**Electric Field : المجال الكهربائي (5-2)**

يعرف المجال الكهربائي عند نقطة ما بأنه القوة المؤثرة على شحنة اختبارية موضوعة عند تلك النقطة الى قيمة الشحنة الاختبارية ويعطى بالعلاقة التالية :-

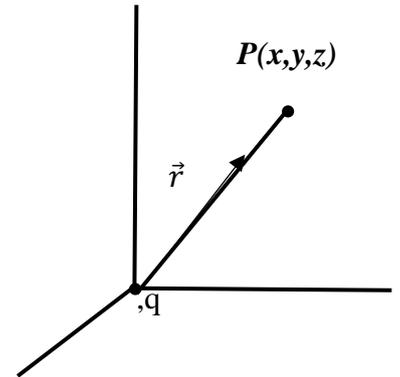
$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} = \frac{\vec{F}}{q} \frac{volt}{m} \text{ or } \frac{N}{coul} , \text{ as } \frac{N}{coul} = \frac{J/m}{coul} \text{ but } \frac{J}{coul} = \text{volt} \Rightarrow \frac{volt}{m} = \frac{N}{coul}$$

ان الهدف من ادخال الغاية في تعريف المجال هو لجعل الشحنة الاختبارية غير مؤثرة على التوزيع الشحني المولد للمجال . ( الشحنة الاختبارية تؤخذ عادة بقيمة واحد كولوم )

$$\vec{F} = K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}|^2} \hat{r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}_{12}}{q_2} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

اذا كانت الشحنة المسببة للمجال الكهربائي (  $q$  ) واقعة في نقطة الاصل والشحنة الاختبارية واقعة عند النقطة (  $P$  ) على مسافة  $r$  من الشحنة  $q$  فعندئذ يعطى المجال الكهربائي بالعلاقة التالية:

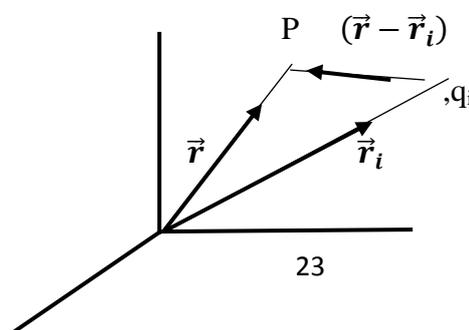
$$\vec{E} = K \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad \text{or} \quad \vec{E} = K \frac{q}{r^3} \vec{r}$$



اما اذا كانت لدينا مجموعة من الشحنات النقطية مسببة للمجال الكهربائي (  $q_i$  ) حيث (  $i = 1, 2, 3, \dots$  ) ولاتفق في نقطة الاصل ولكن تبعد تبعد بمسافة  $r_i$  عن نقطة الاصل اما الشحنة الاختبارية عند النقطة P على مسافة r من نقطة الاصل فعندئذ يعطى المجال الكهربائي بالعلاقة التالية :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} , \quad \text{as } \vec{r}_i + (\vec{r} - \vec{r}_i) = \vec{r}$$

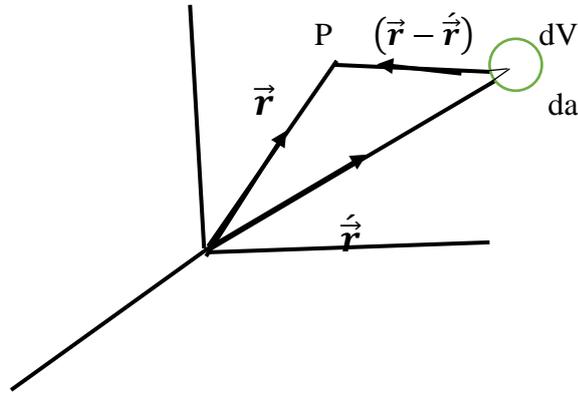
ويكون المجال بنفس اتجاه القوة .



لنأخذ توزيع شحني مكون من N من الشحنات النقطية  $q_1, q_2, \dots, q_N$  ونفرض انها موضوعة على النقاط  $r_1, r_2, \dots, r_N$  على الترتيب ومن توزيع حجمي لشحنة تشغل حجما قدره V بكثافة حجمية  $\rho(\vec{r})$  ، ومن توزيع سطحي لشحنة موزعة على سطح S مميز بكثافة سطحية  $\sigma(\vec{r})$  فاذا وضعت شحنة اختبارية (q) عند النقطة P التي تبعد مسافة r عن نقطة الاصل اي ان لدينا توزيع حجمي وسطحي فالمجال الكهربائي في هذه الحالة يعطى بالعلاقة الاتية بحيث يغطي التوزيع الشحني بأكمله :-

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma dS, \quad \text{as } \vec{r}' + (\vec{r} - \vec{r}') = \vec{r}$$

↑ نقطي
↑ حجمي
↑ سطحي



**لأثبت ان المجال الكهربائي محافظ ( Conserved ) نتبع مايلي :-**

اذا ازاحت شحنة مقدارها q في مجال كهربائي E بحيث لا يؤثر وجودها على شكل المجال او مقداره ، ازاحة تفاضلية ( dℓ ) من نقطة a الى نقطة b وبدون تغيير في طاقتها الميكانيكية فان الشغل المنجز عليها يكون :

$$W = - \oint_a^b \vec{E} \cdot Q \cdot d\ell \quad (\text{الشغل} = F = \text{القوة} \times \text{الازاحة} = QE)$$

والاشارة السالبة تعني ان الشغل قد انجز ضد المجال الكهربائي  $\vec{E}$  وكانت الشحنة على مسار مغلق ولسهولة الحل نتصور ان الجسم هو شحنة نقطية مقدارها Q فالشغل المنجز عندئذ هو:-

$$W = - \oint \vec{E} \cdot Q \cdot d\ell = - \frac{Q\dot{Q}}{4\pi\epsilon_0} \oint_a^b \frac{\vec{r} \cdot d\ell}{r^3}$$

الحد داخل التكامل يمثل  $\frac{d\ell}{r^2} = \frac{-dr}{dr}$  وعليه:

$$W = - \frac{Q\dot{Q}}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{-dr}{r} = - \frac{Q\dot{Q}}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = - \frac{Q\dot{Q}}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_a^b$$

ان مجموع الزيادات في  $1/r$  في مسار مغلق يساوي صفر لان قمة r ثابتة هي نفسها عند بداية ونهاية المسار وعليه فالتكامل الخطي يساوي صفر وعليه فالشغل المنجز لتحريك شحنة نقطية حول اي مسار مغلق في مجال شحنة نقطية اخرى يساوي صفر اي ان :-

$$\oint \vec{E} \cdot d\ell = 0$$

ومن نظرية ستوكس وعند كل نقاط الفراغ :

$$\oint \vec{E} \cdot d\ell = \oint \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

**( 6 - 2 ) الجهد الكهروستاتيكي :- The Electrostatic Potential**

إذا تلاشى التفاف كمية متجهة لأمكن التعبير عن هذه الكمية المتجهة بمثابة انحدار لكمية لامتجهة وهذا الكلام ينطبق على المجال الكهربائي المعطى بالمعادلة (2) ولتحقيق ذلك تأخذ التفاف المجال الكهربائي .

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}|^3} \rho dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}|^3} \sigma dS$$

from the hypothesis  $\vec{\nabla} \times \phi F = \phi \vec{\nabla} \times F + \vec{\nabla} \phi \times F$

$$\text{let } \phi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}|^3}, \text{ and } \vec{r} - \vec{r}_i = F$$

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}|^3} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}|^3} \vec{\nabla} \times (\vec{r} - \vec{r}) + \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}|^3} \times (\vec{r} - \vec{r}) \dots \dots \dots (1)$$

$$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{r} = 0 \implies \vec{\nabla} \times (\vec{r} - \vec{r}) = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{we proved that } \nabla \frac{1}{|r|^3} = -3 \frac{\hat{r}}{|r|^4} = -3 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^5}$$

$$\therefore \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}|^3} = -3 \frac{\vec{r} - \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}|^5} \dots \dots \dots (3)$$

نعوض معادلة (2) و (3) في معادلة (1)

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}|^3} = 0 - \frac{3(\vec{r} - \vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}|^5} \times (\vec{r} - \vec{r}), \quad \text{but } (\vec{r} - \vec{r}) \times (\vec{r} - \vec{r}) = 0, \text{ متوازيان}$$

$$\therefore \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \dots \dots \dots (4)$$

القوة محفوظة

تشير معادلة 4 الى وجود دالة لامتجهة ذات انحدار مسار للمجال الكهربائي وهذه الدالة هي الجهد الكهروستاتيكي  $u$ .  
وعليه اذا كان التفاف كمية متجهة يساوي صفر فنعتبر عن هذه الكمية المتجهة بدلالة انحدار كمية لامتجهة اي ان :

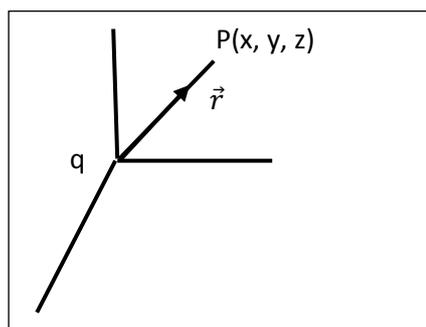
$$\vec{E} = - \nabla u \dots \dots \dots (5)$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \text{ also } \nabla \frac{1}{|\vec{r}|} = - \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\nabla \frac{1}{|\vec{r}|} \right) = -\nabla \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|} = -\nabla u$$

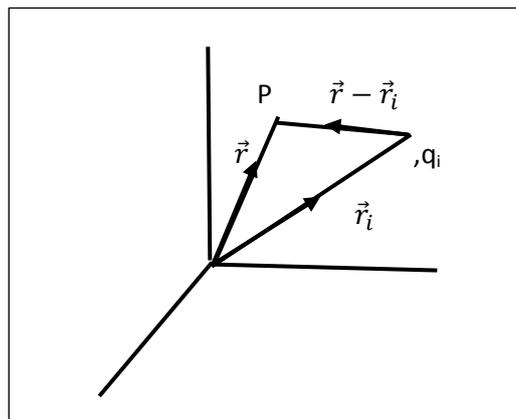
$$u = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}|} \dots \dots \dots (6)$$

حيث الشحنة  $q$  هي المسببة للجهد الكهروستاتيكي ونفرضانها تقع في نقطة الاصل والشحنة الاختبارية عند الموقع  $P$  على بعد  $r$  من نقطة الاصل .



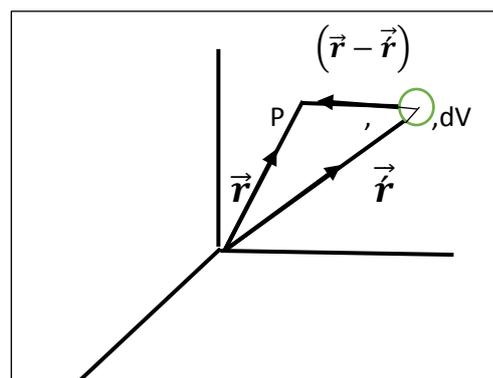
ويعطى الجهد الكهروستاتيكي الناشء عن مجموعة من الشحنات النقطية ( $q_i$ ) والتي لا تقع في نقطة الاصل بل على بعد  $r_i$  من نقطة الاصل والشحنة الاختبارية في الموقع  $P$  على بعد  $r$  من نقطة الاصل بالعلاقة :-

$$u(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \dots \dots \dots (7)$$



وإذا كان لدينا توزيع شحني بشكل ( نقطي و حتمي و سطحي ) والشحنة الاختبارية في الموقع P على بعد r من نقطة الاصل فالجهد الكهروستاتيكي عندئذ يعطى بالعلاقة ادناه:-

$$u(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r)dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(r)da}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



كما يمكننا الحصول على الجهد الكهروستاتيكي بصورة مباشرة وذلك بوجود المجال الكهربائي كما في المعادلة التالية

$$E(r) = -\nabla u$$

$$\int_{ref}^r E(r) \cdot dr = - \int_{ref}^r \nabla u \cdot dr \quad \text{وبأخذ التكامل للطرفين :}$$

حيث نقطة المرجع واختبرت عند نقطة يكون عندها الجهد يساوي صفر ومن تعريف الانحدار نجد ان :-

$$\nabla u(r) = \frac{du(r)}{dr} \Rightarrow \nabla u(r) \cdot dr = du(r) \quad \text{but} \int_r du(r) = u(r)$$

$$\int_{ref}^r E(r) \cdot dr = - \int_{ref}^r du(r) = -u(r)$$

$$u(r) = - \int E(r) dr \dots \dots \dots (8)$$

**Potential Energy :- الطاقة الكامنة ( 7 – 2 )**

ان هناك علاقة بين الجهد الكهروستاتيكي والطاقة الكامنة المصاحبة للقوة المحافضة الكهروستاتيكية وبصورة عامة يمكن التعبير عن الطاقة الكامنة المصاحبة لقوة محافظة بالشغل المبذول لتحريك الشحنة ( q ) من موقع الى اخر داخل المجال E والذي يعطى بالعلاقة :-

$$w(r) = - \int_{ref}^r F(r). dr$$

حيث w(r) تمثل الطاقة الكامنة عند الموقع r نسبة الى نقطة المرجع ( ref ) تكون عندها الطاقة الكامنة (اي الشغل والجهد ) تساوي صفر وظهرت الاشارة السالبة لأن الشغل غير ناتج عن قوة المجال وانما من قوة مقاومة او الجهة المعاكسة للقوة.

$$F = qE, \quad w = - \int_{ref}^r F. dr, \quad \therefore w = -q \int_{ref}^r E. dr, \quad \text{but } E = -\nabla u$$

$$\therefore w = q \int_{ref}^r \nabla u. dr, \quad \text{but } \nabla u = \frac{du}{dr}, \Rightarrow \nabla u. dr = du$$

$$\therefore w = q \int_{ref}^r du = qu(r)]_{ref}^r$$

$$w = q(u(r) - u(ref)) = qu$$

$$u = \frac{w}{q} \frac{\text{Joul}}{\text{coul}} = \text{volt}$$

اي ان فرق الجهد يمثل مقدار الشغل المنجز لوحدته الشحنة

**Gauss Law :- قانون كاوس ( 8 – 2 )**

اوجد كاوس العلاقة بين تكامل المركبة العمودية للمجال الكهربائي على سطح مغلق والشحنة الكلية التي يضمها السطح. بما ان المجال الكهربائي الناشئ عن شحنة نقطية ( q ) واقعة في نقطة الاصل عند نقطة محددة بالمتجه  $\vec{r}$  يساوي :

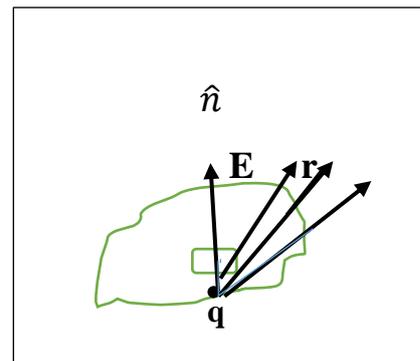
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

بأخذ التكامل السطحي للمركبة العمودية لهذا المجال على سطح مغلق والذي يحيط

بالشحنة ( q ) سنحصل على:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}}{|\vec{r}|^3} da$$

$$\text{but } \oint_S \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}}{|\vec{r}|^3} da = 4\pi$$



$$\therefore \oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

الصيغة التكاملية لقانون كاوس

تشير المعادلة اعلاه الى ان التكامل السطحي للمركبة العمودية للمجال الكهربائي على اي سطح مغلق ( الفيض ) يساوي المجموع الكلي للشحنات الموجودة ضمن السطح المغلق مقسوما على سماحيته.

اما اذا كان لدينا شحنتين يصبح القانون :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_1}{\epsilon_0} + \frac{q_2}{\epsilon_0} = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}$$

وبصورة عامة يعطى القانون بالصيغة :-

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$$

ولأيجاد الصيغة التفاضلية لقانون كاوس نستخدم نظرية التباعد .

$$\oint \vec{F} \cdot \hat{n} da = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$$

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \quad \text{but} \quad \oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\text{but } dq = \rho dV \Rightarrow q = \int \rho dV$$

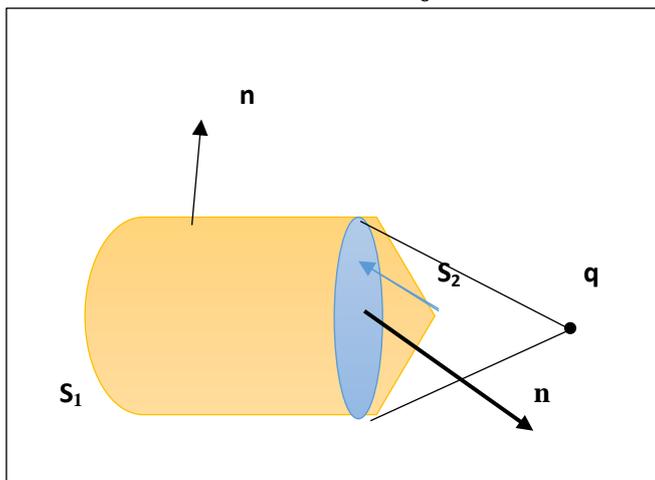
$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

الصيغة التفاضلية لقانون كاوس

اذا وقعت الشحنة خارج السطح ، يمكن تقسيم السطح الى قسمين مساحتهما  $S_1$  و  $S_2$  وهما في مواجهة الزاوية المجسمة نفسها المتكونة عند الشحنة ( q ) وتكون مساهمة كل من السطحين للتكامل السطحي متساوية بالمقدار ومتعاكسة في الاشارة مما يؤدي الى تلاشي التكامل الكلي للسطح المغلق اي يصبح التكامل السطحي لشحنة واقعة

خارج السطح المغلق يساوي صفر وبذلك يمكننا ان نستنتج أنه اذا احاط السطح المغلق بالشحنة النقطية لأصبح التكامل السطحي للمركبة العمودية للمجال العمودية الكهربائي مساويا الى  $\frac{q}{\epsilon_0}$  اما اذا وقعت الشحنة خارج السطح المغلق اصبح التكامل السطحي مساويا للصفر.

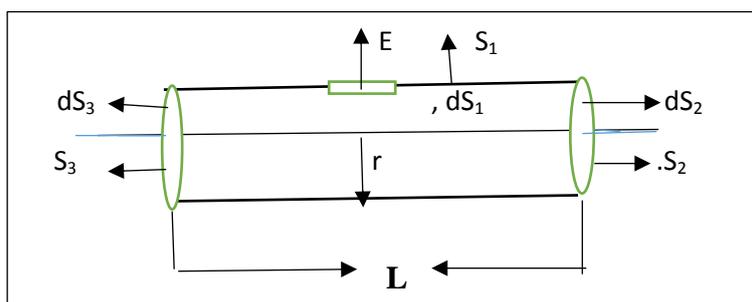


### ( 2 - 9 ) تطبيقات قانون كاوس : Application of Gauss's law

لقانون كاوس فوائد عملية تتجلى في توفير اسلوب سهل لحساب المجالات الكهربائية في الحالات التي يكون فيها المجال بقدر كاف من التماثل ، وعليه يجب اختيار سطح مغلق (سطح كاوس ) بحيث يكون للمجال مركبة عمودية عليه ذات قيمة ثابتة لجميع نقاط السطح او ان تكون قيمة المركبة صفرا ، وعلى سبيل المثال :

**لأيجاد المجال الكهربائي الناشئ عن شحنة خطية طويلة جدا ذات كثافة شحنية قدرها  $\lambda$  لوحدة الطول .**

لحل هذا المثال نجد ان طبيعة التماثل في هذه الحالة تشير الى ان المجال الكهربائي المتولد يكون شعاعيا وغير معتمد على الموقع سواء من ناحية البعد على امتداد خط الشحنة او من ناحية الموضع الزاوي حول الشحنة الخطية كما في الشكل :



وهذا يعني ان التوزيع المنتظم للشحنة على طول الخط المستقيم اللانهائي يشير الى ان المجال الناشئ عن الخط يكون باتجاه شعاعي منبعث من الخط وان مقدار شدة المجال مساوي لجميع النقاط التي تبعد مسافة قدرها (r) وعليه نجد ان افضل سطح كاوس ملائم لهذا التناسق الشعاعي للمجال المحيط بالخط المشحون هو سطح اسطواني دائري مغلق نصف قطره (r) وطوله (L) ومحوره منطبق على الخط المشحون كما في الشكل اعلاه.

$$\oint E \cdot n \, da = \oint E \cdot dS = \oint E \cos\theta \, dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint E \cos \theta dS = \oint_{S_1} E \cos \theta dS + \oint_{S_2} E \cos \theta dS + \oint_{S_3} E \cos \theta dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint E \cos \theta dS = \oint_{S_1} E \cos(0) dS + \oint_{S_2} E \cos(90) dS + \oint_{S_3} E \cos(90) dS = ES_1 = E(2\pi rL) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\text{but } q = \int \lambda d\ell = \lambda \int d\ell = \lambda L$$

$$E(2\pi rL) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{مقداراً})$$

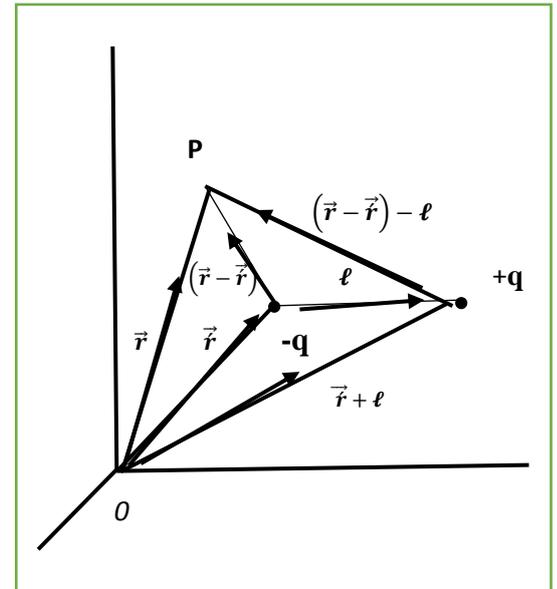
$$\vec{E} = \frac{\lambda \vec{r}}{2\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{اتجاهها}$$

### ( 10-2 ) ثنائي القطب الكهربائي : The electric dipole

يتكون ثنائي القطب الكهربائي من شحنتين متساويتين بالمقدار ومتعاكستين في الإشارة تفصل بينهما مسافة صغيرة ( $\ell$ ) ، نفرض ان شحنة قدرها ( $-q$ ) تبعد مسافة ( $\vec{r}$ ) عن نقطة الاصل وان شحنة قدرها ( $+q$ ) تبعد مسافة ( $\vec{r} + \ell$ ) عن نقطة الاصل وكما هو موضح بالشكل ، عندئذ يمكن ايجاد المجال الكهربائي الناتج عن ثنائي القطب عند النقطة  $P$  التي تبعد مسافة ( $\vec{r}$ ) عن نقطة الاصل :

$$\vec{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(\vec{r}-\vec{r})-\vec{\ell}}{|(\vec{r}-\vec{r})-\vec{\ell}|^3} - \frac{\vec{r}-\vec{r}}{|\vec{r}-\vec{r}|^3} \right]$$

والاشارة السالبة ظهرت لان الشحنة الثانية هي سالبة الشحنة ( $-q$ ) .



نأخذ الحد الاول من القوس من المعادلة اعلاه :-

$$\frac{1}{|(\vec{r}-\vec{r})-\vec{\ell}|^3} = |(\vec{r}-\vec{r})-\vec{\ell}|^{-3} = \left[ |(\vec{r}-\vec{r})-\vec{\ell}|^2 \right]^{-3/2} = \left[ |\vec{r}-\vec{r}|^2 - 2\ell(\vec{r}-\vec{r}) + \ell^2 \right]^{-3/2}$$

نضرب ونقسم بالمقدار  $|\vec{r} - \vec{r}'|^2$  :

$$\frac{1}{|(\vec{r} - \vec{r}') - \vec{\ell}|^3} = |\vec{r} - \vec{r}'|^{-3} \left[ 1 - \frac{2(\vec{r} - \vec{r}')\vec{\ell}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \frac{\ell^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right]^{-3/2} \text{ but } \ell \lll (\vec{r} - \vec{r}')$$

لذلك الحد الاخير يهمل وبأستخدام مفكوك نظرية ذي الحدين :-

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^{n-1}}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-2}}{3!} + \dots$$

نفرض  $x = \frac{-2(\vec{r} - \vec{r}')\vec{\ell}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$  و  $n = -3/2$  ونستخدم مفكوك نظرية ذي الحدين :

$$|(\vec{r} - \vec{r}') - \vec{\ell}|^{-3} = |\vec{r} - \vec{r}'|^{-3} \left[ 1 - \frac{3 \left( -2\ell (\vec{r} - \vec{r}') \right)}{2 |\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \frac{3}{2} * \frac{-5}{2} * \frac{1}{2} \left( \frac{-2\ell (\vec{r} - \vec{r}')^{-5/2}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \right]$$

وبما ان  $\ell$  في البسط في الحد الثاني داخل القوس في الطرف الايمن صغيرة جدا اقل بكثير من  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  لذا يهمل هذا الحد. فتصبح المعادلة :

$$|(\vec{r} - \vec{r}') - \vec{\ell}|^{-3} = |\vec{r} - \vec{r}'|^{-3} \left[ 1 + \frac{3\ell \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right]$$

نعوض هذه القيمة في معادلة المجال ( E ) :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ (q(\vec{r} - \vec{r}') - q\ell) \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{3\ell(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} \right) - \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{q(\vec{r} - \vec{r}') \times 3\ell(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} - \frac{q\ell}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \frac{q\ell \cdot 3\ell(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} - \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \end{aligned}$$

الحد الاول يختصر مع الحد الاخير ويهمل الحد الرابع لكونه صغير جدا لاحتوائه على  $\ell^2$  في البسط فتصبح النتيجة :-

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3q\ell \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} (\vec{r} - \vec{r}') - \frac{q\ell}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]$$

بما ان عزم ثنائي القطب dipole moment هو  $P = q\ell$

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3\vec{P} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} (\vec{r} - \vec{r}') - \frac{\vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]$$

تحفظ هذه المعادلة

ولو كان ثنائي القطب موضوع في نقطة الاصل اي ان  $\vec{r}' = 0$  فتصبح المعادلة بالشكل :-

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3\vec{P} \cdot (\vec{r})}{|\vec{r}|^5} (\vec{r}) - \frac{\vec{P}}{|\vec{r}|^3} \right]$$

ويمكن حساب الجهد الناشئ عن ثنائي القطب مباشرة من المعادلة :

$$u(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}' - \ell|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}' - \ell|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

بتبسيط المقام في الحد الاول بنفس الطريقة السابقة :-

$$|\vec{r} - \vec{r}' - \ell|^{-1} = \left[ |\vec{r} - \vec{r}' - \ell|^2 \right]^{-1/2} = \left[ |\vec{r} - \vec{r}'|^2 - 2(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \ell + \ell^2 \right]^{-1/2}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}' - \ell|^{-1} = |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} \left[ 1 - \frac{2(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \ell}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \frac{\ell^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right]^{-1/2}$$

الحد الاخير يهمل لان  $\ell \ll \ll (\vec{r} - \vec{r}')$  وباستخدام مفكوك ذي الحدين وتعويض النتائج في معادلة الجهد نحصل على :-

$$u(r) = \frac{q(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \ell}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad \text{but } \vec{P} = q\ell$$

$$u(r) = \frac{P \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

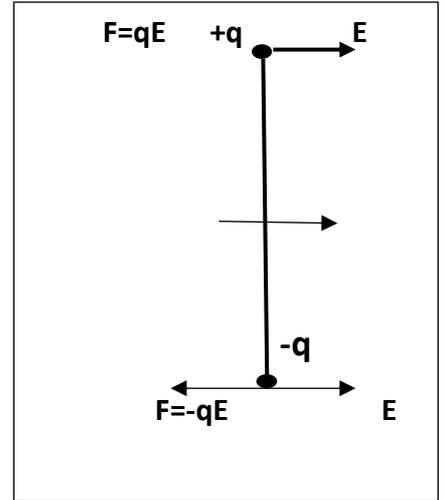
تحفظ هذه المعادلة

فاذا كانت  $\vec{r}' = 0$

$$u(r) = \frac{q \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^3}$$

( 2 - 11 ) ثنائي القطب الكهربائي في مجال كهربائي غير منتظم : -

عندما يكون المجال منتظم تكون محصلة القوى مساوية للصفر اي ان  $\vec{F} = 0$  كما في الشكل ادناه :

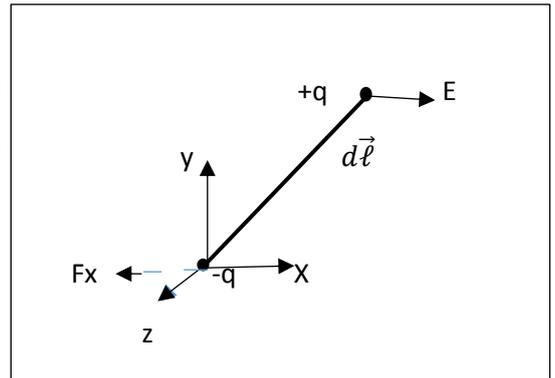


اما عند وضع ثنائي القطب في مجال غير منتظم فيمكن ايجاد القوة المؤثرة حيث نفرض ان نقطة الاصل لنظام الاحداثيات تنطبق على الشحنة السالبة (-q) لثنائي القطب .

$$F = F_{q^+} + F_{q^-} = qE$$

نحسب اولا القوة باتجاه المركبة x . فالقوة المؤثرة على الثنائي القطب الكهربائي في الاتجاه السيني الموجب هي:-

$$\vec{F}_x^+ = q^+(E_x + dE_x)$$



وفي الاتجاه السالب تكون القوة مساوية الى  $-qE_x$

لان الشحنة السالبة (- q) تقع في نقطة الاصل توجد مركبة واحدة حيث البعد من نقطة الاصل  $r=0$  وعليه تصبح

$$\vec{F}_x = +qdE_x \quad \text{محصلة القوة في اتجاه x تعطى بالعلاقة :}$$

$$\therefore d\vec{E}_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx + \frac{\partial E_x}{\partial y} dy + \frac{\partial E_x}{\partial z} dz$$

$$\therefore \vec{F}_x = q \left( dx \frac{\partial E_x}{\partial x} + dy \frac{\partial E_x}{\partial y} + dz \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = q \left( dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right) E_x$$

$$\text{but } \vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \text{and } d\vec{\ell} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$$

$$\vec{F}_x = q(d\vec{\ell} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_x \quad \text{but } \vec{P} = qd\vec{\ell}$$

$$\therefore \vec{F}_x = (\vec{P} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_x$$

وبنفس الطريقة نوجد القوة باتجاه المركبات الاخرى y,z و عليه بصورة عامة فإن القوة المؤثرة على ثنائي القطب الكهربائي تعطى بالعلاقة الاتية :-

$$\therefore \vec{F} = (\vec{P} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

يعطى عزم الازدواج Torque بالعلاقة الاتية :-

$$\vec{\tau} = d\ell \times \vec{F} = d\ell \times q\vec{E} = qd\vec{\ell} \times \vec{E} = \vec{P} \times \vec{E}$$

$$\vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{E} = PE \cos \theta$$

$$\text{if } \vec{P} \parallel \vec{E} \implies \vec{\tau} = 0$$

و عليه نستنتج انه لثنائي القطب اذا كان المجال منتظم فإن محصلة القوة المؤثرة عليه تساوي صفر و عليه يصبح  $\vec{\tau} = 0$  وذلك لأن  $\vec{\tau} = d\ell \times \vec{F}$ .

### اسئلة الفصل الثاني

س1/ كرة نصف قطرها R ملئت بالشحنة باسلوب ما ، فاذا كان المجال لهذه المنطقة  $\vec{E} = \frac{E_0}{R} |\vec{r}| \vec{r}$  حيث  $E_0$  ثابت و R متجه من مركز هذه الكرة اوجد تعبيراً للكثافة الحجمية ؟

الجواب / باستخدام الصيغة التفاضلية لقانون كاوس :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

بتعويض معادلة المجال المعطاة بالسؤال نحصل على:

$$\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left[ \frac{E_0}{R} |\vec{r}| \vec{r} \right] = \frac{\epsilon_0}{R} E_0 \vec{\nabla} \cdot |\vec{r}| \vec{r}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \phi \vec{A} = \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla \phi, \quad \text{let } \phi = |\vec{r}|, \text{ and } \vec{A} = \vec{r} \quad \text{بأستخدام المتطابقة :-}$$

$$\vec{\nabla} \cdot |\vec{r}| \vec{r} = |\vec{r}| \vec{\nabla} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{\nabla} |\vec{r}|, \quad \text{but } \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3, \quad \text{and } \vec{\nabla} |\vec{r}| = \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\therefore \vec{\nabla} \cdot |\vec{r}| \vec{r} = 3|\vec{r}| + \vec{r} \cdot \hat{r} = 3|\vec{r}| + \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = 3|\vec{r}| + \frac{|\vec{r}|^2}{|\vec{r}|} = 4|\vec{r}|$$

$$\therefore \rho = \frac{4\epsilon_0 E_0}{R} |\vec{r}|$$

س2/ اذا كان الجهد لتوزيع كروي للشحنة معطى بالعلاقة  $u(r) = K \frac{e^{-\alpha r}}{r}$  حيث  $\alpha, K$  ثوابت جد المجال الكهربائي .

الجواب / من العلاقة:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}u(r) = -\frac{du(r)}{dr} = -K \frac{d}{dr} \left( \frac{e^{-\alpha r}}{r} \right) = -K \left( \frac{r e^{-\alpha r} (-\alpha) - e^{-\alpha r}}{r^2} \right) \\ &= K \left( \frac{\alpha e^{-\alpha r}}{r} + \frac{e^{-\alpha r}}{r^2} \right) = K e^{-\alpha r} \left( \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{r^2} \right) = K e^{-\alpha r} \left( \frac{r\alpha + 1}{r^2} \right) \\ \therefore \vec{E} &= K e^{-\alpha r} \left( \frac{1 + \alpha r}{r^2} \right) \end{aligned}$$

س3/ تتوزع الشحنة على كرة (نصف قطرها  $R$ ) بكثافة شحنة حجمية متجانسة ، جد المجال والجهد الكهربائي للحالات الاتية: 1- نقطة خارج الكرة على بعد  $r$  من المركز  $r > R$  2- نقطة داخل الكرة حيث  $r < R$

الجواب/

1-)  $r > R$

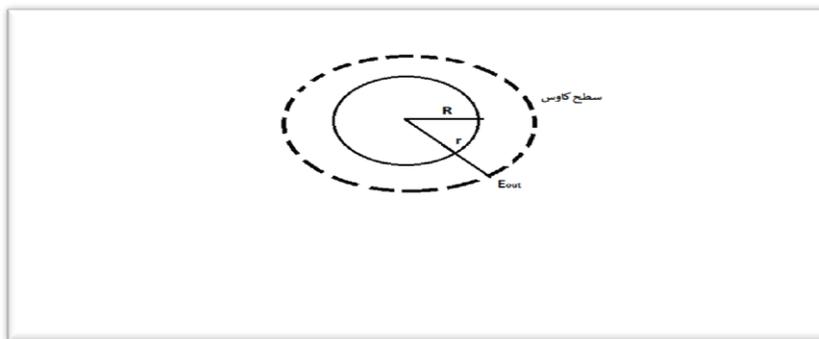
من قانون كاوس :-  $\oint \vec{E}_{out} \cdot \vec{n} da = \frac{q}{\epsilon_0}, \Rightarrow E_{out} \oint da = \frac{q}{\epsilon_0} \dots \dots \dots (1)$

but:  $q = \int \rho dV$

والحجم بالاحاثيات الكروية يعطى بالعلاقة التالية :  $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$

$$\therefore q = \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \rho \left[ \frac{R^3}{3} - 0 \right] [-\cos\theta]_0^\pi [\phi]_0^{2\pi}$$

$$q = \rho \left[ \frac{R^3}{3} \right] [ -(-1) + 1 ] (2\pi) = \frac{4}{3} \pi \rho R^3 \dots \dots \dots (2)$$



المساحة السطحية للكرة (سطح كاوس) هو  $(a)$  حيث :  $a = \int da = 4\pi r^2 \dots \dots \dots (3)$

بتعويض معادلة (2) و (3) في معادلة (1) نحصل على :- المجال خارج الكرة

$$\vec{E}_{out} \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3} \frac{\pi \rho R^3}{\epsilon_0}, \quad \Rightarrow E_{out} = |\vec{E}_{out}| = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

من المعادلة الاخيرة نلاحظ ان :  $E_{out} \propto \frac{1}{r^2}$

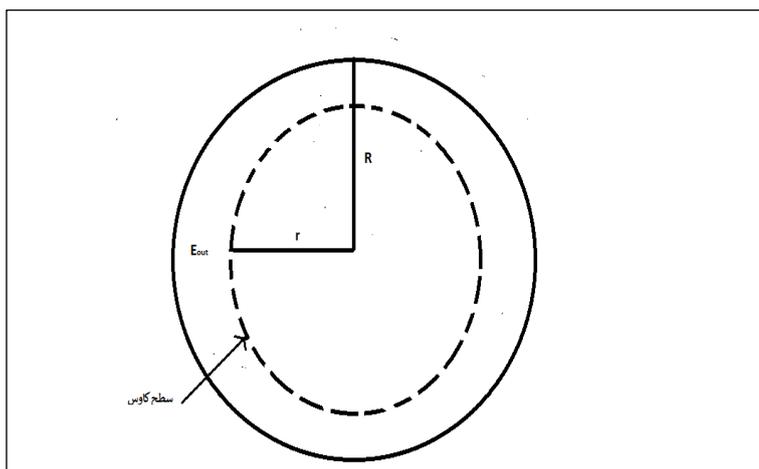
اما الجهد الكهربائي اللازم لتقريب شحنة نقطية من المالا نهائية الى سطح كاوس يساوي  $u_{out}$  ويحسب كالآتي:

$$u_{out} = - \int_{\infty}^r |\vec{E}_{out}| dr = - \int_{\infty}^r \left( \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \right) dr = \frac{-\rho R^3}{3\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right]$$

اذن الجهد الكهربائي لنقطة خارج الكرة هي:

$$u_{out} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} \quad u_{out} \propto \frac{1}{r}$$

2)  $r < R$



بتطبيق قانون كاوس :-

$$\oint E_{in} \cdot n da = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}_{in}| \int da = \frac{q}{\epsilon_0} \dots\dots(1)$$

حيث  $q$  هي جزء من الشحنة الكلية للكرة وهي ذلك الجزء الموجود ضمن الحجم المحدد بسطح كاوس (داخل سطح كاوس فقط) ويساوي :

$$q = \int \rho dV = \rho \int dV = \rho \int_0^r r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4}{3} \pi \rho r^3 \dots\dots\dots(2)$$

$$a = \oint da = 4\pi r^2 \dots\dots\dots(3)$$

نعوض معادلة (2) و (3) في معادلة (1) نحصل على :-

$$|\vec{E}_{in}|4\pi r^2 = \frac{\left(\frac{4}{3}\pi\rho r^3\right)}{\epsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}_{in}| = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}, \quad E_{in} \propto r$$

وليجاد الجهد الكهربائي داخل الكرة فإنه يساوي الجهد اللازم لنقل شحنة اختبارية من المالانهاية الى  $R$  والجهد اللازم لنقلها من  $R$  الى  $r$  وعليه:

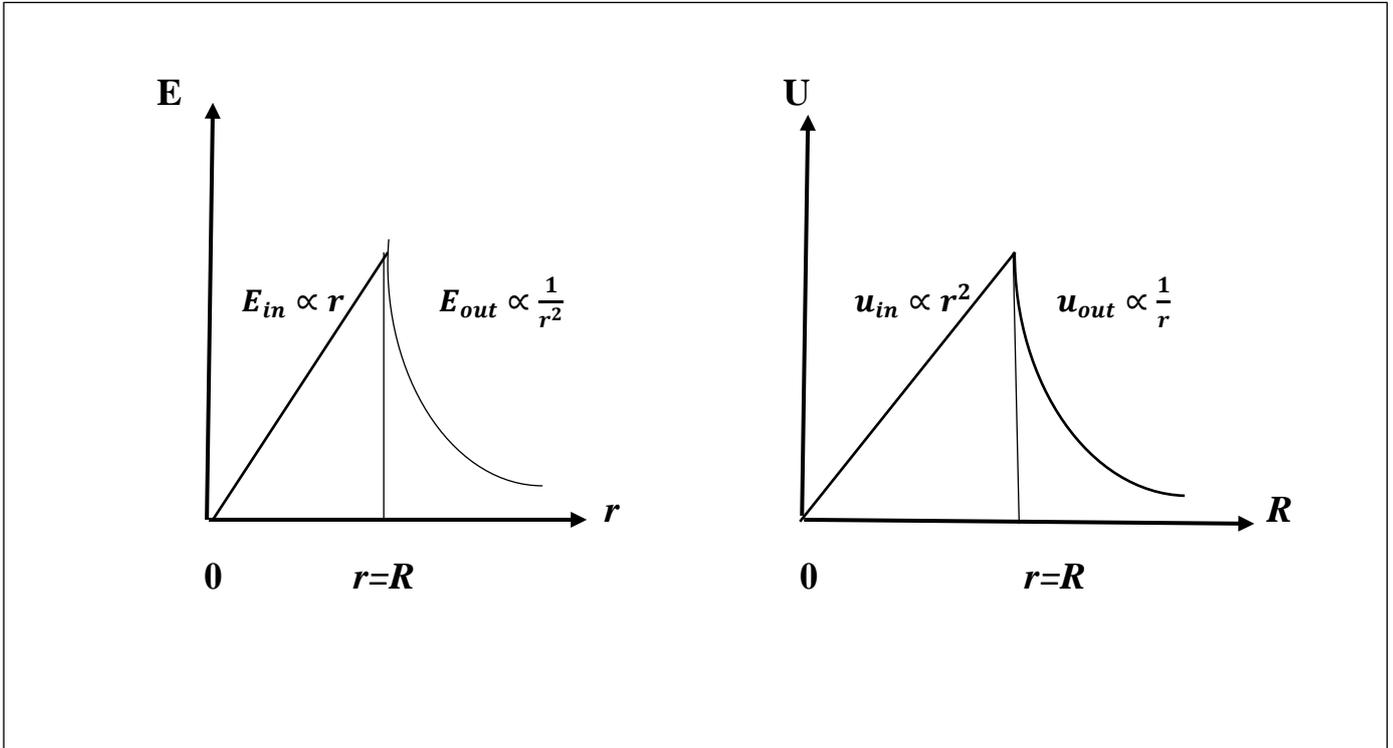
$$u_{in} = - \int_{\infty}^R |E_{out}| dr - \int_R^r |E_{in}| dr$$

$$u_{in} = - \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{1}{r^2} dr - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_R^r r dr = - \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} \right] - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right] = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0}$$

$$= \frac{2\rho R^2 - \rho r^2 + \rho R^2}{6\epsilon_0} = \frac{3\rho R^2 - \rho r^2}{6\epsilon_0} = \frac{\rho}{6\epsilon_0} [3R^2 - r^2]$$

$$or: u_{in} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[ R^2 - \frac{r^2}{3} \right] \quad U_{in} \propto r^2$$

يمكن توضيح العلاقة بين  $E$  و  $u$  مع  $r$  بالمخططات الآتية:



س4/ توزيع شحني كروي يمتلك كثافة شحنية كدالة الى  $r$  فقط حيث  $\rho = \frac{A}{r}$  جد المجال الكهربائي والجهد :

1- خارج الكرة حيث  $r > R$  .

2- داخل الكرة حيث  $r < R$  .

الجواب/ نفس الرسوم في السؤال السابق .

$$1) \oint \vec{E} \cdot \vec{n} da = \vec{E}_{out} \oint da = \frac{q}{\epsilon_0} \dots \dots \dots (1)$$

but:  $q = \int_0^R \rho dV$ , and  $\rho = \frac{A}{r}$ ,  $dV = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$

$$\therefore q = \int_0^R \frac{A}{r} r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = A \left[ \frac{R^2}{2} - 0 \right] [-\cos\pi + \cos 0][2\pi - 0]$$

$$\therefore q = 2\pi AR^2 \dots \dots \dots (2)$$

ولسطح كاوس نحسب المساحة السطحية له:

$$a = \oint da = 4\pi r^2 \dots \dots \dots (3)$$

نعوض معادلة (2) و (3) في (1)

$$|\vec{E}_{out}|(4\pi r^2) = \frac{2\pi AR^2}{\epsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}_{out}| = \frac{AR^2}{2 \epsilon_0 r^2}$$

$$u(r)_{out} = - \int \vec{E}_{out} \cdot d\vec{r} = - \int_\infty^r E_{out} dr = - \int_\infty^r \frac{AR^2}{2 \epsilon_0 r^2} dr = - \frac{AR^2}{2 \epsilon_0} \left[ \frac{-1}{r} \right]_\infty^r$$

$$u(r)_{out} = \frac{AR^2}{2 \epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right] = \frac{AR^2}{2 \epsilon_0 r}$$

2)  $r < R$

$$\oint \vec{E}_{in} \cdot \vec{n} da = \frac{\dot{q}}{\epsilon_0} = |\vec{E}_{in}| \oint da = \frac{\dot{q}}{\epsilon_0} \dots \dots \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \int_0^r \frac{A}{r} r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = A \frac{r^2}{2} \Big|_0^r [-\cos\pi + \cos 0](2\pi) \\ &= \frac{Ar^2}{2} (-(-1) + 1)(2\pi) = 2\pi Ar^2 \end{aligned}$$

$$\dot{q} = 2\pi Ar^2 \dots \dots \dots (2)$$

$$a = \oint da = 4\pi r^2 \dots \dots \dots (3)$$

نعوض معادلة (2) و (3) في معادلة (1) نحصل على :-

$$|\vec{E}_{in}|(4\pi r^2) = \frac{2\pi Ar^2}{\epsilon_0}$$

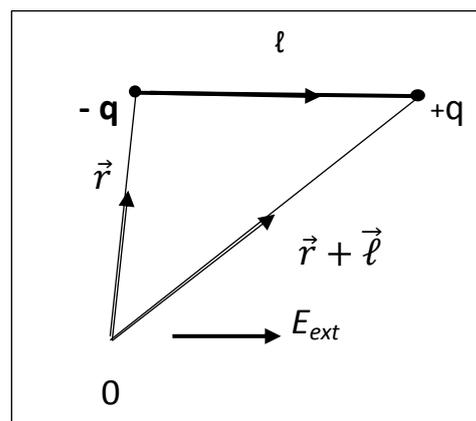
$$\therefore |\vec{E}_{in}| = \frac{A}{2\epsilon_0}$$

$$\begin{aligned} u_{in} &= - \int_{\infty}^R |\vec{E}_{out}| dr - \int_R^r |\vec{E}_{in}| dr = - \int_{\infty}^R \left( \frac{AR^2}{2\epsilon_0 r^2} \right) dr - \int_R^r \frac{A}{2\epsilon_0} dr \\ &= - \frac{AR^2}{2\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{dr}{r^2} - \frac{A}{2\epsilon_0} \int_R^r dr = - \frac{AR^2}{2\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{\infty}^R - \frac{A}{2\epsilon_0} [r]_R^r \\ &= \frac{AR^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{R} - \frac{A}{2\epsilon_0} (r - R) = \frac{AR}{2\epsilon_0} - \frac{Ar}{2\epsilon_0} + \frac{AR}{2\epsilon_0} = \frac{2AR}{2\epsilon_0} - \frac{Ar}{2\epsilon_0} \\ &= \frac{A}{2\epsilon_0} (2R - r) \Rightarrow u_{in} = \frac{A}{2\epsilon_0} (2R - r) \end{aligned}$$

س5/ جد الطاقة الكامنة لثنائي القطب الكهربائي عندما يوضع في مجال كهربائي منتظم ( $E_{ext}$ ).

$$\therefore u = \frac{\omega}{q}$$

الجواب/



$$\omega = -qu_{ext}(r) + qu_{ext}(r + l) \dots \dots \dots (1)$$

حيث  $\omega$  هي الطاقة الكامنة potential energy ، اذا كانت  $\vec{r} \ll \vec{l}$  نستخدم قانون متسلسلة القوى power series كالاتي:

$$u_{ext}(\vec{r} + \vec{\ell}) = u_{ext}(\vec{r}) + \vec{\ell} \cdot \vec{\nabla} u_{ext}(\vec{r}) \dots \dots \dots (2) \quad \text{حفظ}$$

نعوض معادلة ( 2 ) في معادلة (1) :-

$$\therefore \omega = -q u_{ext}(\vec{r}) + q u_{ext}(\vec{r}) + q \vec{\ell} \cdot \vec{\nabla} u_{ext}(\vec{r}) = q \vec{\ell} \cdot \vec{\nabla} u_{ext}(\vec{r}), \quad \text{but: } \vec{P} = q \vec{\ell}$$

$$\omega(\mathbf{r}) = \vec{P} \cdot \vec{\nabla} u_{ext}(\vec{r}), \quad \text{but: } \vec{E} = -\nabla u, \quad E_{ext}(\vec{r}) = -\nabla u_{ext}(\vec{r})$$

$$\therefore \omega(\mathbf{r}) = -\vec{P} \cdot \mathbf{E}_{ext}(\vec{r})$$

حيث المجال الخارجي  $E_{ext}(\vec{r})$  ناشئ عن شحنات غير الشحنتين المكونتين لثنائي القطب .

س 6 / بين ان القوة المؤثرة على ثنائي القطب في مجال كهربائي خارجي  $E_{ext}(\vec{r})$  تعطى بالعلاقة :-

$$\vec{F} = \vec{P} \cdot \vec{\nabla} E_{ext}$$

الجواب / نفس الرسم في السؤال السابق

$$\vec{F} = \vec{F}_{+q} + \vec{F}_{-q}, \quad \text{and } \vec{F} = q \vec{E}$$

$$\vec{F} = +q \vec{E}_{ext}(\vec{r} + \vec{\ell}) - q \vec{E}_{ext}(\vec{r}) \dots \dots \dots (1), \quad \text{but, } \vec{\ell} \ll \vec{r}$$

حسب قانون متسلسلة القوى:

$$\vec{E}_{ext}(\vec{r} + \vec{\ell}) = \vec{E}_{ext}(\vec{r}) + \vec{\ell} \cdot \vec{\nabla} \vec{E}_{ext}(\vec{r}) \dots \dots \dots (2)$$

نعوض معادلة (2) في معادلة (1) نحصل على:-

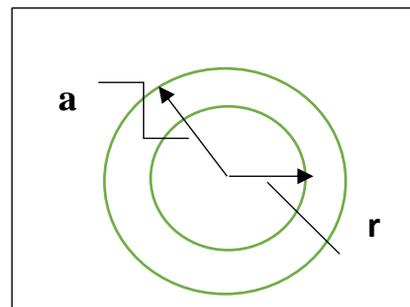
$$\vec{F} = q \vec{E}_{ext}(\vec{r}) + q \vec{\ell} \cdot \vec{\nabla} \vec{E}_{ext}(\vec{r}) - q \vec{E}_{ext}(\vec{r}) = q \vec{\ell} \cdot \vec{\nabla} \vec{E}_{ext}(\vec{r})$$

$$\text{as: } \vec{P} = q \vec{\ell}, \quad \therefore \vec{F} = \vec{P} \cdot \vec{\nabla} \vec{E}_{ext}(\vec{r})$$

س 7 / شحنة كروية نصف قطرها ( a ) كثافة شحنتها تتغير وفق العلاقتين :-

$$-1 \quad \rho_1 = \rho_o \left( \frac{a}{r} \right) \quad -2 \quad \rho_2 = \rho_o \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) , \quad \text{اوجد المجال الكهربائي الداخلي لكلا الحالتين .}$$

الجواب /



$$\oint \vec{E}_{in} \cdot \vec{n} da = \frac{q_1}{\epsilon_o}$$

$$|\vec{E}_{in}| \oint da = \frac{q_1}{\epsilon_o} \dots \dots \dots (1)$$

$$q_1 = \int \rho_1 dV = \int_0^r \rho_o \left(\frac{a}{r}\right) r^2 dr + \int_0^\pi \sin\theta d\theta + \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{a\rho_o r^2}{2} (4\pi)$$

$$q_1 = 2\pi a \rho_o r^2 \dots\dots\dots (2)$$

$$\oint da = a = 4\pi r^2 \dots\dots\dots (3)$$

نعوض معادلة (2) و (3) في معادلة (1) نحصل على :-

$$|E_{in}|(4\pi r^2) = \frac{2\pi\rho_o a r^2}{\epsilon_o} \Rightarrow E_{in} = \frac{\rho_o a}{2 \epsilon_o}$$

$$|E_{in}| \oint da = \frac{q_2}{\epsilon_o} \dots\dots\dots (1) \quad \text{وللحالة الثانية :}$$

$$q_2 = \int \rho_2 dV = \int_0^r \rho_o \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) r^2 dr + \int_0^\pi \sin\theta d\theta + \int_0^{2\pi} d\phi = \left[ \int_0^r \rho_o r^2 dr - \int_0^r \rho_o a^2 dr \right] (4\pi)$$

$$q_2 = \left[ \frac{\rho_o r^3}{3} - \rho_o a^2 r \right] (4\pi) = 4\pi\rho_o \left[ \frac{r^3}{3} - a^2 r \right] = 4\pi r^2 \rho_o \left[ \frac{r}{3} - \frac{a^2}{r} \right] \dots\dots\dots (2)$$

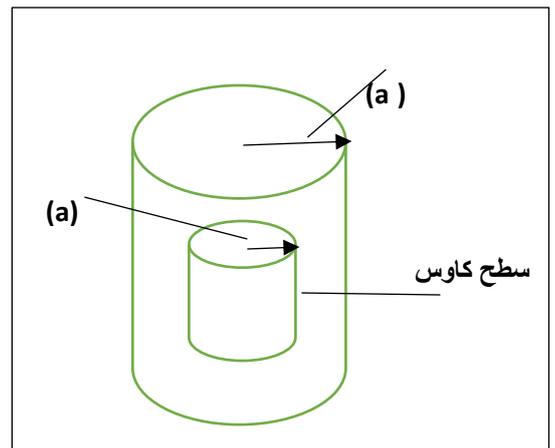
$$\oint da = 4\pi r^2 \dots\dots\dots (3)$$

نعوض (2) و (3) في (1) نحصل على :-

$$|E_{in}|(4\pi r^2) = \frac{4\pi r^2 \rho_o \left[ \frac{r}{3} - \frac{a^2}{r} \right]}{\epsilon_o}, \Rightarrow |E_{in}| = \frac{\rho_o}{\epsilon_o} \left[ \frac{r}{3} - \frac{a^2}{r} \right]$$

س 8 / توزيع شحني لاسطوانة لانهاية الطول ذات نصف قطر  $a$  وكثافة شحنة  $\sigma = \frac{3q(a-r)}{\pi a^3}$  والتي تكون على بعد  $r < a$  احسب المجال الكهربائي.

الجواب / بما ان  $r < a$  اذن المطلوب حساب المجال الكهربائي الداخلي .



$$\oint E_{in} \cdot dS = \frac{q_{tot}}{\epsilon_0}$$

$$|E_{in}| \oint dS = \frac{q_{tot}}{\epsilon_0} \dots \dots \dots (1) \quad , \quad q_{tot} = \int_0^r \sigma da$$

المساحة بالاحداثيات الاسطوانية :  $da = r dr d\phi$

$$\begin{aligned} \therefore q_{tot} &= \int_0^r \sigma r dr \int_0^{2\pi} d\phi = \int_0^r \frac{3q(a-r)}{\pi a^3} r dr (2\pi) = \frac{6q}{a^3} \left[ \int_0^r ar dr - \int_0^r r^2 dr \right] \\ &= \frac{6q}{a^3} \left[ \frac{ar^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right] = \frac{3qr^2}{a^2} - \frac{2qr^3}{a^3} = \frac{qr^2}{a^3} (3a - 2r) \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

$$\oint dS = S = 2\pi r a \dots \dots \dots (3)$$

تعويض (2) و (3) في (1) نحصل على :-

$$|E_{in}|(2\pi r a) = \frac{qr^2}{a^3 \epsilon_0} (3a - 2r) \Rightarrow |E_{in}| = \frac{qr(3a - 2r)}{2\pi a^4 \epsilon_0}$$

### ( 5 - 1 ) مقدمة :-

تقسم طاقة منظومة من الشحنات بصورة عامة الى طاقة حركية وطاقة كامنة ولكن الطاقة الكلية لمنظومة شحنية واقعة تحت ظروف ستاتيكية تعد طاقة كامنة والتي تكون ناشئة من التأثيرات الكهربائية المتبادلة للشحنات والتي تدعى الطاقة الكهروستاتيكية .

ان الشغل المنجز على شحنة نقطية ( q ) لنقلها من الموضع A الى الموضع B هو .

$$W = - \int_A^B F \cdot d\ell = -q \int_A^B E \cdot d\ell \quad \text{as:} \quad (F = qE)$$

$$\because E = -\nabla U, \quad \rightarrow W = q \int_A^B \nabla U \cdot d\ell$$

وعليه فالطاقة الكامنة لشحنة نقطية واحدة تعطى بالعلاقة :-

$$W = q(U_B - U_A)$$

والتي تمثل التغير الحاصل في الطاقة الكهروستاتيكية للشحنة نتيجة انتقالها  $A \rightarrow B$  .

**ملاحظة :-** تكون الإشارة سالبة في المعادلة اعلاه لأن القوى المقاومة معاكسة للشغل ، اي يجب ان يكون المجال عكس القوى لأنجاز الشغل .

### ( 5 - 2 ) الطاقة الكامنة لمجموعة من الشحنات النقطية :-

#### Potential Energy of a group of point charges

الطاقة الكامنة لمنظومة مكونة من ( m ) من الشحنات النقطية يمكن الحصول عليها من حساب الشغل اللازم لتجميع هذه الشحنات وجلبها واحدة تلو الأخرى من الملائمة .

ان جلب الشحنة الأولى ووضعها في مكانها لا يتطلب بذل شغل ، اي ان  $W_1=0$  ، بينما جلب الشحنة الثانية يتطلب شغل ووضعها في مكانها وهو  $W_2$  حيث :-

$$W_2 = q_2 U_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{12}}, \quad \text{where } \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

وبالنسبة الى جلب الشحنة الثالثة  $q_3$  فان الشغل المنجز :

$$W_3 = q_3 U_{31} + q_3 U_{32} = q_3 \left( \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{23}} \right)$$

وبنفس الطريقة يتم جلب الشحنات  $q_4$  و  $q_5$  من اللانهاية ، اي الشغل المنجز :

$$W_4 = q_4 U_{41} + q_4 U_{42} + q_4 U_{43}, \quad W_5 = q_5 U_{51} + q_5 U_{52} + q_5 U_{53} + q_5 U_{54}$$

وعليه فالطاقة الكهروستاتيكية الكلية تكون مساوية لمجموع الشغل المنجز لكل الشحنات ( الشغل المنجز يمثل الطاقة الكامنة ) .

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + \dots$$

$$W_E = q_2 U_{21} + q_3 U_{31} + q_3 U_{32} + q_4 U_{41} + q_4 U_{42} + q_4 U_{43} + q_5 U_{51} + q_5 U_{52} + q_5 U_{53} + q_5 U_{54} + \dots \dots \dots (1)$$

as:  $q_3 U_{31} = q_3 \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 r_{13}} = q_3 \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 r_{31}} = q_1 \frac{q_3}{4\pi \epsilon_0 r_{31}}$ , because  $\vec{r}_{13} = \vec{r}_{31}$

اي يحصل مجموع مزدوج حيث يحسب كل زوج مرتين حيث يسهم الزوج المتكون من شحنتين  $q_3$  و  $q_4$  مرة  $W_{34}$  ومرة  $W_{43}$

عند الجمع :  $W_{34} + W_{43} = 2W_{34}$

$$\therefore W = W_{21} + W_{12} + W_{31} + W_{13} + W_{32} + W_{23} + \dots$$

وبناء على ذلك تصبح معادلة (1) بالشكل :

$$W_E = q_1 U_{12} + q_1 U_{13} + q_2 U_{23} + q_1 U_{14} + q_2 U_{24} + q_3 U_{34} + \dots \dots \dots (2)$$

بجمع معادلة (1) و(2) نحصل على :-

$$2W_E = q_1(U_{12} + U_{13} + U_{14} + \dots) + q_2(U_{21} + U_{23} + U_{24} + \dots) + q_3(U_{31} + U_{32} + U_{34} + \dots) + \dots$$

$$U_1 = U_{12} + U_{13} + U_{14} + \dots$$

$$U_2 = U_{21} + U_{23} + U_{24} + \dots$$

$$U_3 = U_{31} + U_{32} + U_{34} + \dots$$

$$2W_E = q_1 U_1 + q_2 U_2 + q_3 U_3 + q_4 U_4 + \dots$$

بقسمة المعادلة على 2

$$W_E = \frac{1}{2} [q_1 U_1 + q_2 U_2 + q_3 U_3 + q_4 U_4 + \dots]$$

اذن كثافة الطاقة بالنسبة لتوزيع نقطي يعطى بالعلاقة :-

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{m=N} q_m U_m$$

but :  $U_m = \sum_{K=1}^m \frac{q_K}{4\pi \epsilon_0 r_{Km}}$

$$\therefore W_E = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{q_m q_K}{4\pi \epsilon_0 r_{km}} \quad \text{or} \quad W_E = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N q_m \sum_{k=1}^N \frac{q_K}{4\pi \epsilon_0 r_{km}}$$

ملاحظة :- اذا وجد سطح عازل بدل الفراغ يستبدل  $\epsilon_0$  بـ  $\epsilon$  .

( 3 – 5 ) الطاقة الكهروستاتيكية لتوزيع شحني :-

### Electrostatic Energy of Charge Distribution

عند حساب الطاقة الكهروستاتيكية اذا كانت الشحنة موزعة توزيعا سطحيا او حجميا اي مستمرا وليس نقطيا نلجأ الى التكامل فيكون:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(r)U(r) dV, \text{ or } W = \frac{1}{2} \int \sigma(r)U(r) da, \text{ or } W = \frac{1}{2} \int \lambda(r)U(r) d\ell$$

↑ حجمي

↑ سطحي

↑ خطي

اذا كان لدينا توزيع شحني متصل ( سطحي وحجمي ) نستخدم المعادلة الاتية للعوازل للتعبير عن طاقة التوزيع الشحني:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(r)U(r) dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma(r)U(r) da, \dots \dots \dots (1)$$

وبما ان الموصل يعد بمثابة منطقة متساوية الجهد بالامكان انجاز التكامل للموصلات فيكون : ( عندما  $Q_j$  شحنة الموصل)

$$\frac{1}{2} \int \sigma U da = \frac{1}{2} Q_j U_j$$

واذا وجدت عوازل وموصلات ، ستصبح معادلة (1) بالشكل :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(r)U(r) dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma(r)U(r) da + \frac{1}{2} \sum Q_j U_j \dots \dots \dots (2)$$

الحد الاخير من المعادلة يعبر عن مساهمة جميع الموصلات في طاقة المنظومة وبهذا يقتصر التكامل السطحي في الحد الثاني من المعادلة على السطوح غير الموصلة فقط.

في العديد من المسائل التي تتضمن شحنات طليقة ( *free charges* ) مستقرة على سطوح الموصلات لذلك فمعادلة (2) تؤول الى:

$$W = \frac{1}{2} \sum_j Q_j U_j$$

يمكن كتابة جهد الموصل ( $j$ ) كمجموع حدين :  $U_j = U_{j1} + U_{j2}$  حيث:

$U_{j1}$ : يمثل الجهد الناشئ عن شحنة الموصل نفسه.  $U_{j2}$  الجهد الناشئ عن الشحنة التي تحملها الموصلات الاخرى.

$$W = \frac{1}{2} \sum_j Q_j U_{j1} + \frac{1}{2} \sum_j Q_j U_{j2}$$

الحد الاول يمثل طاقة ذاتية للموصل وتعتمد على الظروف المحيطة بالموصل (لأن توزيع الشحنة على كل موصل ترتب نفسها حسب الظروف المحيطة بها) والحد الثاني يمثل طاقة التأثير المتبادل بين الشحنات.

وبشكل عام تعطى قيمة الطاقة الكهروستاتيكية لتوزيع شحني متصل للموصلات بالعلاقة:

$$W = \frac{1}{2} Q \Delta U$$

ويمكن التعبير عن طاقة المتسعة المشحونة بالشكل الآتي:

$$as: Q = C\Delta U, \text{ then } W = \frac{1}{2} Q\Delta U = \frac{1}{2} C(\Delta U)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

**( 4 – 5 ) كثافة الطاقة للمجال الكهروستاتيكي : Energy density for an Electrostatic Field**

لو كان لدينا توزيع شحني حتمي وسطحي مميز بالكثافتين  $\rho, \sigma$  والذان يرتبطان بالازاحة الكهربائية وفق العلاقتين :

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot D &= \rho \\ D \cdot n &= \sigma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

حيث المعادلة الأولى تستخدم للوساط العازلة والثانية على سطوح الموصلات.

$$as: W = \frac{1}{2} \int_V \rho U dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma U da \dots \dots \dots (2)$$

نعوض (1) في (2)

$$as: W = \frac{1}{2} \int_V U(\nabla \cdot D) dV + \frac{1}{2} \int_S UD \cdot n da \dots \dots \dots (3)$$

ويمكن تحويل التكامل الأول باستخدام المتطابقة :

$$\nabla \cdot (FA) = F\nabla \cdot A + A \cdot \nabla F, \quad \text{let } F = U, A = D$$

$$\nabla \cdot (UD) = U\nabla \cdot D + D \cdot \nabla U, \quad \text{also: } U\nabla \cdot D = \nabla \cdot (UD) - D \cdot \nabla U \text{ and } E = -\nabla U$$

$$\therefore U\nabla \cdot D = \nabla \cdot (UD) + \nabla \cdot E \dots \dots \dots (4)$$

نعوض معادلة (4) في معادلة (3) فنحصل على:

$$as: W = \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (UD) dV + \frac{1}{2} \int_V D \cdot E dV + \frac{1}{2} \int_S UD \cdot n da$$

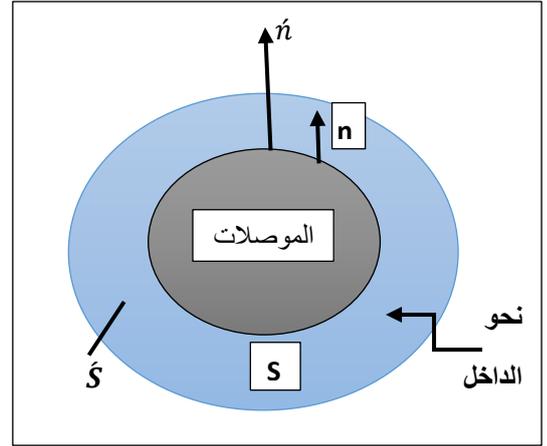
وباستخدام نظرية التباعد على الحد الأول من المعادلة:

$$as: W = \frac{1}{2} \int_{S+\hat{S}} UD \cdot \hat{n} da + \frac{1}{2} \int_V D \cdot E dV + \frac{1}{2} \int_S UD \cdot n da$$

السطح  $(S + \hat{S})$  يمثل السطح الكلي الذي يحيط بالحجم  $V$  وهذا السطح يتكون من جزئين الأول  $(S)$  يمثل سطوح جميع الموصلات في المنظومة ، بينما يمثل  $(\hat{S})$  السطح الذي يحيط بالمنظومة من الخارج، والذي يمكن اختيار موضعه في المالاتهائية.

وكذلك  $\hat{n}$  هو العمود الذي يشير الى خارج الحجم

$n$  السطح  $S$  نحو الحجم  $V$  ولهذا السبب يلغى التكامل السطحي الأول على  $(S)$  والتكامل الاخير على السطح  $S$  ويبقى التكامل السطحي على  $(\hat{S})$ . وبما ان  $(\hat{S})$  تم اختياره في المالاتهائية فعليه نجد ان التكامل للسطح  $(\hat{S})$ :



$$U = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r}, \rightarrow U \propto \frac{1}{r}, \text{ and } D = \frac{q}{4\pi r^2}, \rightarrow D \propto \frac{1}{r^2}, \quad \text{also } A = 4\pi r^2, \rightarrow da \propto r^2$$

$$\dot{S} \propto \frac{1}{r^2} \times \frac{1}{r} \times r^2 \rightarrow \dot{S} \propto \frac{1}{r} = \frac{1}{\infty} = 0$$

اذن التكامل السطحي الاول يلغى ايضا وبذلك :

$$W = \frac{1}{2} \int E \cdot D \, dV = \frac{1}{2} E \cdot DV$$

$$\text{but: } D = \epsilon E, \text{ then } W = \frac{1}{2} \epsilon E^2 V$$

ان كثافة الطاقة الكهروستاتيكية لوحدة الحجم للاوساط المادية هي:-

$$W = \frac{d\omega}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} D \cdot E, \quad \text{or } W = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 \, dV$$

وعليه نجد ان كثافة الطاقة اما ان تعطى بدلالة الجهد الكهربائي :

$$W = \frac{1}{2} \int \rho U \, dV$$

او بدلالة المجال الكهربائي:

$$W = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 \, dV$$

اسئلة الفصل الخامس

س1/ كرة موصلة نصف قطرها  $R$  موجودة في الفراغ تحتل شحنة مقدارها  $Q$  اثبت ان الطاقة الكلية المخزونة في الوسط الذي يحيط بالكرة تساوي :-  $W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$

الجواب/

$$W = \frac{1}{2} QU \dots \dots \dots (1)$$

ومن الصيغة التكاملية لقانون كاونس:-

$$\oint_S E \cdot nda = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad \therefore E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \dots \dots \dots (2)$$

$$but : U = - \int_{\infty}^R E \cdot dr \dots \dots \dots (3)$$

نعوض (2) في (3) نحصل على :

$$U = - \int_{\infty}^R \frac{Q dr}{4\pi \epsilon_0 r^2} = - \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} \Big|_{\infty}^R$$

$$\therefore U = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R} \dots \dots \dots (3)$$

نعوضها في معادلة (1) الطاقة اعلاه :

$$W = \frac{1}{2} Q \left( \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R} \right) = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 R}$$

س2/ احسب الطاقة الكامنة الكهربائية لشحنة مقدارها  $Q$  موزعة بصورة متجانسة في حيز كروي نصف قطره  $R$  باستخدام شدة المجال الكهربائي.

الجواب/

$$W_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 dV$$

نحسب شدة المجال الكهربائي داخل وخارج الكرة . نفرض  $\vec{E}$  الشدة داخل الكرة عندما  $r < R$  وان الشحنة داخل الكرة  $q =$

$$\dot{q} = \int_0^r \rho dV = \rho V = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

نرسم سطح كاوس داخل الكرة:-

$$\oint \dot{E} \cdot n da = \frac{\dot{q}}{\epsilon_0} \rightarrow \dot{E} \cdot 4\pi r^2 = \frac{\left(\frac{4}{3}\right) \pi \rho r^3}{\epsilon_0}$$

$$\dot{E} = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0}$$

ونفرض  $E$  شدة المجال خارج الكرة عندما  $r > R$  والشحنة خارج الكرة  $q$ .

$$q = \int_0^R \rho dV \rightarrow q = \rho V = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

نرسم سطح كاوس خارج الكرة

$$\oint E \cdot n da = \frac{q}{\epsilon_0}, \rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\left(\frac{4}{3}\right) \pi \rho R^3}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2}$$

الطاقة الكامنة الكهربائية ستكون مجموعها داخل وخارج الكرة. (سنأخذ  $dV = A dr$  حيث  $A =$  مساحة المقطع العرضي)

$$\begin{aligned} W_E &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \dot{E}^2 dV + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_0^R \left(\frac{\rho r}{3 \epsilon_0}\right)^2 A dr + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_R^\infty \left(\frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2}\right)^2 A dr \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_0^R \left(\frac{\rho r}{3 \epsilon_0}\right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_R^\infty \left(\frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{4\pi \rho^2}{9 \epsilon_0^2} \int_0^R r^4 dr + \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{4\pi \rho^2}{9 \epsilon_0^2} \int_R^\infty \frac{R^6}{r^4} r^2 dr \\ &= \frac{2\pi \rho^2}{9 \epsilon_0} \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^R + \frac{2\pi \rho^2 R^6}{9 \epsilon_0} \left[ \frac{-1}{r} \right]_R^\infty = \frac{2\pi \rho^2 R^5}{9 \epsilon_0} \left[ \frac{1}{5} + 1 \right] = \frac{2\pi \rho^2 R^5}{9 \epsilon_0} \left[ \frac{6}{5} \right] \\ &= \frac{12\pi \rho^2 R^5}{45 \epsilon_0} \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

ويمكن تبسيط الناتج كالآتي:

$$\text{as: } q = \int \rho dV = \frac{4}{3} \pi \rho R^3 \rightarrow q^2 = \frac{16}{9} \pi^2 \rho^2 R^6$$

نضرب معادلة (1) بـ  $\frac{8\pi R}{8\pi R}$  فيصبح :

$$W_E = \left( \frac{16\pi^2 \rho^2 R^6}{9} \right) \frac{1}{8 \epsilon_0 \pi R} \left( \frac{6}{5} \right) = \left( \frac{16\pi^2 \rho^2 R^6}{9} \right) \frac{1}{4 \epsilon_0 \pi R} \left( \frac{3}{5} \right) = \frac{3q^2}{20 \epsilon_0 \pi R}$$

س3/ نفس السؤال السابق ، احسب الطاقة الكامنة بأستخدام الجهد الكهروستاتيكي.

الجواب/ نحسب الطاقة الكامنة داخل وخارج الكرة باستخدام الجهد الكهروستاتيكي.

$$W = \frac{1}{2} \int \rho U dV, \quad r \leftarrow R \leftarrow \infty \leftarrow U_{in}$$

$$\text{as: } E = -\nabla U \text{ then } E = -\frac{dU}{dr}, \rightarrow dU = -E dr$$

$$\begin{aligned} U_{in} &= - \int E dr = - \int_{\infty}^R E_{out} dr - \int_R^r E_{in} dr = - \int_{\infty}^R \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} dr - \int_R^r \frac{\rho}{3 \epsilon_0} r dr \\ &= - \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{dr}{r} - \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \int_R^r r dr = - \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0} \left[ \frac{-1}{r} \right]_{\infty}^R - \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_R^r \\ &= \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 R} - \frac{\rho r^2}{6 \epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{6 \epsilon_0} \\ &= \frac{2\rho R^2}{6 \epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{6 \epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6 \epsilon_0} = \frac{\rho}{6 \epsilon_0} [3R^2 - r^2] \end{aligned}$$

$$U_{out} = - \int_{\infty}^r E_{out} \cdot dr = - \int_{\infty}^r \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} dr = - \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r} = - \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} + \frac{1}{\infty} \right]$$

$$\therefore U_{out} = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r}$$

والطاقة الكامنة الكلية تكون بجمع الجهد الداخلي والخارجي:

$$W = \frac{1}{2} \rho \int_0^R U_{in} dV + \frac{1}{2} \rho \int_R^\infty U_{out} dV, \quad \text{but } dV = A dr = 4\pi r^2 dr$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \rho \int_0^R \frac{\rho}{6 \epsilon_0} [3R^2 - r^2] \cdot 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2} \rho \int_R^\infty \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r} \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{4\pi \rho^2}{12 \epsilon_0} \left[ 3R^3 \int_0^R r^2 dr - \int_0^R r^4 dr \right] + \frac{4\pi \rho^2 R^3}{6 \epsilon_0} \int_R^\infty r dr \\ &= \frac{\pi \rho^2}{3 \epsilon_0} \left[ 3R^2 \frac{R^3}{3} - \frac{R^5}{5} \right] + \frac{2\pi \rho^2 R^3}{3 \epsilon_0} \left( -\frac{R^2}{2} \right) \\ &= \frac{\pi \rho^2 R^5}{3 \epsilon_0} \left[ 1 - \frac{1}{5} - 1 \right] = \frac{-\pi \rho^2 R^5}{15 \epsilon_0} \end{aligned}$$

( 4 - 1 ) مقدمة :

المادة العازلة المثالية : هي تلك التي لا تمتلك شحنات طليقة ، وعلى الرغم من ذلك فإن كل مادة تتركب من جزيئات وهذه بدورها تتركب من جسيمات مشحونة ( نوى الذرات و الالكترونات ) وتتأثر جزيئات المادة العازلة بوجود المجال الكهربائي ، اذ يسلط المجال قوة على كل جسم مشحون داخل الجزيئة الواحدة ، فتندفع الجسيمات الموجبة باتجاه الكهربائي بينما تندفع الجسيمات السالبة بالاتجاه المعاكس مما يؤدي الى ازاحة الجزيين الموجب والسالب للجزيئة عن موضع الاتزان باتجاهين متعاكسين ، ومع هذا فإن مقدار هذه الازاحة محدد ويمكن ببساطة القول حسب وجهة النظر العينية وكأنه تم ازاحة كل الشحنة الموجبة للعازل عن شحنته السالبة ، وعندئذ يقال بان العازل اصبح مستقطبا وعلى الرغم من العازل المستقطب يعد متعادلا كهربائيا بالمتوسط الا انه يولد مجالا كهربائيا عند النقاط الخارجية وفي داخل العازل على حد سواء . ان الفصل بين الشحنات الموجبة والسالبة يؤدي الى نشوء ثنائي قطب dipole ويمتلك عزم كهربائي .

( 4 - 2 ) الاستقطاب :- Polarization

يعرف الاستقطاب على انه : هو غاية عزم ثنائي القطب لوحدة الحجم من العازل عندما يقترب الحجم من الصفر اي ان :-

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} = \frac{d\vec{p}}{dV}$$

حيث :  $P=P(x,y,z)$  متجه ووحداته تنتج من قسمة وحدة الشحنة على وحدة المساحة  $\frac{coul}{m^2}$

ويعطى عزم ثنائي القطب الكهربائي لجزيئة واحدة بالعلاقة :

$$P_{molecule} = \int_{molecule} r dq \dots \dots \dots (1)$$

( العزم = حاصل ضرب احدى الشحنتين  $x$  المسافة بينهما ) باعتبار ان الجزيئة هي احدى المكونات الصغيرة المتعادلة كهربائيا للمادة العازلة . ويعطى عزم ثنائي القطب للعنصر الحجمي  $(\Delta V)$  بالعلاقة الاتية :-

$$\Delta P = \sum P_m \dots \dots \dots (2)$$

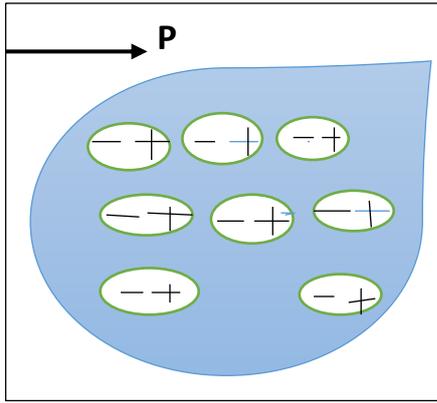
حيث يشمل الجمع جزيئات داخل العنصر  $(\Delta V)$

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} \dots \dots \dots (3)$$

نعوض معادلة (2) في (3) نحصل على:

$$P = \frac{1}{\Delta V} \sum P_m$$

حيث يمثل كل عنصر حجمي من العزل المستقطب ثنائي قطب صغير وان كل ثنائي قطب يمثل جزيئة منفردة كما في الشكل ادناه :-

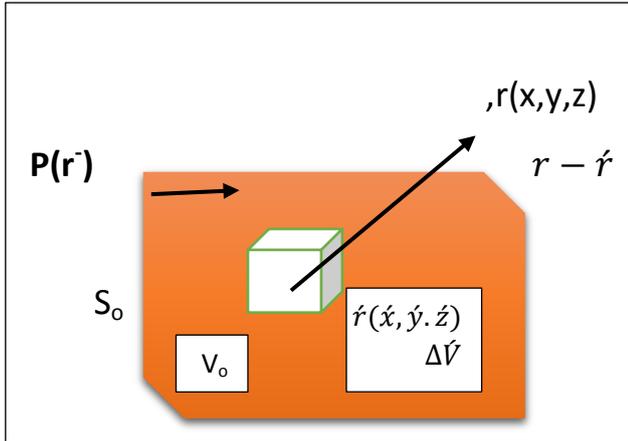


لو اخذنا عنصر حجمي صغير  $\Delta V$  من وسط عازل متعادل كهربائيا فاذا كان الوسط مستقطبا لنتج عن ذلك فاصل بين الشحنات الموجبة والسالبة وعليه يوصف العنصر الحجمي بعزم ثنائي القطب الكهربائي والذي تعطى قيمته بالعلاقة :

$$\Delta P = \int_{\Delta V} r dq$$

### ( 3 – 4 ) المجال الخارجي لوسط عازل :- External Field of a Dielectric media

لو اخذنا قطعة محدودة من مادة عازلة مستقطبة ، ونفرض انها تتسم بانها تتجه بمتجه الاستقطاب (  $\vec{P}(r)$  ) عند كل نقطة ممثلة بالمتجه  $\vec{r}$  كما في الشكل ادناه :-



ان الاستقطاب  $P(\vec{r})$  يؤدي الى نشوء مجال كهربائي والمطلوب حساب هذا المجال عند النقطة (  $r$  ) التي تقع خارج العازل ومن الافضل ان نحسب الجهد اولا ومن ثم نجد المجال الكهربائي بأخذ انحدار الجهد باشارة سالبة. نأخذ عنصر حجمي  $\Delta V$  من الوسط العازل (داخل العازل) ويميز هذا العنصر الحجمي بقيمة عزم ثنائي القطب  $\Delta P$  حيث :

$$\Delta p = P \Delta V \dots \dots \dots (1)$$

وعليه يعطى الجهد الناتج من عنصر الحجم  $\Delta V$  عند النقطة (  $r$  ) بالعلاقة :

$$\Delta U(r) = \frac{\Delta p \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \epsilon_0 |r - r'|^3} \dots \dots \dots (2)$$

نعوض معادلة (1) في (2) فنحصل على :

$$\Delta U(r) = \frac{P(\vec{r}') \cdot (r - r') \Delta V}{4\pi \epsilon_0 |r - r'|^3} \dots \dots \dots (3)$$

والكمية  $r - r'$  تمثل متجه اتجاهه منبثق من  $\Delta V$  نحو الخارج ومقداره :

$$|r - r'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

وعليه فالجهد الكلي عند النقطة  $r$  يمثل مساهمات جميع اجزاء العازل :

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_o} \int_{V_o} \frac{P(r') \cdot (r - r') dV'}{|r - r'|^3} \dots \dots \dots (4)$$

ومما اثبتنا سابقا (الفصل الاول)  $\left[ \nabla \frac{1}{|r|} = -\frac{\vec{r}}{|r|^3} \right]$  وعليه نجد ان:-

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

ان العامل  $\nabla$  (operator) يتضمن مشتقات للاحداثيات المؤشرة بعلامة الفتحة ومن الواضح انه اذا اثر العامل  $\nabla$  على الدالة  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  فان النتيجة ستكون مساوية لتاثير العامل  $(-\nabla)$  على الدالة نفسها وعليه ستصبح معادلة (4) بالشكل التالي:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_o} \int_{V_o} \vec{P} \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \dots \dots \dots (5)$$

ويمكن تحويل معادلة (5) بواسطة المتطابقة:

$$\nabla \cdot (FA) = F \nabla \cdot A + A \cdot \nabla F, \quad \text{where : } F = \text{scalar} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad \text{and } A = \text{vector} = \vec{P}$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{P}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla \cdot P + P \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$P \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \nabla \cdot \frac{P}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla \cdot P \dots \dots \dots (6)$$

نعوض معادلة (6) في معادلة (5) فنحصل على :

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_o} \int_{V_o} \nabla \cdot \frac{P}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi \epsilon_o} \int_{V_o} \frac{-\nabla \cdot P}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

وباستخدام نظرية التباعد  $\left[ \oint_S F \cdot n da = \int_V \nabla \cdot F dV \right]$  يتحول الحد الاول من تكامل حتمي الى تكامل سطحي :

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_o} \oint_{S_o} \frac{P \cdot \hat{n} d\acute{a}}{|r - \acute{r}|} + \frac{1}{4\pi \epsilon_o} \int_{V_o} \frac{-\acute{\nabla} \cdot P dV}{|r - \acute{r}|}$$

يرمز  $n$  الى العمود المقام على السطح  $da$  باتجاه خارج العازل .

$$\sigma_p = P \cdot \hat{n} = P_n, \quad \text{and} \quad \rho_p = -\acute{\nabla} \cdot P$$

حيث  $\sigma_p$  تمثل كثافة شحنة الاستقطاب السطحية ، بينما  $\rho_p$  تمثل كثافة شحنة الاستقطاب الحجمية .

ويطلق على شحنة الاستقطاب اسم الشحنة المقيدة للتعبير عن حقيقة كونها غير حرة الحركة ولا يمكن انتزاعها عن مادة العازل. يمكننا الان كتابة الجهد الناتج عن مادة العازل بالعلاقة :-

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_o} \left[ \oint_{S_o} \frac{\sigma_p d\acute{a}}{|r - \acute{r}|} + \int_{V_o} \frac{\rho_p dV}{|r - \acute{r}|} \right] \dots \dots \dots (7)$$

$$\text{as : } dq = \sigma_p d\acute{a} + \rho_p dV$$

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_o} \int \frac{dq}{|r - \acute{r}|}$$

معادلة (7) تشير الى ان مادة العازل قد استبدلت بتوزيع شحني مقيد مكافئ وشحنة الاستقطاب الكلية لجسم عازل  $Q_p$  تعطى بالعلاقة:

$$Q_p = \int_{V_o} -\acute{\nabla} \cdot P dV + \oint_{S_o} P \cdot n d\acute{a}$$

ويجب ان تساوي صفر لان فرضيتنا تنص على ان العازل ككل متعادل كهربائيا .

اما المجال الكهربائي فيمكن الحصول عليه من اخذ الانحدار السالب للمعادلة (7)  $(E = -\acute{\nabla}u)$  ولما كانت  $u$  دالة للاحداثيات  $(x,y,z)$ .

فان الانحدار الملائم هو  $(-\acute{\nabla})$  .

$$\therefore \acute{\nabla} \frac{1}{|r - \acute{r}|} = -\acute{\nabla} \frac{1}{|r - \acute{r}|} = -\frac{\vec{r} - \vec{\acute{r}}}{|\vec{r} - \vec{\acute{r}}|^3}$$

وبالتعويض في معادلة (7)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_o} \left[ \oint_{S_o} \frac{\sigma_p d\acute{a} (\vec{r} - \vec{\acute{r}})}{|\vec{r} - \vec{\acute{r}}|^3} + \int_{V_o} \frac{\rho_p dV (\vec{r} - \vec{\acute{r}})}{|\vec{r} - \vec{\acute{r}}|^3} \right] \dots \dots \dots (8)$$

**( 4- 4 ) المجال الكهربائي داخل العازل : *The Electric Field inside A dielectric***

ان المجال الكهروستاتيكي في العازل يجب ان يمتلك الخواص الاساسية نفسها للمجال في حالة الفراغ وخاصة ان المجال الكهربائي  $E$  يعد مجالا محافظا ( *conserved* ) وهذا يعني :-

$$\nabla \times E = 0, \quad \Rightarrow \oint E \cdot d\ell = 0$$

دعنا نطبق هذه المعادلة على المسار  $ABCD$  الموضح بالشكل :

يقع الجزء  $AB$  داخل فجوة على شكل ابرة استقطعت من العازل اما الجزء  $CD$  فيقع داخل المادة العازلة .

$$E_{vacuum} \cdot L - E_{dielectric} \cdot L = 0$$

اي ان:

$$E_{vacuum} \cdot L = E_{dielectric} \cdot L$$

$$E_{vacuum} = E_{dielectric}$$

المعادلة اعلاه تصح لكل الاتجاهات التي يمكن ان تاخذها تلك

الفجوة وبهذا نصل الى الاستنتاج التالي :-

يكون المجال الكهربائي داخل العازل مساويا للمجال الكهربائي داخل الفجوة التي على شكل ابرة في العازل بشرط ان يكون محور الفجوة موازيا لاتجاه المجال الكهربائي.

وعلى هذا الاساس تحول حساب المجال الكهربائي داخل العازل الى حساب المجال الكهربائي داخل فجوة في العازل على شكل ابرة ، بيد ان المجال الكهربائي داخل الفجوة ( *cavity* ) هو في واقع الحال مجال خارجي ولهذا يمكن تعيينه وفق النتائج التي حصلنا عليها سابقا.

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_{V_0-V_1} \frac{\rho_p(x, y, z)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \oint_{S_0+S} \frac{\sigma_p(x, y, z)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} da$$

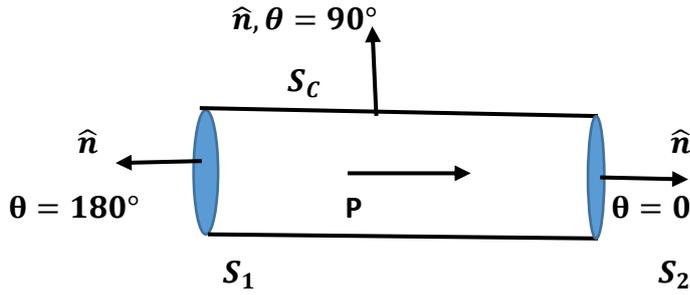
اي بنفس الطريقة نفرض ان استقطاب العازل هو دالة معطاة  $\vec{P}(x, y, z)$  . نحسب الجهد والمجال الناشئ عن هذا الاستقطاب بأخذ نقطة المجال (  $r$  ) عند مركز الفجوة .

(  $V_0-V_1$  ) : تمثل الحجم الكلي للعازل عدا حجم الابرة.

$S_0$ : السطح الخارجي للعازل.

$\vec{S}$  : يمثل سطح الابرة حيث (  $\vec{S} = (S_1 + S_2 + S_C)$  )

ملاحظة : يلاحظ من المعادلة ان التكامل السطحي اخذ كل السطوح وذلك لأن التكامل السطحي حول سطح مغلق وعليه يشمل جميع السطوح التي يحويها السطح المغلق ، بينما التكامل الحجمي يأخذ حجم العازل ككل .



يلاحظ من الشكل ان  $\sigma_p = 0$  على السطح الاسطواني  $S_C$  للابرة لأنه في المواد العازلة متساوية الاتجاه ويكون اتجاه الاستقطاب  $P$  منطبقا على  $E$  ولهذا يكون  $\sigma_p = 0$   
 $\sigma_p = P \cdot \hat{n} = P \cos \theta = P \cos 90 = 0$   
 كما يمكن جعل الابرة رقيقة الى درجة بحيث يمكن اهمال مساحة السطحين  $S_2, S_1$  وعلى هذا الاساس يصبح السطح الخارجي للعازل هو

الوحيد الذي يسهم في تكوين الجهد و هو السطح ( $S_0$ ) وعليه تصبح معادلة الجهد :

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_{V_0-V_1} \frac{\rho_p(x, y, z)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \oint_{S_0} \frac{\sigma_p(x, y, z)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} da$$

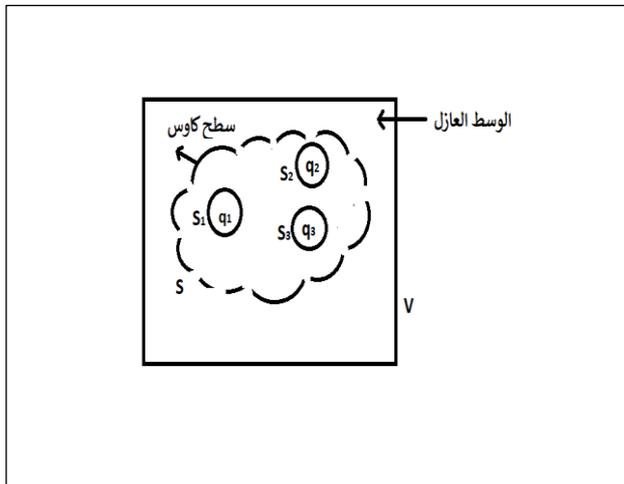
فإذا كانت الفجوة ضيقة جدا يمكن اهمال  $V_1$  فنكون هذه المعادلة مشابهة لمعادلة (7) فتعطي قيمة الجهد  $U(r)$  للوسط العازل دون الاخذ بنظر الاعتبار اذا كانت  $r$  داخل العازل ام خارجه وعليه يمكن ايجاد المجال الكهربائي حيث :  
 $E = -\nabla U$

#### ( 4 - 5 ) قانون كاوس في العوازل والازاحة الكهربائية:

### Guess's Law in A dielectric and The electric Displacement

ينص قانون كاوس على ان الفيض الكهربائي خلال سطح مغلق يتناسب تناسباً طردياً مع الشحنة الكلية التي يحتضنها السطح.

وعند تطبيق قانون كاوس على منطقة تحتوي شحنات طليقة مغروسة في عازل فيجب ان تشمل جميع الشحنات داخل السطح المقيدة منها والطليقة على حد سواء.



ان الخط المتقطع  $S$  يمثل سطح كاوس في الشكل المجاور ، وهو سطح مغلق كائن داخل الوسط العازل ، وهناك كمية من الشحنة الطليقة  $Q$  داخل داخل الحجم المحدد بالسطح  $S$ .  
 سنفرض ان الشحنة الطليقة موزعة على ثلاثة اجسام موصلة بكميات قدرها  $q_1, q_2, q_3$  حيث:

$$Q_f = q_1 + q_2 + q_3$$

وبتطبيق قانون كاوس على هذه الحالة ينتج ان :

$$\oint E \cdot n \, da = \frac{Q_f + Q_p}{\epsilon_0} \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{but : } Q_p = \oint_S P \cdot n \, da + \int_V -\nabla \cdot P \, dV \dots \dots (2)$$

يمثل V حجم العازل المحاط بالسطح S حيث :-

$$P \cdot n = \sigma_p, \quad -\nabla \cdot P = \rho_p$$

$$\therefore Q_p = \int_{S_1+S_2+S_3} P \cdot n \, da + \int_V -\nabla \cdot P \, dV \dots \dots \dots (3)$$

سنحول التكامل الحجمي (الحد الثاني من معادلة (3)) الى تكامل سطحي باستخدام نظرية التباعد وبأخذ جميع السطوح المحيطة بالحجم (V) ، اي (S, S<sub>1</sub>, S<sub>2</sub>, S<sub>3</sub>)

$$\int_V -\nabla \cdot P \, dV = \int_{S+S_1+S_2+S_3} -P \cdot n \, da \dots \dots \dots (4)$$

نعوض (4) في (3) فنحصل على :

$$Q_p = \int_{S_1+S_2+S_3} P \cdot n \, da + \int_{S+S_1+S_2+S_3} -P \cdot n \, da$$

من الواضح ان المساهمات الناشئة عن السطوح الثلاثة الاخيرة ستمحو الحد الاول وعليه ستصبح المعادلة.

$$Q_p = - \oint_S P \cdot n \, da \dots \dots \dots (5)$$

ومن معادلة (1) :-

$$\oint (\epsilon_0 E) \cdot n \, da = Q_f + Q_p$$

$$\oint (\epsilon_0 E) \cdot n \, da - Q_p = Q_f \dots \dots \dots (6)$$

نعوض (5) في (6) :

$$\oint (\epsilon_0 E + P) \cdot n da = Q_f \dots \dots \dots (7)$$

تشير معادلة (7) الى ان فيض المتجه  $(\epsilon_0 E + P)$  خلال سطح مغلق يساوي الشحنة الطليقة الكلية التي يحتضنها السطح وهذا المتجه يسمى الازاحة الكهربائية ويرمز له  $D$  وهو كمية متجهة .

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \dots \dots \dots (8)$$

وحداتها وحدات استقطاب اي وحدة شحنة مقسومة على وحدة مساحة .

$E$ : يمثل شدة المجال الناشئ عن الشحنات المقيدة والطيقة معا.

$P$ : يمثل متجه الاستقطاب الناشئ عن الشحنات المقيدة المحتثة فقط .

$D$ : تمثل الكثافة السطحية للشحنات الطليقة (الحرّة) .

نعوض معادلة (8) في (7) فنحصل على :

$$\oint D \cdot n da = Q_f = \int \rho dV \dots \dots \dots (9)$$

وهي تمثل الصيغة التكاملية لقانون كاوس في العوازل .

وباستخدام نظرية التباعد نحول التكامل من سطحي الى حتمي :

$$\oint D \cdot n da = \int \nabla \cdot D dV \dots \dots \dots (10)$$

نعوض (10) في (9) :

$$\int \nabla \cdot D dV = \int \rho dV$$

الصيغة التفاضلية لقانون كاوس في العوازل حيث

$$\boxed{\therefore \nabla \cdot D = \rho}$$

$\rho$  : تمثل كثافة الشحنة الطليقة.

ولايجاد المجال  $E$  نستخدم معادلة (8) حيث:

$$E(x, y, z) = \frac{D}{\epsilon_0} - \frac{P}{\epsilon_0}$$

حيث  $E$  المجال الكهروستاتيكي الكلي عند اي نقطة في وسط عازل . حيث:

$\left(\frac{D}{\epsilon_0}\right)$  يرتبط بكثافة الشحنة الطليقة من خلال تباعد الازاحة.

$\left(-\frac{P}{\epsilon_0}\right)$  يتناسب طرديا مع الاستقطاب للوسط العازل .

وفي الفراغ يعطى المجال الكهربائي الكلي بالحد الاول فقط من المعادلة اعلاه.

**( 4 - 6 ) التأثيرية الكهربائية وثابت العزل :- Electric Susceptibility and Dielectric constant**

يحدث الاستقطاب للمواد العازلة استجابة للمجال الكهربائي المسلط عليها وان درجة الاستقطاب لاتعتمد فقط على المجال الكهربائي ولكن على خواص المادة العازلة ايضا، والعلاقة التي تربط الاستقطاب وشدة المجال الكهربائي ( حسب وجهة النظر العينية ) علاقة نقطية ،فاذا تغيرت  $E$  من نقطة الى اخرى داخل الوسط المادي لتغيرت  $P$  تبعا لذلك ولمعظم المواد تتلاشى  $P$  اذا ماتلاشت  $E$  واذا كانت المادة العازلة متساوية الاتجاه ( isotropic ) لوجب ان يكون الاستقطاب باتجاه المجال الكهربائي نفسه الذي تسبب في تكوين الاستقطاب ويمكن تلخيص النتائج بالمعادلة :

$$P \propto E \Rightarrow P = \epsilon_0 \chi_e E$$

حيث  $\chi_e$  :- تمثل التأثيرية الكهربائية.

$$as: D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi_e E = \epsilon_0 E (1 + \chi_e)$$

$$but : \chi_e = K - 1, \Rightarrow K = 1 + \chi_e$$

$$\therefore D = K \epsilon_0 E, \quad but K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r \Rightarrow K \epsilon_0 = \epsilon$$

ويسمى  $K$  ثابت العزل او السماحية النسبية (  $\epsilon_r$  ) *relative permittivity* وهو مجرد من الوحدات.

$$\therefore D = K \epsilon_0 E = \epsilon E$$

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_0 \chi_e = \epsilon_0 (1 + \chi_e) = K \epsilon_0$$

حيث :

$\epsilon$  : سماحية المادة *permittivity of material* ووحداتها نفس وحدات  $\epsilon_0$  .

$$\therefore D = \epsilon E$$

للاوساط المتساوية الاتجاه isotropic :

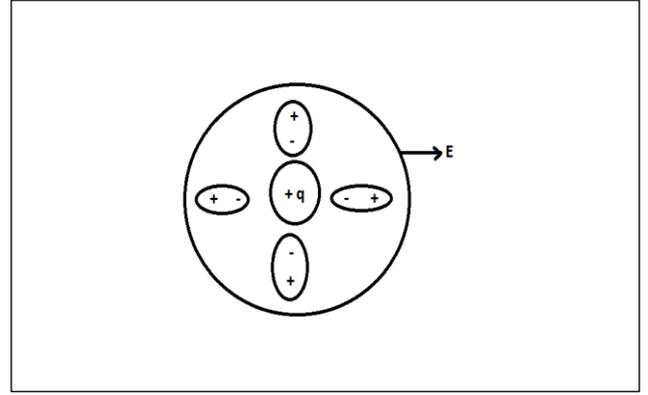
للفراغ  $K=1$  و  $\chi_e = 0$  وللغازات  $0 < \chi < 1$  وللمواد الصلبة والسوائل  $\chi > 1$

وتتراوح قيمة ثابت العزل بين الواحد والعشرة لمعظم المواد العازلة ويشذ الماء عن هذه القاعدة حيث ثابت العزل له يساوي (80) في درجات الحرارة الاعتيادية . ان السلوك الكهربائي للمادة يحدد كليا بالسماحية ( $\epsilon$ ) او بالتأثيرية الكهربائية ( $\chi_e$ ) فاذا كان المجال الكهربائي المسلط على المادة العازلة شديد جدا فانه سيعمل على سحب الالكترونات خارج الجزيئات وبصورة تامة وبذلك تصبح المادة موصلة (انهيار العازل dielectric breakdown).

واقصى قيمة للمجال الكهربائي الذي يستطيع العازل تحمله دون ان يحدث انهيار كهربائي يدعى : شدة (قوة) العزل *dielectric strength*.

س/ اوجد الاستقطاب لشحنة نقطية تقع في نقطة الاصل لعازل متجانس ومتساوي الاتجاه.

الجواب/ لو كان لدينا شحنة نقطية في عازل متجانس ومتساوي الاتجاه (linear isotropic and homogenous) والوسط مميز بثابت العزل ( $K$ ) وممتد الى المالا نهائية ، نستخدم قانون كاوس على سطح كروي نصف قطره ( $r$ ) ومركزه ينطبق على الشحنة النقطية التي يفترض ان تقع في نقطة الاصل للسهولة.



الصيغة التكاملية لقانون كاوس في العوازل :

$$\oint D \cdot nda = Q$$

$$D \cdot 4\pi r^2 = q \Rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{n} = \frac{q}{4\pi r^3} \vec{r} \dots (1)$$

$$D = \epsilon E \Rightarrow E = \frac{D}{\epsilon} \dots \dots \dots (2)$$

نعوض (1) في (2) نحصل على :-

$$E = \frac{q\vec{r}}{4\pi \epsilon r^3} \dots \dots \dots (3)$$

$$\text{but : } \epsilon = K \epsilon_0 \Rightarrow \therefore E = \frac{q}{4\pi K \epsilon_0 r^3} \vec{r} \dots \dots (4)$$

اي ان المجال الكهربائي يكون اصغر بمقدار  $K$  من المرات مما عليه الحال لو كان الوسط العازل غير موجود وهذا يعني ان وجود الوسط العازل يضعف المجال الكهربائي .

$$\text{as: } P = \epsilon_0 \chi_e E \dots \dots (5), \quad \text{and } \chi_e = K - 1,$$

نعوض قيمة ( $E$ ) في معادلة (4) وقيمة  $\chi_e$  في معادلة (5) :-

$$P = (K - 1) \epsilon_0 \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^3} \vec{r} \Rightarrow \therefore P = \frac{(K - 1)q}{4\pi K} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

**Boundary Conditions on the Field Vectors - ( 4 - 7 ) الشروط الحدودية على متجهات المجال :-**

تطبق شروط الحدود على متجهات المجال لتتغير على التغير الذي يطرأ على متجه المجال  $E$  ومتجه الازاحة الكهربائية  $D$  عندما يجتازان فاصلا بين وسطين وقد يكون الوسيطين مادتين عازلتين مختلفتين في خواصهما او من مادة عازلة واخرى موصلة .

(1) لناخذ وسطين مختلفتين على تماس احدهما بالآخر ونفرض ان الوسط الفاصل بينهما يحمل شحنة طليقة ذات كثافة سطحية  $\sigma$ .

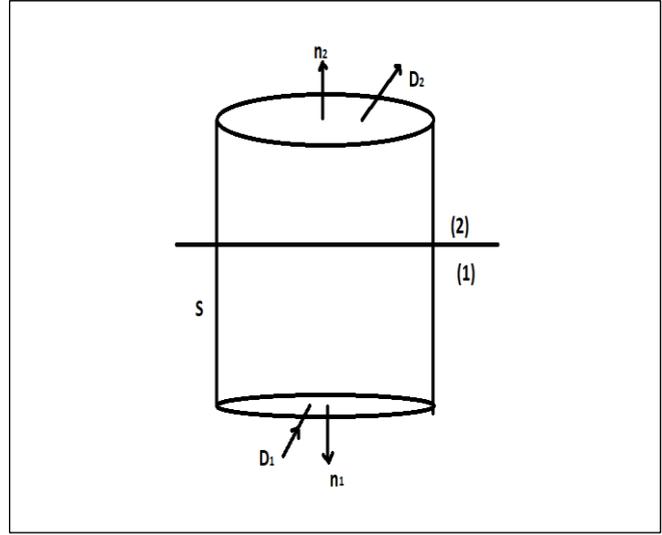
لناخذ سطح اسطواني ( $S$ ) على شكل علبة اقراص صغيرة بحيث يقطع السطح الفاصل ويحيط بمساحة منه قدرها ( $\Delta S$ ) كما في الشكل ادناه، فعند تطبيق قانون كاوس على السطح الفاصل ( $S$ ) نحصل على :-

$$\oint D \cdot nda = Q$$

الشحنة الطليقة التي يحتضنها السطح ( $S$ ) تساوي شحنة كثافة حجمية و سطحية اي :

$$\sigma \Delta S + \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2) V$$

وبما ان الحجم يهمل لأن حجم السطوانة صغير جدا ( ارتفاع السطح صغير بحيث يهمل اذا ماقورن مع قطر السطح الاسطواني ) لذا يبقى فقط كثافة سطحية  $\sigma \Delta S$  وعليه :-



$$D_2 \cdot n_2 \Delta S + D_1 \cdot n_1 \Delta S = \sigma \Delta S$$

$$as: n_1 = -n_2,$$

$$(D_2 - D_1) \cdot n \Delta S = \sigma \Delta S$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \dots \dots \dots (1)$$

حيث  $n_2$  العمود على السطح الفاصل .

تشير معادلة (1) الى ان الانقطاع في المركبة العمودية للازاحة  $D$  يعطى بدلالة الكثافة السطحية للشحنة الطليقة على السطح الفاصل بين الوسطين. وبتعبير اخر ان المركبة للازاحة  $D$  تكون متصلة فيما لو لم تكن هناك شحنة طليقة على السطح الفاصل بين الوسطين ، اي ان :-

( الشحنات الحرة في المواد العازلة تساوي صفر )  $\sigma = 0$

$$D_{2n} - D_{1n} = 0, \quad D_{2n} = D_{1n} \dots \dots \dots (2)$$

حيث  $D_{2n}$  و  $D_{1n}$  هما المركبتان العموديتان للازاحة الكهربائية في الوسطين العزلين الاول والثاني على التوالي ، وهذه هي العلاقة الاولى الخاصة بالحدود الفاصلة بين مادتين عازلتين .

اما بالنسبة للمجال الكهربائي فان (  $\nabla \times E = 0$  ) اي المجال محافظ وعليه بالامكان الحصول على المجال الكهروستاتيكي من اخذ انحدار الجهد باشارة سالبة (  $-\nabla U$  ) وعليه سيكون :-

$$\oint E \cdot d\ell = 0$$

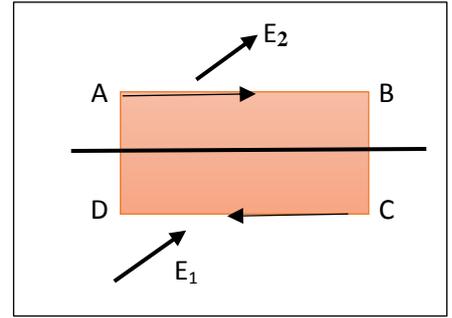
اي ان التكامل الخطي حول اي مسار مغلق يتلاشى ، دعنا نطبق هذه النتيجة على المسار المغلق  $ABCD$  المبين بالشكل ادناه :-

نفرض طول كل من جزئي المسار (  $AB$  و  $CD$  ) يساوي (  $\Delta \ell$  ) وان طول  $BC$  و  $AD$  مهمل لذا ينتج :-

$$E_2 \cdot \Delta L + E_1 \cdot (-\Delta L) = 0 \Rightarrow (E_2 - E_1) \cdot \Delta L = 0$$

$$\therefore E_{2t} = E_{1t} \dots \dots \dots (3)$$

وهما مركبتا شدة المجال الكهربائي الموازيان للسطح الفاصل .



معادلة (3) تعني ان المركبة العمودية للمجال الكهربائي تكون متصلة عبر السطح الفاصل ( مستمرة في الوسطين العازلين ) وهذه هي العلاقة الثانية الخاصة بالحدود الفاصلة بين مادتين عازلتين . ويمكن الحصول على العلاقة الثالثة والخاصة بالجهد على السطح الفاصل في كل من الوسطين وذلك بأخذ التكامل الخطي :-

$$\int E_{1t} \cdot \Delta \ell = \int E_{2t} \cdot \Delta \ell$$

$$\therefore \phi_1 = \phi_2 \dots \dots \dots (4)$$

وهذا يعني ان الجهد لنقطة واقعة على الحدود الفاصلة له نفس القيمة في الوسط الاول والثاني وهذه هي العلاقة الثالثة الخاصة بالحدود الفاصلة بين مادتين عازلتين.

(2) اذا كان الوسط رقم (1) موصل لأصبح  $E_1=0$  لأن المجال صفر داخل الموصل ، وهذا يعني ان الاستقطاب  $P_1=0$  لأن :  $( P = \epsilon_0 \chi_e E )$  كما ان الازاحة في هذا الوسط تتلاشى  $D_1=0$  لأن :

$$D_1 = \epsilon_0 E_1 + P_1 = 0$$

وبهذا تأخذ المعادلتان (1) و(3) الصيغتين الاتيتين :

$$D_{2n} = \sigma, \quad E_{2t} = 0$$

**س/ اثبت ان الجهد خلال جسم عازل يحقق معادلة لابلاس .**

الجواب/ من الصيغة التفاضلية لقانون كاوس في العوازل :-

$$\nabla \cdot D = \rho \dots \dots \dots (1)$$

حيث  $\rho$  كثافة الشحنة الطليقة ، وبما ان العازل خطي ومتجانس وذا اتجاه متساو فان:

$$D = \epsilon E \dots \dots (2)$$

وبتعويض معادلة (2) في (1) :

$$\therefore \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon} \dots \dots \dots (3)$$

ولكن متجه المجال الكهروستاتيكي  $E$  يرتبط بالجهد اللامتجه حسب العلاقة :

$$E = -\nabla U \dots \dots (4)$$

بتعويض معادلة (4) في (3) :

$$\therefore \nabla \cdot \nabla U = -\frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow \nabla^2 U = \frac{-\rho}{\epsilon}$$

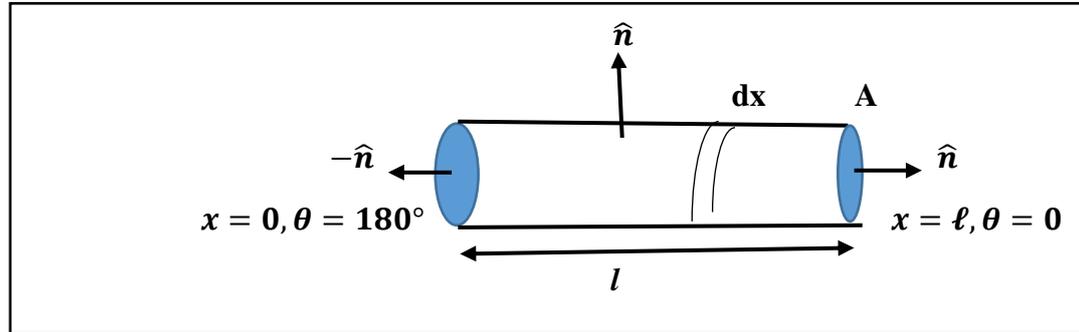
وبهذا نجد ان جهد العازل يحقق معادلة بويزون والفرق الوحيد بي المعادلة اعلاه والمعادلة المماثلة في حالة الفراغ هو احلال  $\epsilon$  بدلا عن  $\epsilon_0$  وفي معظم الحالات لا يحتوي العازل على شحنة حرة طليقة موزعة خلال الحجم الذي تشغله اي ان

$$\rho = 0, \quad \nabla^2 U = 0$$

تحت هذه الظروف يحقق الجهد معادلة لابلاس خلال جسم العازل حيث يمكن ان توجد الشحنات الطليقة على سطوح الموصلات او ان تتمركز على هيئة شحنات نقطية قد تغمس في العازل .

### اسئلة الفصل الرابع

س1/ ساق رقيق عازل مساحة مقطعه  $A$  يمتد على الاحداثي  $x$  بين النقطتين  $x = 0$  ,  $x = \ell$  , واتجاه الاستقطاب في الساق مع محور  $x$  معطاة بالمعادلة  $P_x = ax^2 + b$  , جد الكثافة الحجمية لشحنة الاستقطاب والشحنة السطحية للاستقطاب على نهايتي الساق ( اي كثافتي الشحنة المقيدة) وبين ان شحنة الاستقطاب الكلية المقيدة تتلاشى في هذه الحالة .



الجواب/ لايجاد كثافة الشحنة الحجمية المستقطبة او المقيدة نستخدم العلاقة:

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{dP_x}{dx} = -\frac{d}{dx}(ax^2 + b) = -2ax$$

ولايجاد كثافة الشحنة السطحية المقيدة نستخدم العلاقة :

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_x \cdot \mathbf{n} = \mp P_x$$

لان من الرسم نأخذ اتجاه العمود  $\mathbf{n}$  فقط باتجاه  $x$  عندما  $\cos 180 = -1$  ,  $\cos 0 = 1$

$$\text{when } x = 0, \quad \sigma_P = -P_x|_{x=0} = -ax^2 - b|_{x=0} = -b$$

$$\text{when } x = \ell, \quad \sigma_P = P_x|_{x=\ell} = ax^2 + b|_{x=\ell} = a\ell^2 + b$$

والشحنة السطحية للاستقطاب :

$$Q_{ts} = \int_A \sigma_b dS$$

والشحنة الكلية للاستقطاب = الشحنة السطحية + الشحنة الحجمية :

$$Q_{tot} = \int_V \rho_b dV + \int_A \sigma_b dS = \int_0^\ell -2ax Adx + \int_A (-b + a\ell^2 + b) dS = -aAx^2 \Big|_0^\ell + a\ell^2 A$$

$$= -a\ell^2 A + a\ell^2 A = 0$$

س2/ اثبت ان :-  $\rho_b = \frac{-(K-1)}{K} \rho_f$  حيث  $K$  هو ثابت العزل .

الجواب /  $\therefore D = K \epsilon_0 E \Rightarrow \epsilon_0 E = \frac{D}{K}$  and  $\epsilon = K \epsilon_0$  as :  $D = \epsilon E$

but:  $P = \epsilon_0 \chi_e E$

$\therefore P = \chi_e \frac{D}{K}$

as:  $\chi_e = K - 1, \therefore P = \frac{K - 1}{K} D$

بأخذ تباعد الطرفين :

$\nabla \cdot P = \frac{K-1}{K} \nabla \cdot D,$

but  $\nabla \cdot P = -\rho_p,$  and  $\nabla \cdot D = \rho_f,$

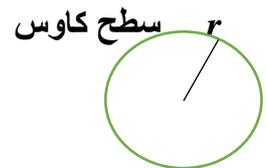
then:

$$\rho_p \text{ or } \rho_b = -\frac{(K - 1)}{K} \rho_f$$

ويمكن حل السؤال بطريقة اخرى :-

نأخذ شحنة نقطية  $q$  مغمورة في وسط عازل ثابت عزله  $K$  ونرسم سطح كاوس افتراضي نصف قطره  $r$  والشحنة  $q$  تكون بضمنه. ومن الصيغة التكاملية لقانون كاوس في العوازل:-

$$\oint_S D \cdot n da = q$$



$D \cdot S = q,$  then  $D \cdot 4\pi r^2 = q, \therefore D = \frac{q}{4\pi r^2} \dots \dots (1)$

but  $D = \epsilon E = K \epsilon_0 E \Rightarrow E = \frac{D}{K \epsilon_0} \dots \dots (2)$

نعوض (1) في (2) :

$$\therefore E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2 K} \dots \dots (3)$$

but :  $D = \epsilon_0 E + P$ , then  $P = D - \epsilon_0 E \dots \dots (4)$

نعوض (1) و(3) في (4) :

$$\therefore P = \frac{q}{4\pi r^2} - \epsilon_0 \frac{q}{4\pi \epsilon_0 K r^2} = \frac{q}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{1}{K}\right) = \frac{q}{4\pi r^2} \left(\frac{K-1}{K}\right)$$

$$\therefore P = D \left(\frac{K-1}{K}\right)$$

بأخذ تباعد الطرفين نحصل على:-

$$\begin{aligned} \nabla \cdot P &= \nabla \cdot D \left(\frac{K-1}{K}\right) & \text{but } \nabla \cdot P &= -\rho_p, \text{ and } \nabla \cdot D = \rho_f \\ \Rightarrow \rho_b &= -\frac{K-1}{K} \rho_f \end{aligned}$$

س3/ برهن العلاقة :-  $\int_V P dV = \int_V \rho_p r dV + \int_S \sigma_p r dS$  التي تربط بين الاستقطاب وكثافات الشحنة المقيدة  $\rho_p, \sigma_p$  لوسط عازل حجمه  $V$  وسطحه  $S$  حيث  $r$  متجه موقعي .

الجواب / من المتطابقة التالية:

$$\nabla \cdot XP = X \nabla \cdot P + P \cdot \nabla X \quad \text{but : } -\nabla \cdot P = \rho_p$$

$$\therefore \nabla \cdot XP = -X \rho_p + P \cdot \hat{i} \frac{dx}{dx} = -\rho_p X + P_x \dots \dots (1)$$

وبنفس الطريقة:-

$$\nabla \cdot yP = -\rho_p y + P_y \dots \dots (2), \quad \nabla \cdot zP = -\rho_p z + P_z \dots \dots (3)$$

as:  $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$

$$\therefore \nabla \cdot (\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)P = \nabla \cdot \vec{r}P = -\rho_p \vec{r} + P$$

وبأخذ التكامل الحجمي للطرفين :

$$\int_V \nabla \cdot (\vec{r}P) dV = \int_V -\rho_p \vec{r} dV + \int_V P dV$$

وباستخدام نظرية التباعد :-

$$\oint_S (rP) \cdot n da + \int_V \rho_P r dV = \int_V P dV$$

$$\oint rP \cdot n dS + \int_V \rho_P r dV = \int_V P dV$$

$$as: P \cdot n = \sigma_P, \quad \therefore \oint_S \sigma_P r dS + \int_V \rho_P r dV = \int_V P dV$$

س/4 مكعب من مادة عازلة طول ضاعه ( L ) ، فاذا كان الاستقطاب يعطى بالعلاقة :  $\vec{P} = A\vec{r}$  حيث A كمية ثابتة وان :  $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$  ونقطة الاصل للاحداثيات تقع في مركز المكعب . اوجد كثافات الشحنة المقيدة الحجمية والسطحية وبين ان الشحنة الكلية تساوي صفر.

الجواب /

$$\rho_P = -\nabla \cdot P = -\nabla \cdot (A\vec{r}) = -[A\nabla \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \nabla A],$$

$$as \nabla \cdot \vec{r} = 3 \text{ and } \nabla A = 0 \text{ (constant)}$$

$$\therefore \rho_P = -3A$$

$$\sigma_P = P \cdot n = A\vec{r} \cdot \vec{n} = Ar = A\frac{L}{2}$$

$$Q_{tot} = Q_{ts} + Q_{tv}$$

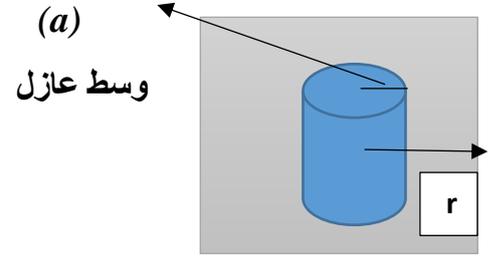
$$Q_{tot} = \int_V \rho_P dV + \int_A \sigma_P dS = -3AV + A\frac{L}{2}S$$

$$= -3AL^3 + A\frac{L}{2}(6L^2)$$

$$= -3AL^3 + 3AL^3 = 0$$

س5/ موصل اسطواني طويل جدا ( طولها  $L$  ) نصف قطره  $a$  يحمل شحنة قدرها  $\lambda$  لوحدة الطول في وسط عازل له سماحية ثابتة  $\epsilon$  ، جد المجال الكهربائي في نقطة  $r > a$  عن الاسطوانة .

الجواب / من الصيغة التكاملية لقانون كاوس في العوازل :



$$\oint D \cdot n \, da = Q$$

$$Q = \int \lambda d\ell = \lambda \int d\ell = \lambda L$$

$$S = \int dS \int n \cdot da = 2\pi r L$$

$$D \cdot 2\pi r L = \lambda L \Rightarrow D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$\text{but } D = \epsilon E \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}$$

س6/ مكعب عازل ضلعه  $(2\text{ cm})$  احدى زواياه في نقطة الاصل ، اوجد الشحنة الكلية للمكعب علما بأن المجال الكهربائي معطى بالعلاقة:  $\vec{E} = 6\hat{i}a^3E^4$  .

الجواب/

$$Q = \oint_S D \cdot n \, da = \oint_S \epsilon E \cdot n \, da = \epsilon \oint_S E \cdot n \, da$$

حسب نظرية التباعد :  $\epsilon \oint E \cdot n \, da = \epsilon \int \nabla \cdot E \, dV = Q$

$$\text{as: } \nabla \cdot E = \frac{dE_x}{dx} = \frac{d}{dx}(6\hat{i}a^3E^4) = 24\hat{i}a^3E^3$$

$$\therefore \epsilon \int 24\hat{i}a^3E^3 \, dV = 24\hat{i}a^3E^3\epsilon \int dV = 24\hat{i}a^3E^3\epsilon \int_0^2 dx \int_0^2 dy \int_0^2 dz = Q$$

$$\therefore Q = 24 * 8\hat{i}a^3E^3\epsilon = 192\hat{i}a^3E^3\epsilon$$

### ( 7 - 1 ) مقدمة :

تشبه المواد المغناطيسية العوازل في ان الشحنات الانفرادية او مجاميع من الشحنات يمكن ان تمتلك عزوم مغناطيسية وهذه العزوم عندما يتم ترتيبها بصورة مناسبة تولد محصلة عزم مغناطيسي في الاجسام العيانية عندئذ يقال عن مثل هذه الاجسام بانها ممغنطة.

في معظم الذرات تلغى العزوم المغناطيسية التي تعزى الى الحركة المدارية والحركة الدورانية للالكترونات واذا لم يتم هذا الالغاء عندئذ يقال عن هذه المادة بانها (بارامغناطيسية) وعندما نضع هذه المادة في مجال مغناطيسي فان ذراتها تتعرض الى عزم يجعلها تميل الى تنظيم مع المجال لكن الاضطراب الحراري يعمل على تدمير هذا التنظيم ، هذه الظاهرة مشابهة الى تنظيم الجزيئات القطبية في العوازل.

في المواد الدايمغناطيسية (ضعيفة النفاذية المغناطيسية ) تكون العزوم الاولية غير دائمة ولكنها تحت طبعا لقانون فاراداي للحث وبصورة عامة تعتبر جميع المواد دايمغناطيسية.

وهناك فرق مهم بين العوازل والمواد المغناطيسية ، ففي معظم العوازل يكون  $D$  متناسبا مع  $E$  وعليه يقال عن الوسط بانه خطي. بينما تعتبر المواد الفيرو مغناطيسية مواد لاخطية عالية ويعتمد سلوكها على قدمها لذا فان حسابات المجالات التي تتضمنها المواد المغناطيسية تعتمد على الفرض والتجربة بصورة كبيرة.

### ( 7 - 2 ) التمغنط ( M ) : The Magnetization

هو العزم المغناطيسي لوحدة الحجم عند نقطة معلومة ويعطى بالعلاقة .

$$M = Nm$$

حيث :  $m$  : عزم ثنائي القطب المغناطيسي لكل ذرة ،  $N$  : عدد الذرات لوحدة الحجم .

وذلك اذا كانت عزوم ثنائيات القطب الانفرادية في عنصر من الحجم تحت الدراسة منتظمة وبنفس الاتجاه .

يقاس  $M$  بالامبير لكل متر وهو يناظر الاستقطاب  $P$  في العوازل . اما اذا كانت الذرات غير منتظمة فان :-

$$M = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{dM}{dV}$$

ويعطى كثافة تيار التمغنط  $J_M$  بالعلاقة :

$$\nabla \times M = J_M$$

اي انها تساوي التفاف التمغنط .  $\nabla \times M$  تكافئ كثافة التيار الحقيقي الذي يولد القدر نفسه من المجال المغناطيسي الذي يولده التمغنط  $M$  .

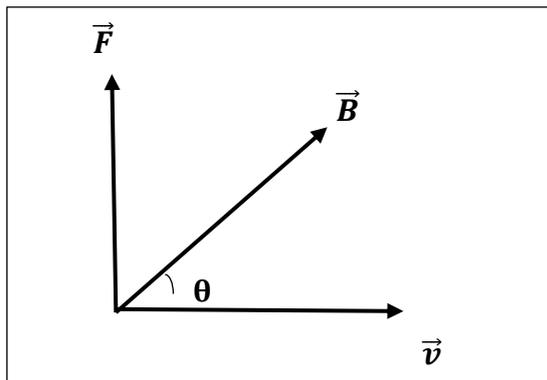
### ( 7 - 3 ) قوة لورنس :

لقد دلت التجارب العملية على انه عندما تتحرك شحنة كهربائية  $Q$  في مجال مغناطيسي الحث فيه  $B$  فان قوة ستوثر فيها فتجرفها عن اتجاهها وتحدد هذه القوة (القوة المغناطيسية) بالعلاقة المتجهة التالية :-

$$\vec{F}_m = Q(\vec{v} \times \vec{B})$$

حيث  $Q$  :- الشحنة الكهربائية وتعد هنا موجبة. و  $v$  : سرعتها ، و  $B$  : كثافة الفيض المغناطيسي.

ان القوة  $F$  عمودية على كل من  $v$  و  $B$  ويكون اتجاهها خاضعا لقاعدة اليد اليمنى حسب تعريف حاصل الضرب الاتجاهي بين متجهين فإذا فرضنا ان  $\theta$  هي الزاوية المحصورة بين المتجهين  $v$  و  $B$  فان :



$$F = QvB\sin\theta$$

ومن هذه العلاقة يكمننا قياس كثافة الفيض المغناطيسي  $B$  بشرط ان يكون المجال المغناطيسي الذي تولده الشحنة اثناء حركتها غير مؤثرة على مؤثرة المجال المغناطيسي الاصيلي الذي تتحرك فيه وعليه :-

$$B = \frac{F}{Qv\sin\theta}$$

وحدة قياس  $B$  هي  $\frac{\text{weber}}{m^2}$  حيث تعتبر weber وحدة قياس الفيض المغناطيسي في النظام العالمي للوحدات .

$$1 T = \frac{Wb}{m^2} (\text{تسلا}), \quad Wb = \frac{N}{A \cdot m}$$

وبما ان :  $\vec{v} \perp \vec{F}$  لذلك  $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$  وتكون القدرة المجهزة للجسم تساوي صفر وعلى هذا الاساس تعمل قوة لورنس على تغيير اتجاه  $v$  بدون ان تغير مقدارها .

### ( 7 - 4 ) القوة المؤثرة على الموصلات الحاملة للتيار .

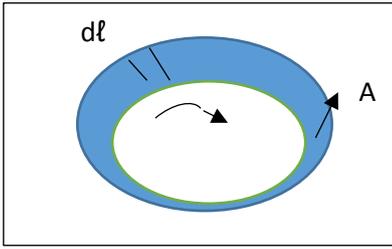
سنحاول ان نجد علاقة تعبر عن القوة المغناطيسية التي تؤثر في سلك موصل متناهي في الصفر طوله  $d\vec{\ell}$  يحمل تيار كهربائي مقداره  $I$  ونفرض ان جميع الشحنات الحرة ضمن السلك الموصل تتحرك بسرعة واحدة  $v$  ويحمل كل منها شحنة كهربائية  $Q$  . اذن القوة التي تؤثر على كل شحنة من هذه الشحنات المتواجدة ضمن العنصر  $d\vec{\ell}$  تساوي :-

$$\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B})$$

اذ يلاحظ ان  $B$  يمثل معدل كثافة الفيض المغناطيسي ضمن العنصر  $d\vec{\ell}$  وهكذا فان القوة الكلية المؤثرة في جميع الشحنات اي  $N$  من ناقلات الشحنة لوحة الحجم داخل العنصر  $d\vec{\ell}$  تساوي :

$$dF_m = NAd\ell q(\vec{v} \times \vec{B}) \dots \dots \dots (1)$$

حيث :  $A$  : مساحة المقطع العرضي .  $q$  : شحنة الناقل . ولما كان  $\vec{v}$  و  $d\vec{\ell}$  متوازيين وبنفس الاتجاه فان الصيغة البديلة لمعادلة (1)



$$dF_m = NAvq(d\vec{\ell} \times \vec{B})$$

وتمثل الكمية  $(NAvq)$  التيار الكلي  $I$  المار في السلك حيث :-

$$J_m = Nqv, \quad I = JA, \quad \rightarrow I = NqvA$$

$$dF_m = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$$

وهذه العلاقة تحدد القوة المؤثرة على عنصر التيار بالمقدار والاتجاه وتستخدم لحساب القوة الكلية  $F$  المؤثرة في دائرة مغلقة مثل  $(C)$  و عليه يكون :-

$$F_m = \oint_C I d\vec{\ell} \times \vec{B} \dots \dots \dots (2)$$

وضع التكامل مغلق لان التيار لا يمر الا اذا كانت الدائرة مغلقة. يمكن ان تكتب العلاقة الاخيرة (معادلة 2) بشكل اخر ، اذا فرضنا ان كثافة الفيض المغناطيسي تبقى ثابتة مع التيار ولا تعتمد على الموضع ينتج :-

$$F = \int dF = \oint I d\vec{\ell} \times \vec{B} = I \oint d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

$$F = I \left\{ \oint_C d\vec{\ell} \right\} \times \vec{B}$$

ان التكامل الموضح في المعادلة السابقة يمثل مجموع المتجهات المكونة للدائرة المغلقة فهي اذن تساوي صفر و عليه يكون :-

$$F = I \left[ \oint d\vec{\ell} \right] \times \vec{B} = 0$$

$B$  منتظمة. وهذا يعني ان محصلة القوة المؤثرة في دائرة مغلقة يمر بها تيار كهربائي مستمر في مجال مغناطيسي منتظم يساوي صفر .

اما اذا كان  $B$  غير منتظم فان هناك قوة مؤثرة على هذه الدائرة المغلقة ويكون هناك عزم يؤثر في الدائرة نفسها ويمكن حسابه من معرفة العزم التفاضلي :-

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F}$$

$$d\vec{\tau} = I \vec{r} \times (d\vec{\ell} \times \vec{B}) \Rightarrow \tau = I \oint \vec{r} \times (d\vec{\ell} \times \vec{B})$$

والسؤال الذي يطرح نفسه الان هو هل ان في جميع الحالات التيار يمر بسلك ؟

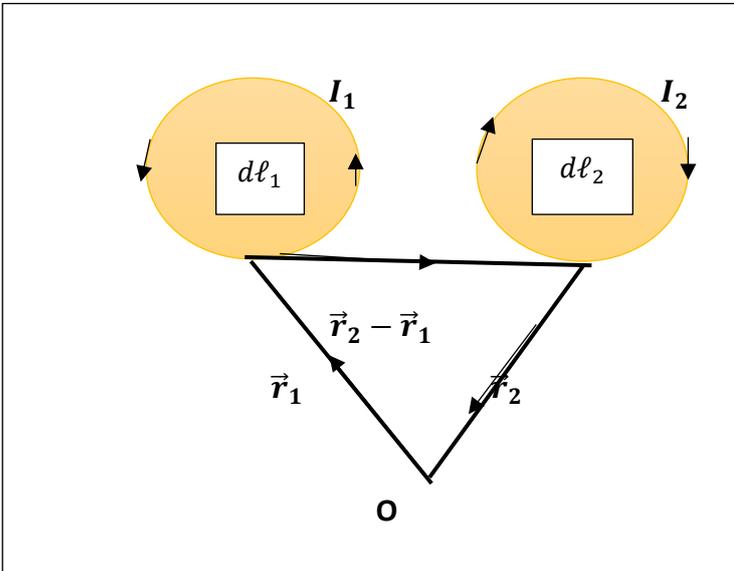
الجواب كلا ، احيانا يكون لدينا وسط مادي له حجم معين وتوجد هناك تيارات خارجة خارجة في هذه الحالة تستبدل الكمية  $I d\vec{\ell}$  وتصبح

$(Jsd\ell = JdV)$  وعليه تصبح كل مسالة حسب نوعها اي ان :- في الاسلاك نعوض  $I d\vec{\ell}$  وفي الاوساط الممتدة نعوض  $JdV$  وعليه تصبح العلاقة للاوساط الممتدة :

$$dF = JxBdV$$

**( 5 – 7 ) قانون بايوت – سافارت Biot- Savart Law**

اكتشف اورستد بأن التيارات الكهربائية تولد مجالات مغناطيسية بعدها باسابيع اثبتت التجارب التي قام بها امبير بأن القوة المغناطيسية بين دائرتين مغلقتين تحمل كل منهما تيارا كهربائيا تعتمد على الشكل الهندسي لكل منهما والمسافة الفاصلة بينهما ، كما تعتمد على التيار الذي يمر بكل منهما . ان مقدار القوة المتبادلة بين الدائرتين (بين مصدرين) يسمى قانون بايوت – سافارت .



نفرض ان  $dl_1$  و  $dl_2$  هما شرح صغير من دائرتين (1) و(2)

$I_1$ : التيار المار في الدائرة الاولى.

$I_2$ : التيار المار في الدائرة الثانية.

فالقوة المتبادلة بين الدائرتين هي :-

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{\ell}_2 \times [d\vec{\ell}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \dots \dots \dots (3)$$

Or

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 I_1 \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{\ell}_1 \times [d\vec{\ell}_2 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = -\vec{F}_{12}$$

حيث  $\vec{F}_{12}$  :- هي القوة التي تؤثر بها الدائرة الكهربائية الاولى على الثانية او هي المؤثرة على الدائرة الثانية نتيجة وجود الدائرة الاولى. والكمية  $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$  يمثل متجه موضع للعنصر  $d\vec{\ell}_1$  بالنسبة لموقع  $d\vec{\ell}_2$  .

والكمية :  $\frac{\mu_0}{4\pi}$  تساوي  $10^{-7} \frac{N}{amp^2}$  ووضعت لتعديل الوحدات .

نلاحظ ان الدائرة الاولى تؤثر على الدائرة الثانية وكذلك الدائرة الثانية تؤثر على الاولى بقوة لها نفس المقدار ولكن بعكس الاتجاه وذلك حسب قانون نيوتن الثالث اي ان :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

ولحساب القوة الكلية المؤثرة في اي من الدائرتين في اي من الدائرتين لابد من ان نأخذ بنظر الاعتبار المجموع الاتجاهي لكل القوة المؤثرة على العناصر التي تتألف منها تلك الدائرة ، فالقوة الكلية المؤثرة في الدائرة الاولى تكتب بالشكل :-

$$\vec{F}_1 = \oint_{C_1} d\vec{F}_1 = I_1 d\vec{\ell}_1 \times \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{I_2 d\vec{\ell}_2 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \right\}$$

والتي تمثل القوة الخارجية المؤثرة في عنصر التيار  $I_1 d\vec{\ell}_1$  وبعد مقارنة المعدلتين (2) و(3) نجد ان :

$$d\vec{F} = I(d\vec{\ell} \times B) , \quad or \quad \vec{F} = I \oint d\vec{\ell} \times B$$

لذلك فان :

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_2 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

وهذه المعادلة تمثل قانون بايوت - سافارت . حيث :-  $\vec{B}_2$  تمثل كثافة الفيض المغناطيسي في اي نقطة قريبة من دائرة مغلقة تحمل تيارا كهربائيا والدائرة هنا هي الدائرة الثانية. وقد تكتب المعادلة بالصيغة التفاضلية:-

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{\ell} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{4\pi |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

حيث تمثل  $d\vec{B}$  كثافة الفيض المغناطيسي المتولد في نقطة واقعة على بعد  $(r)$  من عنصر  $I d\vec{\ell}$  وينبغي ان لا يغيب عن الازهان ان اتجاه  $d\vec{B}$  خاضع لقاعدة اليد اليمنى وهو عمودي على المستوي الذي يضم كل من المتجهين  $\vec{r}, d\vec{\ell}$  وتكون  $B_2$  دالة لـ  $r_2$  اي ان  $r_1$  ثابت . اما اذا كان لدينا وسط ممتد وليس سلك ، فيمكن التعبير عن الحث المغناطيسي بدلالة كثافة التيار  $J$  حيث نستبدل  $I d\vec{\ell}$  بـ  $J dV$  .

$$B(r_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(r_1) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) dV_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

في المعادلة  $d\vec{F} = I(d\vec{\ell} \times B)$  نجد ان :-

$$\vec{F}_2 = I_2 \oint d\vec{\ell}_2 \times B$$

$$B(r_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int \frac{d\ell_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

ولو اخذنا تباعد الطرفين نجد ان  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  وهي احدى معادلات ماكسويل وتشير الى حقيقة عدم امكانية وجود اقطاب مغناطيسية معزولة.

### ( 6 - 7 ) قانون امبير الدائري :-

اذا اخذنا التفاف المجال  $\vec{B}$  نحصل على الصيغة التفاضلية لقانون امبير في الفراغ ( وهي احدى معادلات ماكسويل ) .

$$\nabla \times \vec{B}(r_2) = \mu_0 J_F(r_2)$$

وهذه المعادلة للاوساط غير المغناطيسية . حيث  $J_F$  تمثل كثافة التيار الحقيقي.

لو كان لدينا منطقة فيها مجال مغناطيسي ، تاخذ التكامل ضمن هذه المنطقة فنحصل على :

$$\oint \nabla \times \vec{B} \cdot n da = \mu_0 \oint J \cdot n da$$

$$\oint \nabla \times \vec{B} \cdot ds = \mu_0 \oint J \cdot ds$$

نحول التكامل السطحي الى تكامل خطي حسب نظرية ستوكس :

$$\oint \nabla \times \vec{B} \cdot ds = \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \oint J \cdot ds$$

$$\therefore \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \oint J \cdot ds$$

$$\text{but } \oint J \cdot ds = I, \quad \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

وهي الصيغة التكاملية لقانون امبير للدوائر الكهربائية . وينص هذا القانون على ان: مجموع المركبات المماسية للحدث المغناطيسي حول مسار مغلق يساوي النفاذية المغناطيسية ( magnetic permeability ) في الهواء  $\mu_0$  مضروب في التيار الكلي  $I$  خلال المسار. يعتبر قانون امبير الدائري هو نظير قانون كاوس في الكهربائية المستقرة .

### Equations of Field : معادلات المجال ( 7 - 7 )

قد تولد مادة معينة مثل الحديد مجال مغناطيسي سواء لكونها ممغنطة او لانها تحمل تيار حقيقي وسنرى مساهمة مادة ممغنطة  $J_M$  في تكوين المجال المغناطيسي على معادلات المجال للتيارات .

في حالة وجود مادة مغناطيسية يضاف الحد  $J_M$  الى المعادلة اي ان :-

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (J_F + J_M) \dots \dots \dots (1)$$

حيث  $J_M$  : هي كثافة تيار التمغنط و  $J_F$  : كثافة التيار الحقيقي ( الاصلي ) .

$$\text{but: } \vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} \dots \dots \dots (2)$$

وبتعويض (2) في (1) نحصل على :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (J_F + \vec{\nabla} \times \vec{M}) = \mu_0 J_F + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M} = \mu_0 J_F$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 J_F \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = J_F$$

$$\text{but : } \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = J_F \dots \dots \dots (3)$$

تسمى  $H$  شدة المجال المغناطيسي ووحداتها نفس وحدة التمغنط amp/m وهو متجه مغناطيسي مساعد وجد لحل مشاكل التكامل لمسائل الحث المغناطيسي . وفي الفراغ تكون المعادلة :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}, \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

ان معادلة (3) تثبت ان المتجه المغناطيسي المساعد  $H$  يرتبط بكثافة التيار الحقيقي  $J_F$  من خلال التفافه وهذه الحالة تشبه الحالة الكهروستاتيكية حيث يكون المتجه المساعد  $D$  يرتبط بكثافة الشحنة الحرة من خلال تباعد الازاحة. بأخذ التكامل السطحي لمعادلة (3) :

$$\oint_S \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot \hat{n} da = \oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} da$$

وباستخدام نظرية ستوكس نحول الطرف الايسر من المعادلة الى تكامل خطي :

$$\oint_S \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot \hat{n} da = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\therefore \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} da, \text{ but: } \oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} da = I$$

$$\therefore \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I$$

والمعادلة الاخيرة تشير الى ان التكامل الخطي للمركبة المماسية لشدة المجال المغناطيسي حول مسار مغلق (  $C$  ) يساوي التيار الكلي الذي ينتقل خلال المساحة المحاطة بالمنحني المغلق  $C$  .

### ( 7 - 8 ) الفيض المغناطيسي : *Magnetic Flux*

لو كان لدينا سطح مغلق ويوجد فيه مجال مغناطيسي  $B$  اي وجود فيض مغناطيسي اي ان :-

$$\phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

وهي مجموع المركبات العمودية لـ  $B$  باتجاه  $S$ .

وباستخدام نظرية التباعد يصبح لدينا :

$$\oint \vec{B} \cdot \hat{n} da = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = \phi$$

$$\text{but : } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \phi = 0$$

اي ان الفيض المغناطيسي خلال اي سطح مغلق يساوي صفر ومعنى ذلك ان اي مجال مغناطيسي يدخل فانه يخرج ولا يبقى منه شئ .

### ( 7 - 9 ) الحث الكهرومغناطيسي : *Electromagnetic Induction*

لقد وجد تاثير للفيض المغناطيسي في تجارب فاراداي حيث لاحظ هو والعالم هنري توليد ق . د . ك محتثة نتيجة تغير الفيض المغناطيسي مع الزمن وهذا التغير يحدث في العمليات التالية :-

- 1- قد تكون الدائرة متحركة في مجال مغناطيسي غير منظم .
- 2- قد تكون الدائرة متحركة باستمرار.
- 3- قد يكون المجال متغير مع الزمن.

ان التغير الحاصل في الفيض المغناطيسي خلال دائرة كهربائية يكون مصحوب بتوليد ق . د . ك محتثة ضمن هذه الدائرة تعطى بالعلاقة :

$$\varepsilon = - \frac{d\phi}{dt}$$

وتسمى هذه العلاقة بقانون فاراداي في الحث الكهرومغناطيسي وهو قانون تجريبي . وظهور الاشارة السالبة تعني ان القوة الدافعة الكهربائية المحتثة تكون بالاتجاه الذي يعمل على معاكسة التغير الذي تسبب في توليدها او ان التغير في الفيض المغناطيسي يولد تأثير يقاوم المسبب للتغيير ( حسب قانون لنز ).

عند تقريب القطب الشمالي لمغناطيس في ملف بصورة عمودية يؤدي الى تولد تيار يقاوم هذا التغيير.

$$\phi = \oint B \cdot dS, \Rightarrow \varepsilon = - \frac{d}{dt} \oint B \cdot dS$$

اذا كانت الدائرة متماسكة وثابتة في موضعها. اما اذا كانت  $B$  دالة للموضع والزمن معا ، يتحول من تفاضل كلي الى جزئي :

$$\varepsilon = - \oint \frac{\partial}{\partial t} B \cdot dS = \oint E \cdot dS$$

$$\oint E \cdot dS = - \oint \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$$

باستخدام نظرية ستوكس نحصل على :-

$$\oint_S \vec{\nabla} \times \vec{S} \cdot dS = - \oint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot dS$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

وهي الصيغة التفاضلية لقانون فاراداي في الاوساط غير المتحركة وللمتحركة تكون المعالجة اصعب .

**( 7 - 10 ) التاثريّة المغناطيسية والنفاذية المغناطيسية :**

### **Magnetic Susceptibility and magnetic Permeability**

ان العلاقة بين  $M$  وأحد متجهات المجال المغناطيسي  $H$  تعتمد على طبيعة المادة المغناطيسية . وتكون العلاقة علاقة خطية تقريبا لصنف واسع من المواد . فأذا كانت المادة متساوية الاتجاه ( اي ان  $H, M$  بنفس الاتجاه ) وخطية فأن

$$M = \chi_m H$$

حيث  $\chi_m$  هي التاثريّة المغناطيسية *magnetic susceptibility* او قابلية التمتع وهي خالية من الوحدات .

اذا كانت  $\chi_m > 0$  اي موجبة تسمى المادة بارامغناطيسية ووجودها يؤدي الى تقوية الحث المغناطيسي . اما اذا كانت  $\chi_m < 0$  اي سالبة تسمى المادة دايامغناطيسية ووجودها يؤدي الى ضعف الحث المغناطيسي . وفي الفراغ  $\chi_m = 0$

ان العلاقة الخطية بين  $H, M$  تدل ضمنا على العلاقة بين  $B, H$  وهي علاقة خطية ايضا :

$$B = \mu H \dots \dots (1)$$

حيث  $\mu$  هي النفاذية المغناطيسية *magnetic permeability* ولايجاد قيمتها نتبع الخطوات الاتية:-

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M \rightarrow H + M = \frac{B}{\mu_0}, \therefore B = \mu_0(H + M) = \mu_0(H + \chi_m H) \\ = \mu_0(1 + \chi_m)H \dots \dots (2)$$

$$\therefore \mu = \mu_0(1 + \chi_m)$$

في الفراغ :-  $\mu = \mu_0$  then  $\chi_m = 0$  لذلك النفاذية المغناطيسية النسبية :-  $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$  وهي خالية من الوحدات.

عندما  $K_m$  اقل من الواحد للمواد البارامغناطيسية ولكن تعتمد على معكوس درجة الحرارة المطلقة .

عندما تكون  $K_m$  اقل من الواحد للمواد الدايمغناطيسية ولكن تعتمد على درجة الحرارة.

عندما تكون  $K_m$  اكبر من الواحد للمواد الفيرومغناطيسية والتي تشكل نوع من المواد المغناطيسية تتميز بقدرتها على اكتساب تمغظ دائمى وبتاثرها الشديد على الحث المغناطيسي. ان المواد الفيرومغناطيسية ليست خطية ولهذا السبب لا يصح تطبيق المعادلتين:

$$M = \chi_m H, \text{ and } B = \mu H$$

والذي يكون فيها  $M$  و  $\chi_m$  ثابتين .

### ( 7 – 11 ) كثافة الطاقة المغناطيسية :- *Magnetic Energy Density*

$$W_B = \frac{1}{2} \int_V H \cdot B \, dV$$

تشبه هذه المعادلة صيغة الطاقة الكهروستاتيكية :  $W = \frac{1}{2} \int_V D \cdot E \, dV$  . اي ان الطاقة المغناطيسية موزعة بكثافة قدرها :  $(\frac{1}{2} (H \cdot B))$

$$W_B = \frac{dW_B}{dV} = \frac{1}{2} H \cdot B, \text{ but } B = \mu H \text{ then: } W_B = \frac{1}{2} \mu H^2$$

وهذه المعادلة تخص الاوساط المادية ذات الخواص الخطية المتساوية الخواص في كل الاتجاهات . وفي الفراغ :

$$W_B = \frac{1}{2} \mu_0 H^2$$

### ( 7 – 12 ) تعميم قانون امبير وتيار الازاحة :-

#### *Generalization of Amperes law and Displacement current*

من قانون امبير:

$$\nabla \times H = J \quad \text{and} \quad \nabla \cdot \nabla \times H = \nabla \cdot J,$$

$$\therefore \nabla \cdot \nabla \times H = 0, \quad \nabla \cdot J = 0 \dots \dots (1)$$

ولكن تباعد التفاف اي قيمة = صفر

ولكن من معادلة الاستمرارية :-

$$\nabla \cdot J = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \dots \dots (2)$$

ونتيجة لهذا التناقض او الاختلاف بين المعادلتين (1) و(2) اضاف ماكسويل تيار اخر هو تيار الازاحة والذي يعطى بالمعادلة :

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\therefore \nabla \cdot \nabla \times H = \nabla \cdot J + \nabla \cdot J_d$$

$$\therefore \nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

وهي احدى معادلات ماكسويل ، ان ادخال الحد الثاني من الطرف الايمن يطلق عليه تيار الازاحة يمثل احدى الاضافات التي اضافها ماكسويل للنظرية الكهرومغناطيسية . اي ان المجال المغناطيسي لا ينشأ عن وجود تيار التوصيل الاعتيادي وانما ينشأ عن وجود مجال كهربائي متغير كما هو الحال في تغير المجال الكهربائي بين لوحين متسعة في حالة شحنها او تفريغها .

### ( 7 – 13 ) معادلات ماكسويل : Maxwell Equations

من المعلوم ان مجال مغناطيسي متغير يولد ق . د . ك محتثة او مايسمى بالحث الكهرومغناطيسي وان تغير المجال الكهربائي يولد مجال مغناطيسي ، ومن هذه المبادئ تمكن ماكسويل من وضع فروض نظريته ومعادلات هي خلاصة الدراسات التي قام بها كاوس وفاراداي وامبير والتي تعد من الانجازات العلمية الكبيرة لكونه الاساس الذي تعمل بموجبه الاجهزة الكهرومغناطيسية مثل المحركات واجهزة البث والحاسبات

1- عندما تكون المجالات متغيرة مع الزمن اي ان :  $B=B(t)$  ,  $E=E(t)$  تكون معادلات ماكسويل كالاتي :

الصيغة التفاضلية	الصيغة التكاملية
1) $\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$	$\oint H \cdot d\ell = \oint_s \left( J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot ds$
2) $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	$\oint E \cdot d\ell = \oint_s -\left( \frac{\partial B}{\partial t} \right) \cdot ds$
3) $\nabla \cdot D = \rho$	$\int_s D \cdot dS = \int_v \rho dV$
4) $\nabla \cdot B = 0$	$\oint_s B \cdot dS = 0$

المعادلة الاولى تمثل قانون امبير والمعادلة الثانية تعبر عن قانون فاراداي والمعادلة الثالثة تمثل قانون كاوس والمعادلة الرابعة هي تعبير عن عدم وجود قطب مغناطيسي واحد .

اما في حالة كون المجالات ثابتة وغير متغيرة مع الزمن مثل  $B \neq B(t)$  ,  $E \neq E(t)$  فان المعادلات رقم (1) و (2) ستصبح :

$$\nabla \times H = 0 \quad \text{and} \quad \nabla \times E = 0$$

2- معادلات ماكسويل في الفراغ حيث  $J = 0$  ,  $\rho = 0$  تعطى بالشكل الاتي:

الصيغة التفاضلية	الصيغة التكاملية
1) $\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}$	$\oint H \cdot d\ell = \int_s \left( \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot ds$
2) $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	$\oint E \cdot d\ell = \int_s -\left( \frac{\partial B}{\partial t} \right) \cdot ds$
3) $\nabla \cdot D = 0$	$\int_s D \cdot dS = 0$
4) $\nabla \cdot B = 0$	$\oint_s B \cdot dS = 0$

### ( 7 – 14 ) الموجة الكهرو مغناطيسية : Electromagnetic Wave

تعتمد نظرية ماكسويل على مبدئين اساسيين :

- 1- المجال الكهربائي المتغير مع الزمن في الفضاء ينتج مجال مغناطيسي عمودي عليه ومتفق معه في الطور.
- 2- المجال المغناطيسي المتغير مع الزمن في الفضاء ينتج مجال كهربائي يكون ايضا عمودي عليه وبنفس الطور.

وبناء على هذين المبدئين فان المجالين الكهربائي والمغناطيسي ينتشران في الفضاء من نقطة الى اخرى وهما متلائمان ومتفقان بالطور وعموديان على خط انتشارهما مكونان مايسمى بالموجة الكهرومغناطيسية . كما توصل ماكسويل الى ان سرعة انتشار الموجات الكهرومغناطيسية في الفراغ تساوي سرعة انتشار الضوء (  $3 \times 10^8 m/sec$  ) ، كما تتوزع طاقة الموجة الكهرومغناطيسية المنتشرة في الفراغ بصورة متساوية بين المجالين الكهربائي والمغناطيسي. اما في الاوساط المادية فسرعة انتقال الموجة الكهرومغناطيسية تعتمد على الخواص الكهربائية والمغناطيسية لذلك الوسط.

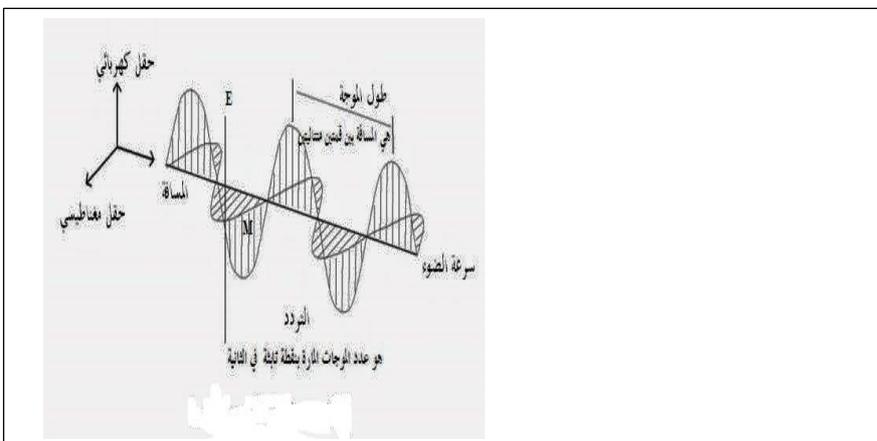
$$E = \hat{i}E_0 e^{i(\omega t + kz)} \quad (x - direction)$$

$$H = \hat{j}H_0 e^{i(\omega t + kz)} \quad (y - direction)$$

وعليه يكون انتشار الموجة باتجاه  $-z$  .

ومن اهم تطبيقات معادلات ماكسويل هو

استخدامها في اشتقاق معادلة الموجة



اشتقاق معادلة الموجة العامة :-

اولا : بدلالة المجال الكهربائي (E) :-

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

بأخذ الالتفاف للطرفين :

$$\nabla \times \nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times B = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times H$$

$$\nabla \times \nabla \times E == \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E \quad \text{من المتطابقة (حفظ)}$$

$$\text{as: } \nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\therefore \nabla \cdot (\nabla \cdot E) - \nabla^2 E = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( J + \frac{\partial D}{\partial t} \right)$$

$$\text{but : } J = gE, \text{ and } D = \epsilon E$$

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot E) - \nabla^2 E = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( gE + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) = -\mu g \frac{\partial E}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

وعند تطبيق هذه المعادلة على فضاء شحنته طليقة حرة بحيث  $\nabla \cdot D = 0$  نحصل على فضاء خالي من الشحنات

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0,$$

$$\rho = 0$$

$$-\nabla^2 E = -\mu g \frac{\partial E}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 E - \mu g \frac{\partial E}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

اشتقاق معادلة الموجة في الفراغ :-

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

بأخذ الالتفاف للطرفين :

$$\nabla \times \nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times B = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times H$$

$$\nabla \times \nabla \times E == \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E \quad \text{من المتطابقة (حفظ)}$$

$$\text{as: } \nabla \times B = \mu_0 \frac{\partial D}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\therefore \nabla \times \nabla \times E - \nabla^2 E = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \quad \text{but: } \nabla \cdot E = 0$$

$$\nabla^2 E = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\therefore \nabla^2 E - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

وهي معادلة الموجة التفاضلية في الفراغ.

$$\text{also: } \nabla^2 B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}, \quad \text{and } \frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0 \quad \text{therefore } \nabla^2 E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

مثلا اذا اعطي لك المجال بدلالة العلاقة :-

$$E(r, t) = E_0 e^{-i\omega t}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = E_0 e^{-i\omega t} (-i\omega) = -i\omega E, \quad \text{and } \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = E_0 e^{-i\omega t} (i\omega)^2 = -\omega^2 E$$

وعليه تصبح المعادلة العامة :- بعد تعويض الاشتقاقات اعلاه في المعادلة العامة.

$$\nabla^2 E - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \quad \text{therefore } (\nabla^2 E_0 + i g \mu \omega E_0 + \omega^2 \epsilon \mu E_0) e^{-i\omega t} = 0$$

$$\therefore (\nabla^2 E_0 + i g \mu \omega E_0 + \omega^2 \epsilon \mu E_0) = 0$$

مثال/ اذا كان المجال الكهربائي معطى بالعلاقة الاتية :  $E = E_s e^{+i\omega t}$  باتجاه محور  $z$  اوجد معادلة الموجة في الفراغ.

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

الحل / من معادلة الموجة في الفراغ بدلالة المجال الكهربائي:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = i\omega E_s e^{i\omega t}, \quad \text{and } \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega^2 E_s e^{i\omega t}$$

$$\therefore \frac{d^2 E}{dz^2} = \frac{-\omega^2}{c^2} E_s e^{i\omega t}$$

**The Properties Of Electromagnetic Wave : ( 7 – 15 )**

- 1- تنتقل الموجة الكهرومغناطيسية في الفراغ بسرعة الضوء اما في الاوساط المادية فتعتمد على الخواص الكهربائية والمغناطيسية لذلك الوسط.
  - 2- المجالان الكهربائي والمغناطيسي يتذبذبان بطور واحد وبصورة عمودية على بعضهما في الفضاء وعموديان على خط انتشارهما.
  - 3- طاقة الموجة الكهرومغناطيسية تتوزع بين المجالين الكهربائي والكهرومغناطيسي بصورة متساوية.
  - 4- عند اصطدامهما بمادة قد تتحول الى طاقة ( حرارية ، كهربائية او ميكانيكية ..... الخ )
  - 5- للطاقة مظاهر متعددة ( ضوئية ، حرارية ، وهذا ناتج عن اختلافها بالتردد او الطول الموجي )
- ان مدى اطوالها يمتد من الموجات ذات الاطوال الموجية الاطول (الموجات الراديوية) الى الموجات ذات الطول الموجي الاقصر ( موجات كاما ) .

↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
الموجات اشعة كاما	الموجات	الاشعة	الضوء المرئي	الاشعة	الاشعة السينية	
الراديوية	المايكروية	تحت الحمراء (IR)	visible light	فوق البنفسجية ( UV )	X-Ray	
$\gamma - ray$						

س / اثبت ان تباعد متجه كثافة الفيض المغناطيسي يساوي صفر (  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  ) ، او هل للمغناطيس قطب واحد ؟ اثبت ذلك رياضيا .  
الحل /

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J(\mathbf{r}_1) \mathbf{X}(\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1)}{|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1|^3} dV_1$$

بأخذ التباعد للطرفين :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \left[ \frac{J(\mathbf{r}_1) \mathbf{X}(\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1)}{|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1|^3} \right] dV_1$$

حسب الفرضية:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B}, \text{ as: } \vec{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) = \mathbf{A} \text{ and } \frac{\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1}{|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1|^3} = \mathbf{B}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{J}}(\mathbf{r}_1) \mathbf{X} \frac{\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1}{|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1|^3} = \frac{\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1}{|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1|^3} \cdot \vec{\nabla} \mathbf{X} \vec{\mathbf{J}}(\mathbf{r}_1) - \vec{\mathbf{J}}(\mathbf{r}_1) \cdot \vec{\nabla} \mathbf{X} \frac{\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1}{|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1|^3}$$

ولكن  $\vec{\nabla} \mathbf{X} \vec{\mathbf{J}}(\mathbf{r}_1) = 0$  لان  $\nabla$  توخذ الى  $r_2$  وليس الى  $r_1$  اذن ثابتة ومشتقة الثابت صفر وكذلك :-

$$\vec{\nabla} \mathbf{X} \frac{\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1}{|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1|^3} = 0 \text{ as we proved before that } \nabla \mathbf{X} \frac{\vec{\mathbf{r}}}{|\vec{\mathbf{r}}|^3} = 0$$

تم اثباته في الفصل الاول اذن :-

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

هذا يعني انه لا يوجد مصدر منفرد للمغناطيسية ، اي عدم وجود قطب شمالي منفرد او جنوبي ، فاذا وجد احدهما وجد الاخر ذاتيا.

### (6 - 1) مقدمة :

في الفصل الثاني كنا نتعامل مع الشحنات الساكنة ولكن هنا سنتعامل مع الشحنات المتحركة ، هذا يعني اننا سنتعامل مع المواد الموصلة للكهربائية ذلك ان الموصل هو الجسم الذي تكون فيه ناقلات الشحنة طليقة الحركة وهذا التعريف لا يتضمن الموصلات كالمعادن والسبائك فقط وانما ايضا اشباه الموصلات والمحاليل الالكتروليتيية والغازات المتأينة والعوامل غير التامة (imperfect) . ان الشحنة المتحركة تولد تيارا وعملية نقل الشحنة تدعى بالتوصيل (Conduction) وبتعبير ادق يعرف التيار على انه: المعدل الزمني لأنتقال الشحنة عبر نقطة معينة في منظومة موصلة.

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (1 \text{ amper} = \frac{\text{coul}}{\text{sec}})$$

### (6 - 2) طبيعة التيار : Nature of the Current

- 1- ينتقل التيار في المعادن بواسطة الالكترونات بينما الايونات الموجبة الثقيلة تبقى مثبتة عند مواضع منتظمة في التركيب البلوري.
- 2- في المحاليل الالكتروليتيية ينتقل التيار بواسطة الايونات الموجبة والسالبة معا ولكن عملية التوصيل بأحد النوعين من الايونات هي التي تكون متغلبة ويعود السبب في ذلك الى ان قسم من الايونات تتحرك بسرعة اكبر من الايونات الاخرى.
- 3- في انبوبة التفريغ ينتقل التيار بواسطة الالكترونات والايونات الموجبة معا ومع ذلك فان الالكترونات تعد هي المسؤولة من الناحية العملية عن تكوين التيار باجمعه وذلك لأن قدرة الالكترونات على التحرك السريع تفوق كثيرا قدرة الايونات الثقيلة نسبيا.

ان التيارات التي سبق وصفها تسمى تيارات التوصيل ( conduction currents ) هذه التيارات تمثل الحركة الانتقالية لناقلات الشحنة خلال الوسط اما الوسط نفسه فيكون ساكنا . وقد يحدث في الغازات والسوائل حركة هيدروداينميكية ( hydrodynamic motion ) وقد ينتج عنها تيارات في حالة احتواء الوسط على كثافة شحنية والتيارات من هذا النوع تنشأ عن الانتقال الكتلي ، تدعى بتيارات الحمل ( convection currents ) .

مثلا :- تتجه تيارات الحمل الى الاعلى خلال الزوايح الرعدية وتكون لاحداث انحدار طبيعي في الجهد في الطبقة الجوية فوق سطح الارض وتيارات الحمل ليست متعادلة كهروستاتيكية.

### (6 - 3) كثافة التيار لوحد المساحة ومعادلة الاستمرارية.

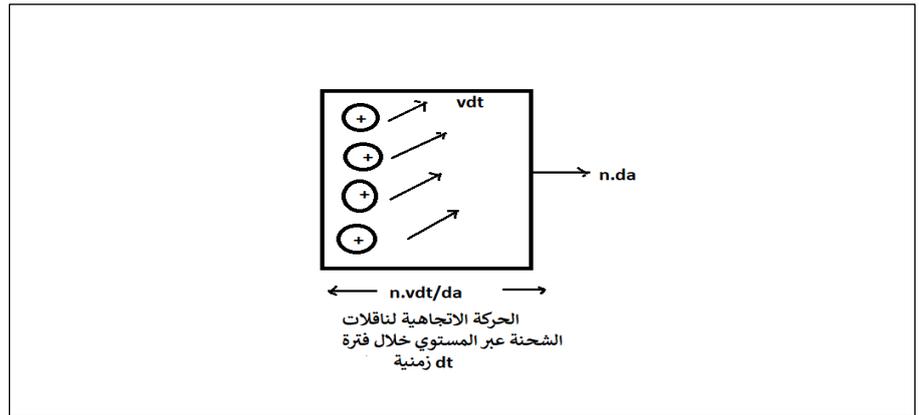
#### Current density and Equation of continuity

لناخذ وسط موصل يمتلك نوع واحد من ناقلات الشحنة التي تحمل شحنة  $q$  وسنرمز بالرمز  $N$  لعدد الناقلات لوحد الحجم ونفرض ان جميع الناقلات ذات سرعة انجراف واحدة  $v$  وعليه يمكننا ان نحسب التيار خلال عنصر المساحة  $da$  خلال فترة زمنية  $dt$  نجد ان كل شحنة تتحرك مسافة قدرها  $vdt$  وان الشحنة  $dQ$  التي تجتاز المساحة  $da$  خلال الفترة الزمنية  $dt$  تساوي  $q$  مضروبة في مجموع كل الناقلات التي يحويها الحجم اي ان :-

$$dQ = qN\vec{v}dt \cdot \vec{n}da$$

حيث  $\vec{n}$  وحدة المتجه العمودي على المساحة  $da$  .

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{qN\vec{v}dt \cdot \vec{n}da}{dt} \rightarrow \therefore I = Nq\vec{v} \cdot \vec{n}da$$



فإذا كان الوسط يحوي على أكثر من نوع واحد من ناقلات الشحنة فإن كل نوع سيساهم في تكوين التيار وفق المعادلة اعلاه . وبصورة عامة ستؤول الصيغة المعبرة عن التيار المار خلال المساحة da الى :-

$$dI = \left[ \sum N_i q_i \vec{v}_i \right] \cdot n da \dots \dots \dots (1)$$

وعلامة الجمع تمثل كل الانواع المختلفة من الناقلات. والكمية المحصورة بين القوسين كمية متجهة لها ابعاد التيار لوحد المساحة . هذه الكمية تدعى كثافة التيار current density ويرمز لها  $J = \frac{dI}{da}$  ووحداتها ( amp/m<sup>2</sup> ) .

كثافة التيار لوحد المساحة عند كل نقطة من نقاط الوسط الموصل :

$$J = \sum N_i q_i v_i$$

نعوض قيمة J في معادلة (1) :

$$\therefore dI = \vec{J} \cdot \vec{n} da$$

وعليه تعطى قيمة التيار المار خلال سطح S بالمعادلة :

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} da \dots \dots \dots (2)$$

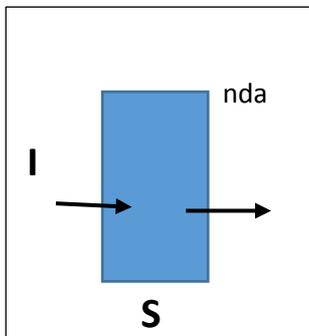
ترتبط كثافة التيار J وكثافة الشحنة ρ بمعادلة الاستمرارية واصل هذه المعادلة مستمد من حقيقة ان الشحنة محفوظة لا تفنى ولا تستحدث ولغرض اشتقاق معادلة الاستمرارية نتبع مايلي:-

لوطبقنا معادلة (2) على سطح كفي مغلق S لاعلى التعيين فالتيار الكهربائي الذي يدخل الحجم V المحاط بالسطح S يعطى بالعلاقة:-

$$I = - \oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} da \dots \dots \dots (3)$$

الإشارة السالبة تعني ان التيار يدخل ويخرج داخل الحجم وان العمود على السطح (  $\vec{n}$  ) يكون بالاتجاه المعاكس .  
 $\vec{n}$  :- يمثل العمود الخارج من السطح ، واننا نرغب في جعل التيار موجب عندما ينساب بالاتجاه المعاكس من خارج الحجم  $V$  الى الداخل .

نحول معادلة (3) من تكامل سطحي الى حجمي حسب نظرية التباعد :



$$I = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV \dots \dots \dots (4)$$

وعند نقل الشحنة الى داخل الحجم :

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \dots \dots \dots (5)$$

بما ان الحجم ثابت القيمة تؤخذ المشتقة لكثافة الشحنة الحجمية  $\rho$  فقط وبما انها دالة لـ (x,y,z,t) وعليه تم اخذ المشتقة الجزئية للزمن فقط لان الحجم ثابت والمتغير هو الزمن فقط.  
 وبتعويض معادلة (5) في معادلة (4) نحصل على :-

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV \Rightarrow \int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right) dV = 0$$

حتى تصبح المعادلة صحيحة لاي جزء كفي في الوسط يجب ان تتلاشى الكمية المطلوب تكاملها عند كل نقطة من نقاط ذلك الجزء الحجمي وبما ان  $dV \neq 0$  اذن :-

$$\therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \dots \dots \dots (6) \quad \text{or} \quad - \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

وتسمى هذه المعادلة معادلة الاستمرارية او معادلة حفظ الشحنة حيث  $\rho$  :- تمثل صافي كثافة الشحنة وليست كثافة الشحنة الحركية.

$\frac{\partial \rho}{\partial t}$  :- يمكن لاتيكون قيمتها صفر داخل الموصل الابشكال عابر وعليه تصبح المعادلة :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

وهي تكافئ المجال لقانون كيرشوف للتيار الذي ينص على صافي التيار الذي يتحرك في تقاطع من عدة موصلات يساوي صفر.

### ( 4 – 6 ) قانون اوم –الموصلية :- Ohm's Law – Conductivity

وجد عمليا ان كثافة التيار لوحدة المساحة  $J$  في المعدن تتناسب طرديا مع المجال الكهربائي عند ثبوت درجة الحرارة اي ان :

$$J \propto E \Rightarrow J = gE \dots \dots (7)$$

هذا هو قانون اوم في الموصلات والمواد التي تخضع للعلاقة رقم (7) تدعى بالاوساط الاومية او اوساط خطية حيث  $g$  يمثل ثابت التناسب ويعرف بالتوصيل النوعي او الموصلية conductivity وهي دالة للمجال الكهربائي اي  $g(E)$  . يدعى مقلوب الموصلية بالمقاومة النوعية  $\eta$  .

$$\eta = \frac{1}{g}, \text{ ohm.m or } \frac{\text{volt.m}}{\text{amp}}$$

اما الصيغة العامة والمألوفة لقانون اوم هي :

$$\Delta U = RI \dots \dots \dots (8)$$

$\Delta U$  : فرق الجهد المسط على نهايتي السلك .

ويمكن ان نعرف الموصلية  $g$  على انها :- قدرة الوسط على ايصال التيار الكهربائي وتسمى ايضا الايصالية وتكون غير متناظرة وغير متجانسة وقد تكون خطية لانها تتغير من مكان الى اخر وفي اي اتجاه كان .

وتعرف المقاومة النوعية  $\eta$  على انها : مقاومة موصل من المادة طوله متر واحد ( 1m ) ومساحة مقطعه (  $1m^2$  ) عند درجة حرارة معينة ،اي حساب المقاومة الكهربائية لموصل منتظم الشكل والبنية.

#### سبب المقاومة النوعية :

- 1- اصطدام الالكترونات بالذرات المكونة للمادة وهي تعتمد على درجة الحرارة .
- 2- اصطدام الالكترونات بالشوائب الموجودة في المادة وهي تعتمد على تركيز الشوائب وليس درجة الحرارة.

#### س/ اوجد العلاقة التي تربط المقاومة النوعية والمقاومة الخطية الاومية .

الجواب / على فرض ان توزيع التيار منتظم فقيمة التيار المار خلال اي مقطع في سلك يعطى بالعلاقة:

$$I = \int J \cdot dS \text{ or } I = \int J \cdot n da$$

وبما ان التيار ينتقل عبر الوسط بانتظام فهذا يعني ان  $J$  كمية ثابتة . ونفرض ان السلك متجانس ومميز بتوصيل نوعي ثابت .

$$I = J \cdot S \dots \dots (1)$$

حيث  $S=A$  ويمثل مساحة المقطع .

$$\text{as: } I = \frac{\Delta U}{R} \dots \dots (2)$$

بتعويض (2) في (1)

$$\frac{\Delta U}{R} = J.S \dots (3)$$

but :  $J = gE$ , then  $\frac{\Delta U}{R} = gES \dots \dots \dots (4)$

ان المقطع الثابت للطول ( $\ell$ ) ينتج عنه مجال ( $E$ ) ثابت ويعطى فرق الجهد (هبوط الجهد) :-

$$\oint E. d\ell = \Delta U$$

لا توجد مركبة عمودية للمجال على محور السلك ، حذفنا الاشارة السالبة حيث  $n$  عكس الاتجاه.

$$E.\ell = \Delta U \Rightarrow E = \frac{\Delta U}{\ell} \dots \dots \dots (5)$$

نعوض معادلة (5) في معادلة (4) :

$$\frac{\Delta U}{R} = gES = gS \frac{\Delta U}{\ell}$$

$$\therefore \frac{1}{R} = g \frac{S}{\ell}, \rightarrow R = \frac{\ell}{gS}, \text{ but: } \eta = \frac{1}{g}, \text{ then } R = \eta \frac{\ell}{S}$$

تمثل  $R$  خاصية الجسم المادي والتي تعتمد على طبيعة المادة وشكلها الهندسي ، اما المقاومة النوعية فتعتمد على طبيعة المادة فقط.

اذا كانت المادة مكونة من وسطين (مادتين) فان :-

$$R = \frac{\ell_1}{g_1 S_1} = \frac{\ell_2}{g_2 S_2} \quad \text{or} \quad R = \eta_1 \frac{\ell_1}{S_1} = \eta_2 \frac{\ell_2}{S_2}$$

**ملاحظة :** اذا كان توزيع التيار غير منتظم تصبح المقاومة بالشكل :

$$R = \frac{\Delta U}{\int J. dS} = \frac{\Delta U}{\int gE dS}$$

اما اذا كان المجال  $E$  هو المعلوم وليس فرق الجهد فان المقاومة تعطى بالعلاقة :-

$$R = \frac{\int E. d\ell}{\int gE. dS}$$

### ( 5 – 6 ) القوة الدافعة الكهربائية :- Electromotive Force

لو تساءلنا انه لو كان لدينا وسط ناقل للكهربائية فهل يحدث تجمع شحني فيه والاجابة على على هذا السؤال تكون لا بسبب وجود القوى الكهروستاتيكية في ذلك الوسط .اذن ماالسبب الذي يجعل التيار يسير خلال الوسط ؟ . ان سبب جعل التيار يسير خلال الوسط هو وجود فرق جهد ناشئ عن مصادر خارجية للطاقة وهذا ماكان معروف سابقا ،فاذا كان التيار سائرا داخل دائرة مغلقة فانه يسير باتجاه واحد ولكن ماالسبب في ذلك ؟ بما ان تكامل المركبة المماسية لمجال كهروستاتيكي يساوي صفر:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\ell = 0$$

لأن المجال محافظ اي مايربحة في خطوة يخسره في خطوة اخرى تالية اي ان المجال الكهروستاتيكي لا يستطيع لوحده ان يجعل التيار مستقر ويستمر في الدائرة المغلقة وفي اتجاه واحد وانما هناك عوامل اخرى تدفعه الى ذلك وهي :

- 1- قد تكون تغيرات مغناطيسية تسبب قوى تساعد على دفع الالكترونات في السير باتجاه ما .
- 2- قد يكون التركيز الكيميائي في الوسط هو الذي يحدث الالكترونات في حوض فيه مواد كيميائية .
- 3- قوى ميكانيكية ( مثل القوى التي تؤثر في الحوض )
- 4- قوى ضوئية مثل الفوتونات .
- 5- قوى حرارية .

وبناء على ماتقدم فان اي جسيم مشحون بقع تحت تاثير قوى اخرى اضافة الى القوى الكهروستاتيكية اي ان :

$$qE_{eff} = qE_S + F_w$$

وتدعى محصلة القوى لوحدة الشحنة المؤثرة بالمجال الكهربائي الفعال  $E_{eff}$  وهو المجال الكلي الذي يؤدي الى تدوير الشحنة باتجاه واحد في دائرة مغلقة . حيث  $E_S$  :المجال الاستاتيكي .  $F_w$  :- القوى المؤثرة الباقية .

$$\therefore E_{eff} = E_S + \frac{1}{q} F_w$$

$$\oint E_{eff} \cdot d\ell \neq 0 = E_{eff} \text{ or } E_{emf}$$

حيث ان  $\epsilon_{emf}$  هي القوة الدافعة الكهربائية ووحداتها فولت  $\text{volt} = \text{Joule/column}$

هذه القوة والتي تسمى احيانا قوة السوق ( *driving force* ) هي التي تجعل التيار يسير باتجاه واحد وباستمرار وبمعدل واحد في دائرة كهربائية مغلقة .

**والسؤال الذي يطرح نفسه هو: كيف تستطيع هذه القوة دفع الشحنات ( الالكترونات او الايونات او الفجوات .... الخ ) ؟**

والجواب على هذا السؤال يكون كالتالي:-

حسب قانون نيوتن الثاني تؤثر هذه القوة على حوامل الشحنات التي لها كتلة اي ان :

$$qE_{eff} = qE_S + F_w = mf \dots \dots \dots (1)$$

حيث  $f$  : تعجيل الجسيم او حامل الشحنة ،  $m$  : كتلة الجسيم حامل الشحنة

ان حوامل الشحنات تسير بفضل تلك القوة في الفراغ وتستمر في التسارع الى مقدار كبير جدا.

اما في الاوساط المادية فان حاملات الشحنة بمجرد تاثرها بقوة تتسارع وتتصادم مع اخر (تصادم غير مرن) يؤدي الى ابعاده الى مكان اخر باتجاه عشوائي وتبدأ حاملة الشحنة الاخرى بالتسارع وتتصادم مع اخر بحيث يكون متوسط التأثير الناشئ عن التصادم هو تقليل سرعة الجسم الى الصفر . لو فرضنا ان الفترة الزمنية بين كل تصادمين تساوي  $\tau$  وعلى اساس ان الوسط متجانس فان العامل الحراري يؤدي رمي الذرة في اي مكان عشوائيا لذا فان المعدل الزمني يساوي صفر تقريبا . وعليه فاننا سوف نهتم بالحركة المنتظمة فقط وباتجاه المجال لكي نتوصل الى نتيجة مرضية .

ان السرعة المكتسبة في زمن  $\tau$  تعطى بالعلاقة :

$$V = f\tau \dots \dots \dots (2)$$

ولو فرضنا ان  $v$  هي سرعة نهائية وان حامل الشحنة يسير بهذه السرعة وهي سرعة منتظمة ( سرعة انجراف ) وهذه السرعة هي معدل بين سرعتين اي ان :

$$v = \frac{0 + V}{2}, \quad \rightarrow v = \frac{1}{2}V \dots \dots \dots (3)$$

وبتعويض (2) في (3) :-

$$v = \frac{1}{2}f\tau \dots \dots \dots (4)$$

ومن معادلة (1) نأخذ قيمة  $f$  :

$$f = \frac{q}{m}E_{eff} \dots \dots \dots (5)$$

نعوض (5) في (4) فنحصل على :

$$v = \frac{1}{2}\tau \frac{q}{m}E_{eff}$$

$$as; \quad qE_{eff} = qE_s + F_w, \quad \therefore v = \frac{1}{2m}(qE_s + F_w)\tau$$

$$\therefore J = \sum_i q_i N_i v_i$$

حيث  $J$  كثافة التيار لوحدة المساحة

$$\therefore J = \sum_i q_i N_i \frac{1}{2} \frac{\tau_i q_i}{m_i} E_{eff} = \sum_i q_i^2 N_i \frac{1}{2} \frac{\tau_i}{m_i} E_{eff} \dots \dots \dots (6)$$

ومن قانون اوم :

$$J = gE_{eff}, \quad \rightarrow g = \frac{J}{E_{eff}} \dots \dots \dots (7)$$

ونأخذ قيمة  $J$  من معادلة (6) :

$$\therefore g = \sum_i \frac{1}{2m_i} q_i^2 N_i \tau_i, \quad \text{but } g = \frac{1}{\eta}$$

من معادلة (1) ومعادلة (7):

$$\therefore \frac{J}{g} = \eta J = E_{eff} = E_s + \frac{1}{q} F_w \rightarrow \eta J = E_s + \frac{1}{q} F_w$$

باخذ التكامل الخطي لهذا المقدار على المسار  $a$  الى  $b$  يكون:

$$\int_a^b E_s \cdot d\ell + \int_a^b \frac{1}{q} F_w d\ell = \eta \int_a^b J \cdot d\ell$$

$$\Delta U = U_a - U_b = - \int_a^b E_s \cdot d\ell \quad \text{التكامل الاول يمثل فرق الجهد حيث :}$$

ويمثل التكامل الثاني القوة الدافعة الكهربائية للجزء  $a, b$  :-

$$(U_a - U_b) + \mathcal{E}_{ab} = \eta J \ell$$

نضرب ونقسم الطرف الايمن بـ (S) فنحصل على:-

$$\eta J \ell = \eta \frac{J}{S} \ell S, \quad \text{but } I = JS \quad \text{and } R = \frac{\eta \ell}{S}$$

$$\therefore \eta \frac{J}{S} \ell S = R_{ab} I$$

حيث  $I$ : التيار المار بين نقطتين . و  $R_{ab}$ : المقاومة المكافئة بين  $a, b$

$$\therefore (U_a - U_b) + \mathcal{E}_{ab} = R_{ab} I$$

اذن معادلة تحليل اي دائرة يعطى بالعلاقة التالية:

$$\therefore (U_b - U_a) = \mathcal{E}_{ab} - R_{ab} I$$

وبضرب المعادلة اعلاه في  $I$  نحصل على:

$$\therefore (U_b - U_a) I = \mathcal{E}_{ab} I - R_{ab} I^2$$

ان النقل المتواصل للشحنة بين  $a, b$  يؤدي الى نشوء تيار ثابت في الجزء  $ab$  اي ان:

$$I = \frac{dQ}{dt} \rightarrow dQ = I dt$$

وعليه يصبح الربح في الطاقة الكهربائية يساوي :-

$$(U_b - U_a) dQ = [\mathcal{E}_{ab} I - I^2 R_{ab}] dt$$

حيث ان :-

$I^2 R_{ab} dt$ : طاقة حرارية ضائعة لايمكن ان تسترجع متولدة من التصادم (تحويل من طاقة كهربائية الى حرارية) عملية غير عكوسة.

$\epsilon_{ab} Idt$  : طاقة مخزونة ( تحويل طاقة غير كهربائية لمصدر مثالي للقوة الدافعة الكهربائية الى طاقة كهربائية )  
وهي عملية عكوسة  
 $(U_b - U_a) dQ$  :- الطاقة الكلية.

### دعنا نتسائل هل لكل دائرة كهربائية قوة دافعة كهربائية ؟ .

ج/ ليس شرطاً ، وإذا كانت موجودة تسمى الدائرة الفعالة ووجودها قد يكون موجب او سالب وإذا كانت غير موجودة تسمى بالدائرة السلبية تعد  $\epsilon_{ab}$  موجبة اذا كانت باتجاه التيار نفسه حيث يقوم بهذه الحالة مصدر ق . د . ك بتجهيز الطاقة الكهربائية الى الدائرة على حساب الطاقة غير الكهربائية التي يمتلكها المصدر اما اذا كانت  $\epsilon_{ab}$  سالبة فان المصدر يقوم بامتصاص الطاقة الكهربائية من الدائرة ويحولها الى طاقة من نوع اخر ( اي نعتبرها كمخزن لخزن الطاقة الموجودة ) كمثال :-

الخلية الكيميائية : تحويل كيميائي – كهربائي الطاقة .

المزدوج الحراري : تحويل حراري – كهربائي للطاقة .

المولد الكهربائي (الداينمو) : تحويل ميكانيكي – كهربائي للطاقة، عندما يمتص الداينمو الطاقة من الدائرة يعمل كمحرك وعندما يجهز الطاقة يعمل كمولد . فالتيارات المستقرة في الاوساط تكون خالية من مصادر القوة الدافعة الكهربائية وقد وجد ان هناك تشابه بين وسطين ، وسط موصل يمر به تيار كهربائي مستقر وثابت مع الزمن ووسط اخر الكترولستاتيكي هو عبارة عن موصلات محاطة بمادة عازلة .

### ولايجاد التشابه ما بين الاوساط العازلة التي توجد فيها اجسام موصلة وبين وسط موصل نتبع مايلي :-

لنأخذ وسط موصل متجانس او ميا لايحتوي على مصادر للقوة الدافعة الكهربائية والتيار ثابت ، من معادلة الاستمرارية :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0$$

في الوسط الاول يكون  $\rho$  مقدار ثابت اي ان  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  لذلك (للتيارات الثابتة)  $\nabla \cdot J = 0$  وهذا دليل على الحالة المستقرة ، ولكن حسب قانون اوم فان :

$$J = gE$$

$$\nabla \cdot J = g \nabla \cdot E \rightarrow 0 = g \nabla \cdot E$$

$$\nabla \cdot E = 0 \dots \dots (1), \quad g = \text{constant}$$

$g$  كمية ثابتة للوسط المتجانس

فإذا كانت الاوساط خالية مصادر القوة الدافعة الكهربائية فان :-

$$\frac{1}{q} F_w = 0$$

ولكن موجود في المجال الكهروستاتيكي ( $E_S$ ) اي ان :-

$$E = E_S + \frac{1}{q} F_w, \rightarrow E = E_S$$

$$\therefore E_S = -\nabla U \dots \dots (2)$$

ومن دمج معادلتني (1) و (2) :

$$-\nabla \cdot \nabla U = 0, \quad \rightarrow \nabla^2 U = 0$$

وهذه هي معادلة لابلاس اي انه يمكن حل مسألة التوصيل في حالة الاستقرار بنفس طريقة حل المسائل الكهروستاتيكية وذلك بحل معادلة لابلاس باحدى الطرق المستخدمة في الفصل الثالث.

### اسئلة الفصل السادس

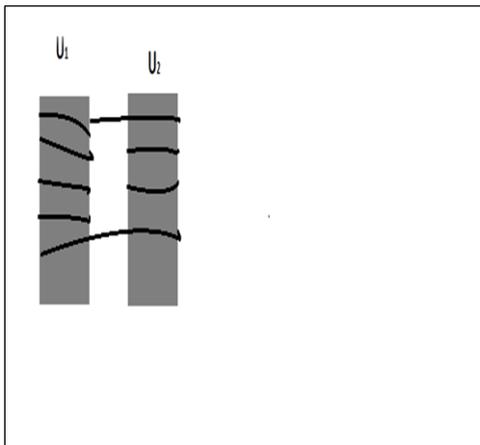
س1/ موصلين مغلفين بمادة عازلة الاول محاط ومغلف كلياً بمادة عازلة والاخر مغلف جزئياً ، احسب زمن الاسترخاء (ثابت الزمن) اذا علمت ان الجهد في الاول  $U_1$  والجهد في الثاني  $U_2$  .

الجواب / لدينا موصلين في وسط متجانس واومي وذو توصيل نوعي ( $g$ ) وثبت جهد الموصلين على القيم  $U_1$  و  $U_2$  فالتيار المار بينهما يعطى بالعلاقة:-

$$I = \frac{\Delta U}{R} = \frac{U_1 - U_2}{R} \dots \dots \dots (1)$$

حيث  $R$  مقاومة الوسط الذي يمر فيه التيار الكهربائي ، ويعطى التيار الخارج من سطح مغلق بالعلاقة:-

$$I = \oint_S J \cdot dS \dots \dots \dots (2)$$



$$\therefore J = gE \Rightarrow I = g \oint_S E \cdot dS \dots \dots (3)$$

$$\frac{U_1 - U_2}{R} = g \oint_S E \cdot dS \dots \dots \dots (4)$$

هناك تشابه بين الحالة الديناميكية والستاتيكية ، بمعنى ان المجال الكهربائي المتولد عن سير التيار مشابه للمجال الناتج عن شحنات كهروستاتيكية موضوعة على موصلين ، وطبقاً لقانون كاوس :-

$$\oint E \cdot dS = \frac{Q}{\epsilon} \dots \dots \dots (5)$$

حيث  $Q$  الشحنة الموضوعة على الموصل المعدني المحاط بالسطح  $S$  وفي هذه الحالة يشكل الموصلان متسعة وعليه يكون :-

$$C = \frac{Q}{\Delta U}, \quad \rightarrow Q = C \Delta U \dots \dots (6)$$

نعوض (5) و (6) في (4) :

$$\frac{\Delta U}{R} = g \frac{Q}{\epsilon} = \frac{g}{\epsilon} C \Delta U \rightarrow \frac{1}{R} = \frac{g}{\epsilon} C$$

$$\therefore RC = \frac{\epsilon}{g} = \tau$$

وهو زمن الاسترخاء او ثابت الزمن .

س2/ اذا كان لدينا جسم ووضعنا عليه شحنة ، فما الوقت الذي تحتاجه الشحنة لكي تكون في موضع الاستقرار ؟

الجواب / لو اخذنا وسط متجانس متساوي الاتجاه ومميز بتوصيل نوعي  $g$  وسماحيته  $\epsilon$  يحتوي على شحنة طليقة ذات كثافة حجمية  $\rho$  ، وعند فصل هذه المنظومة عن مصادر القوة الدافعة الكهربائية وعن المجالات المعتمدة عن الزمن فانها تميل نحو الاتزان .

من معادلة الاستمرارية:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0, \text{ but } J = gE, \quad \therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} + g \nabla \cdot E = 0 \dots \dots (1)$$

$$\text{as: } \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + g \frac{\rho}{\epsilon} = 0, \text{ divided by } \rho, \text{ we get: } \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{g}{\epsilon} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{g}{\epsilon}, \quad \text{then: } \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\partial \rho}{\rho} = -\frac{g}{\epsilon} \int_0^t dt$$

$$\ln \rho - \ln \rho_0 = -\frac{g}{\epsilon} t, \quad \text{then } \rho = \rho_0 e^{-\frac{g}{\epsilon} t}$$

$$\text{as: } \tau = \frac{\epsilon}{g}, \quad \text{then } \rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

1- اذا كان الجسم موصل فان  $g$  كبيرة مما يؤدي الى تكون الكمية  $\tau = \frac{\epsilon}{g}$  صغيرة اي يحتاج زمن قصير جدا

للاستقرار اي ان الموصل الجيد يحتاج يصل بسرعة الى حالة الاتزان.

2- اذا كان الجسم ردي التوصيل اي  $g$  صغيرة و  $\tau = \frac{\epsilon}{g}$  كمية كبيرة اي يحتاج الى زمن طويل جدا للاستقرار.

وهذا يؤكد ان الشحنة الحرة لا يمكن ان تبقى داخل الموصل وتكون بدلا من ذلك موزعة بالتساوي على سطح الموصل.

س3/ اسطوانتان معدنيتان طويلتان جدا نصف اقطارها  $r_1$  و  $r_2$  بحيث ان  $r_2 > r_1$  رتبت على محور واحد وسلط فرق جهد قدره  $\Delta U$  بينهما فاذا ملئت الفسحة بين الاسطوانتين بوسط توصيلته  $g$  -1 احسب التيار لكل وحدة طول من هذا النظام باستخدام قانون اوم .

2- اذا ملئت الفسحة بينهما بوسط عازل سماحيته  $\epsilon$  من حساب سعة المجموعة برهن ان حاصل ضرب المقاومة لوحدة الطول تساوي  $(\frac{\epsilon}{g})$ .

الجواب/ اولاً: من قانون اوم :

$$J = gE \dots (1)$$

نستخدم معادلة لابلاس بالاحداثيات الاسطوانية :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right) = 0, \quad \rightarrow r \frac{dU}{dr} = A, \quad \text{then} \quad \frac{dU}{dr} = \frac{A}{r} \Rightarrow U = A \ln r + B$$

$$\therefore E = -\nabla U = -\frac{dU}{dr}, \quad \rightarrow E = -\frac{A}{r}$$

$$U_1 = A \ln r_1 + B$$

$$U_2 = A \ln r_2 + B$$

ب طرح المعادلتين:

$$\Delta U = A(\ln r_1 - \ln r_2) = A \ln \frac{r_1}{r_2}$$

$$\therefore A = \frac{\Delta U}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

$$\therefore E = -\frac{A}{r} = \frac{\Delta U}{\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right) \cdot r} \dots (2)$$

نعوض معادلة (2) في (1):

$$\therefore J = g \frac{\Delta U}{\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right) \cdot r}$$

$$\text{as: } I = \int J \cdot dS = J \cdot S = g \frac{\Delta U}{\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right) \cdot r} (2\pi r L)$$

$$I = \frac{2\pi g \Delta U L}{\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right)} \dots (3)$$

ثانياً :-

$$\text{as: } \frac{\Delta U}{I} = R, \quad \text{and} \quad I = \frac{2\pi g \Delta U L}{\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right)},$$

$$\text{then} \quad \left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{2\pi g \Delta U L}{I}, \quad \left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right) = 2\pi g R L$$

$$\therefore R = \frac{\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi gL} \dots \dots (4)$$

as :  $C = \frac{Q}{\Delta U} \dots \dots (5)$ , from Gauss law  $\oint E \cdot dS = \frac{Q}{\epsilon}$

$$E \cdot S = \frac{Q}{\epsilon}, \text{ then } E = \frac{Q}{2\pi r \epsilon L} \dots \dots (6)$$

من معادلة (2) ومعادلة (6) :

$$E = \frac{\Delta U}{\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right) \cdot r}, \text{ then } \frac{\Delta U}{\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right) \cdot r} = \frac{Q}{2\pi r \epsilon L}, \text{ but } Q = C\Delta U$$

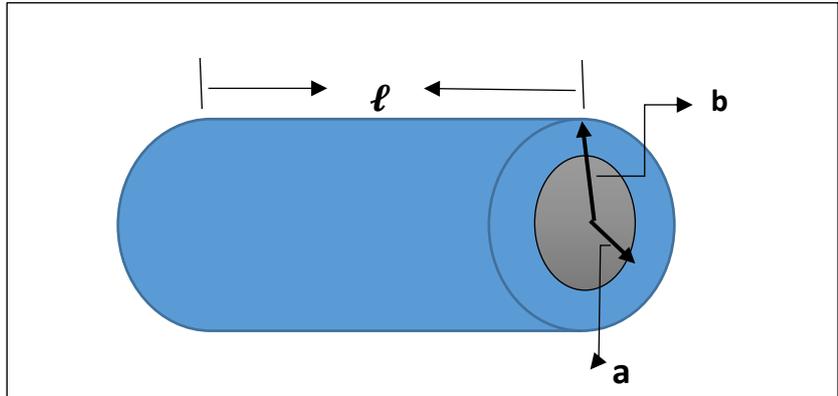
$$\therefore \frac{\Delta U}{\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right) \cdot r} = \frac{C\Delta U}{2\pi r \epsilon L}$$

$$\therefore C = \frac{2\pi \epsilon L}{\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right)} \dots \dots (7)$$

من معادلة (4) و(7) :

$$\text{now: } RC = \frac{\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi gL} * \frac{2\pi \epsilon L}{\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right)} \rightarrow RC = \frac{\epsilon}{g}$$

س4/ احسب المقاومة لعازل طوله (  $\ell$  ) على شكل كيبيل محوري *axial cable* .  
 الجواب/ نفرض تيار كلي (  $I$  ) من الموصل الداخلي الى الموصل الخارجي عند مسافة شعاعية (  $r$  ).



$$J = \frac{I}{A} = \frac{I}{2\pi r \ell} \dots\dots\dots (1), \quad \text{but } J = gE, \text{ then } E = \frac{J}{g} \dots\dots\dots (2)$$

نعوض (1) في (2)

$$E = \frac{I}{2\pi g r \ell}$$

$$U_{ab} = - \int_a^b E \cdot dr = - \int_b^a \frac{I}{2\pi g r \ell} dr = - \frac{I}{2\pi g \ell} \int_b^a \frac{dr}{r}$$

لكي نجعل التيار موجب عندما تتساب الشحنة بالاتجاه المعاكس من الخارج الى الداخل استبدلت الاشارة السالبة للتيار حدود التكامل.

$$\therefore U_{ab} = \frac{I}{2\pi g \ell} \ln \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi g \ell} \ln \frac{b}{a}$$