الفصل الاول
الانظمة البدهية
(Axiomatic)

يتكون النظام البدهي من تعاريف، مجموعة بديهيات ومبرهنات. سندرس هذه المفاهيم بشكل عام ثم نأخذ بعض الامثلة عن انظمة بدهية التي تكون بعضا منها منتهية.

١-١ التعاريف

ان اي تعريف جيد لأي كلمة (مصطلح) في الرياضيات يجب ان يعبر عنه ببساطة، ان يكون غير دوري ويصف بطريقة وحيدة الكلمة المراد تعريفها.

فالبساطة تعني ان نعبر عن الكلمة المراد تعريفها بكلمات ابسط منها، اي بكلمات معروفة، فقد عرف اقليدس النقطة بانها ليست لها بعد، والمستقيم له طول فقط وليس له عرض او سمك. ان هذه الكلمات التي هي البعد، الطول، العرض، والسمك اصعب من الكلمات المراد تعريفها، لذلك لايمكن قبول مثل هذه التعاريف.

اما الدورية فيقصد بها عند تعريف كلمة ما، فاننا سنمر بسلسلة من التعاريف التي قد تنتهي بنفس الكلمة، فمثلا، اذا عرفنا المستقيم بانه مجموعة من نقاط ونعرف النقطة بانها تقاطع مستقيمين، فان هذه العملية تكون دورية، لذا نتجنب ان نعرف س بدلالة ص ونعرف ص بدلالة س.

يقصد بالوصف الوحيد ان التعريف الدقيق لكلمة مايجب ان يصف هذه الكلمة بطريقة بحيث لاينطبق هذا الوصف على كلمة اخرى، فمثلا، اذا عرفنا قلم الرصاص "بانه اداة حادة تستعمل للكتابة"، فان هذا التعريف يصف ايضا قلم الحبر وقلم الجاف. لذلك لايمكن قبول مثل هذه التعاريف. ولكي نتجنب هذه المشكلة نختار بعض الكلمات بدون تعريف لتكون كلمات اولية او كلمات غير معرفة (Undefined terms) وبدلالتها تعرف بقية الكلمات او المصطلحات في النظام. تصنف الكلمات الاولية الى نوعين:

(أ) الكلمات التقنية : (technical terms)

تختلف هذه الكلمات من موضوع الى موضوع آخر، ففي الهندسة بصورة خاصة، كمثال: "النقطة"، "المستقيم"، "التطابق"، "بين"، ربما تعتبر هذه الكلمات اولية في النظام المعطى . ومن المحتمل في انظمة اخرى في الهندسة تختار كلمات اولية اخرى. تستعمل الكلمات الاولية في نظام ماكاساس تبنى عليه المصطلحات ولغة النظام. وكل مصطلح جديد يجب ان يعرف اما باستعمال الكلمات الاولية او المصطلحات التي عرفت بدلالتها. لذلك يجب ان توضع قائمة لكلمات اولية في بداية كل نظام.

(ب) الكلمات المنطقية:

مثل "كل"، "لأي"، "بعض"، "يوجد"، "في الاقل واحد"، "في الاكثر واحد"، "فقط"، "واحد"، "اثنان"، وهكذا.

حيث يوجد عدد غير محدد من الكلمات المنطقية، لكن الكلمات التي ذكرت تقع على الاكثر في الرياضيات.

٢-١ البديهيات (Axioms)

كما ان الكلمات الاولية اختيرت كأساس، وبدلالتها تعرف الكلمات الاخرى، فاننا نختار كذلك بعض العبارات البسيطة التي تتعلق بالكلمات الاولية كأساس ومنها نستنتج العبارات الاخرى في النظام. هذه العبارات الاساسية التي نتقبلها بدون برهان تدعى بديهيات والتي هي حجر الاساس للبناء.

ان التعريف القديم للبديهية "هي حقيقة واضحة نتقبلها بدون برهان" غير مقبول في الرياضيات الحديثة، ولو ان الجزء الاخير "نتقبلها بدون برهان" صحيح، غير ان الجزء الباقي خطأ. اذ ليس من الضروري ان تكون من الواقع الذي نعيش فيه، حيث توجد بديهيات في بعض الانظمة البدهية تناقض بديهيات انظمة اخرى، كما سنبينها لاحقا.

لقد عرف هلبرت البديهيات في نظامه البدهي للهندسة الاقليدية، بما يلي:

"اذا اخذنا بعض الكلمات لتكون اولية، فان البديهيات هي مجرد فرضيات حول تلك الكلمات الاولية".

ان الكلمات الاولية هي مجرد متغيرات، ولهذا فان البديهيات هي جمل مفتوحة، لانها في هذه الحالة، تحوي على متغيرات وعلى هذا الاساس، فانه لايمكن ان يقال بانها اما صائبة او خاطئة، وعليه فان البديهية لاتحتاج الى برهان.

لكي نضع مجموعة من بديهيات لنظام معين، يجب ان ندرس خواص النظام البدهي التي سنتطرق اليها في الفصل القادم.

اما المبرهنة (Theorem) فهي النتيجة التي نحصل عليها من بديهيات النظام او من عبارات في هذا النظام

مبرهنة سابقا تعتبر كفرضيات.

ان علم الهندسة هو عبارة عن نظام بدهي، لاننا نستخدم مجموعة من بديهيات، تعاريف، ومبرهنات. ان افضل واقرب مثال بالنسبة الينا للنظام البدهي هو الهندسة الاقليدية.

في هذا الفصل سنأخذ امثلة عن انظمة بدهية، التي قسما منها تكون منتهية، اي انها تحتوي على عدد منته من عناصر. نأخذ النقطة والمستقيم لتكون كلمات اولية في الانظمة التالية ولاتوجد خواص اخرى عنهما غير التي ستذكر في البديهيات.

١-٣ المستوى الاسقاطي (Projective Plane)

سنكون مستويا اسقاطيا كمثال على نظام بدهي.
يتكون المستوى الاسقاطي من مجموعة π لكلمات اولية تقنية تدعى نقاط ومجموعات جزئية من π تدعى مستقيمات، والتي هي ايضا غير معرفة. سنرمز لنقاط π بالحروف الكبيرة A,B,C ، ومستقيمات π بالحروف الصغيرة $l,m,n\ldots$ ، فان بديهيات π هي كما يلي.

مجموعة البديهيات

١- اي نقطتين مختلفتين في π يحتويهما مستقيم واحد فقط.

اي ان، اذا كان $A,B\in\pi$ بحيث ان $A\neq B$ و $A,B\in l$ و $A,B\in m$ ، فان $l=m$.

٢- كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل.
٣- توجد في الاقل نقطة واحدة A ويوجد في الاقل خط واحد l بحيث ان $A \notin l$.

٤- اي مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة في الاقل.
من هذه البديهيات نستطيع ان نكون تعاريف ومبرهنات جديدة.

مبرهنة ١

اي مستقيمين مختلفين في المستوي الاسقاطي يشتركان في نقطة واحدة فقط.

البرهان

$l \ldots \exists\ A, B \in l \wedge A, B \in m$

ليكن m و l مستقيمين مختلفين في π.
m و l مختلفين يعني ان $l \neq m$.
من البديهية ٤، توجد نقطة A بحيث ان $A \in l$ و $A \in m$.
نفرض انه توجد نقطة اخرى B تختلف عن A بحيث ان $B \in l$ و $B \in m$.
فانه من البديهية ١، $l = m$. وهذا يناقض الفرض بان $l \neq m$. وبهذا، فان l و m يشتركان في نقطة واحدة فقط.

مبرهنة ٢

اي نقطة في المستوي الاسقاطي هي عنصر لثلاثة خطوط في الاقل.

البرهان

لتكن P اية نقطة في π

من البديهية ٣ ، يوجد مستقيمl ، بحيث ان $P \notin l$.

كذلك، من البديهية ٢ ، توجد ثلاث نقاط في الاقل على المستقيم l، ولتكن A_1, A_2, A_3.

من البديهية١ ، توجد الخطوط PA_1, PA_2, PA_3 التي تمر من P وتكون مختلفة.

لقد استخدمنا "واحد فقط" في البديهية١ و "في الاقل واحد" في البديهية ٤ . ان "واحد فقط" التي استخدمت في المبرهنة١ تكافيء "في الاقل واحد" و " في الاكثر واحد". فقد برهنا اولا ان المستقيمين يتقاطعان في نقطة واحدة في الاقل، وثانيا ان المستقيمين يتقاطعان في نقطة واحدة في الاكثر، وبذلك يتقاطع المستقيمان في نقطة واحدةفقط.

نعتبر هنا النقطة كعنصر في المجموعة الشاملة π ، والمستقيم هو مجموعة من نقاط اي مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة.

بما ان النقطة والمستقيم هما كلمتين اوليتين او متغيرين، فاننا يمكن ان نعوض عن النقطة والمستقيم بما يلي:

"عنصر" و "مجموعة"
"خرزة" و "سلك"
"رجل " و "لجنة"، وهكذا

ان هذا يوضح العلاقة بين العناصر الاولية.

لابد ان نوضح هنا ان العبارة ((اي مستقيم هو مجموعة من نقاط)) لاتعتبر تعريف للمستقيم، لان هنالك مجموعات من نقاط لاتكون مستقيمات، فمثلا: الدائرة، المثلث، وهكذا.

عندما نقول: "النقطة P هي عنصر في المستقيم l" فاننا يمكن ان نقول ايضا: L يمر من P، L يحتوي على P، P على l او P تقع على l.

وعندما تكون النقطة عنصرا لاكثر من مستقيم واحد، وليكن المستقيمين l و m، فانه يمكن ان نقول: l يلتقي مع m في P، او l يقطع m في P.

نلاحظ من مبرهنة ١، ان اي مستقيمين في المستوي الاسقاطي يتقاطعان في نقطة واحدة فقط. بتعبير آخر، لايمكن ان نتكلم عن المستقيمات المتوازية او المستقيمات التي لاتتقاطع. لهذا لايمكن ان تكون هذه المستقيمات في المستوى الاقليدي.

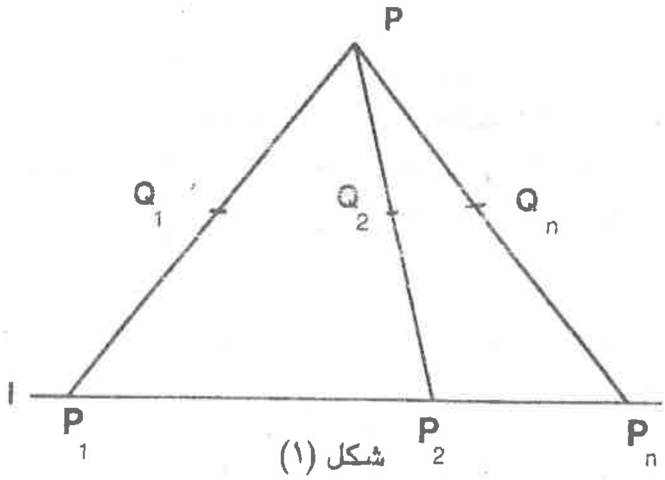
١-٤ مستويات اسقاطية منتهية

مستوى اسقاطي منته هو مجموعة منتهية تحقق البديهيات من ١ الى ٤ . سنناقش الآن بعض النتائج الاساسية لمستويات اسقاطية منتهية.

مبرهنة ٣

اذا وجدت بالضبط n من النقاط على مستقيم لمستوي اسقاطي منته، فان المستوي يحتوي بالضبط على n^2-n+1 من النقاط.

البرهان



شكل (١)

ليكن l مستقيما يحتوي بالضبط على n من النقاط، ولتكن $P_1, P_2, \ldots P_n$.

من البديهية ٣، توجد نقطة P لاتقع على l.

ومن بديهية١ ، توجد n من الخطوط المختلفة $PP_1, PP_2, \ldots, PP_n$. ومن بديهية٢ ، توجد نقطة ثالثة على كل خط من هذه الخطوط، ولتكن $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$، على التوالي.

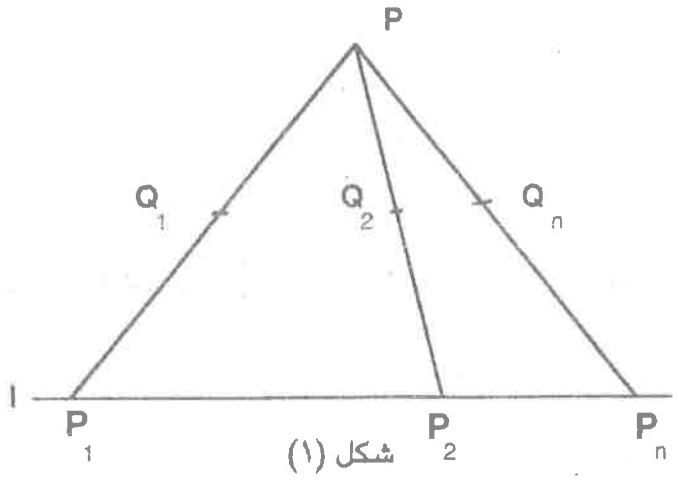
نأخذ النقطة Q_1 ونصلها بالنقاط $P_1, P_2, \ldots P_n$.

فنحصل على n من الخطوط $Q_1P_1, Q_1P_2, \ldots, Q_1P_n$

هذه الخطوط تقطع PP_2 في n من النقاط المختلفة. لذلك PP_2 يحتوي على n-1 من النقاط عدا P. ان هذا يصح لكل من المستقيمات $PP_1, PP_2, \ldots, PP_n$. وبهذا، n من الخطوط، وكل خط منها يحتوي على n-1 من النقاط، ومع النقطة P، يحتوي المستوي على $n(n-1)+1=n^2-n+1$ من النقاط في الاقل.

لكي نبرهن ان المستوي يحتوي على n^2-n+1 من النقاط على الاكثر، نفرض وجود نقطة اخرى Q، لاتقع على اي خط من تلك الخطوط. الخط QP يختلف عن الخطوط

البرهان



شكل (١)

ليكن l مستقيما يحتوي بالضبط على n م
النقاط، ولتكن $P_1, P_2, \dots P_n$.

من البديهية ٣، توجد نقطة P لاتقع على l.

ومن بديهية١ ، توجد n من الخطوط المختلف
$PP_1, PP_2, \dots, PP_n$. ومن بديهية٢ ، توجد نقطة ثالثة ع
كل خط من هذه الخطوط، ولتكن $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$، ع
التوالي.

نأخذ النقطة Q_1 ونصلها بالنقاط $P_1, P_2, \dots P_n$.
فنحصل على n من الخطوط $Q_1P_1, Q_1P_2, \dots, Q_1P_n$
هذه الخطوط تقطع PP_2 في n من النقاط المختلفة
لذلك PP_2 يحتوي على n-1 من النقاط عدا P. ان هذ
يصح لكل من المستقيمات $PP_1, PP_2, \dots, PP_n$. وبهذا،
من الخطوط، وكل خط منها يحتوي على n-1 من النقا
ومع النقطة P، يحتوي المستوي على $n(n-1)+1=n^2-n+1$
من النقاط في الاقل.

لكي نبرهن ان المستوي يحتوي على n^2-n+1 م
النقاط على الاكثر، نفرض وجود نقطة اخرى Q، لاتقع ع
اي خط من تلك الخطوط. الخط QP يختلف عن الخط

المذكورة. من مبرهنة١ ، QP يقطع l في نقطة P_{n+1} التي تختلف عن النقاط $P_1, P_2, \ldots, P_n$. وبهذا يحتوي l على n+1 من النقاط وهذا يخالف الفرض.

بهذا فقد برهنا على ان المستوي يحتوي بالضبط على n^2-n+1 من النقاط.

لقد ذكرنا في هذه المبرهنة على انه اذا كان المستقيم يحتوي على n من النقاط، فان اي مستقيم آخر يحتوي ايضا على n من النقاط، لذلك نستنتج النتيجة التالية.

نتيجة

اذا كان في المستوي الاسقاطي مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط، فان اي مستقيم آخر يحتوي بالضبط على n من النقاط.

لنا عودة الى المستوي الاسقاطي في الفصل الحادي عشر. سنقدم الان نظاما بدهيا مختلفا يتضمن مفهوم التوازي.

١-٥ المستوى التآلفي (Affine Plane)

يتضمن المستوى التآلفي من مجموعة α من كلمات اولية تقنية تدعى نقاط، ومجموعات جزئية من α تدعى مستقيمات، والتي هي ايضا تقنية. سنستعمل نفس الرموز للنقاط والمستقيمات في α كما في المستوي الاسقاطي.

مجموعة البديهيات

١- اي نقطتين مختلفتين A, B في α يحتويهما مستقيم

واحد فقط.
٢ـ كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل.
٣ـ يوجد في الاقل نقطة واحدة A ومستقيم واحد l بحيث $A\notin l$.
٤ـ اذا كان l مستقيما وA نقطة بحيث ان $A\notin l$، فانه يوجد مستقيم واحد فقط m يحتوي A بحيث ان $l\cap m=\phi$.

تعريف ١

يقال لمستقيمين مختلفين انهما متوازيان، اذا كان $l\cap m=\phi$.

من هذا التعريف، يمكن ان نعيد نص بديهية ٤ بالشكل التالي:
((اذا كان l مستقيما وA نقطة بحيث ان $A\notin l$، فانه يوجد مستقيم واحد فقط m يمر من A ويوازي l)).

مبرهنة ٤

اي مستقيمين مختلفين في مستوى تآلفي يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر.

البرهان

نفرض ان العبارة خطأ. فيوجد مستقيمان مختلفان l و m يشتركان في نقطتين في الاقل، ولتكن P وQ. ولكن هذا يناقض البديهية١، حيث ان P وQ تقعان على المستقيمين l و m، وان البديهية١ تنص على انه لكل نقطتين معلومتين، يوجد مستقيم واحد فقط يحتويهما. لذلك، فان فرضيتنا تؤدي الى تناقض. وبهذا فان اي

مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر. اي ان، اي مستقيمين اما يكونا متوازيين او يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.

مبرهنة ٥

اذا قطع مستقيم احد مستقيمين متوازيين، فانه يجب ان يقطع الآخر.

البرهان

ليكن k و l مستقيمين متوازيين، وان m مستقيم آخر يقطع k في نقطة P. يجب ان نبرهن ان m يقطع l في نقطة ما. نفرض ان العبارة خطأ، اي ان m يوازي l، فانه من P سيكون هنالك المستقيمان k و m يوازيان l، وهذا يخالف البديهية ٤ . لذلك، فان الفرض يجب ان يكون خاطئا. وهكذا، اذا قطع خط احد مستقيمين متوازيين، فانه يجب ان يقطع الآخر.

مبرهنة ٦

المستقيمان الموازيان للمستقيم نفسه متوازيان.

البرهان

ليكن k و l مستقيمين متوازيين، و l و m مستقيمين متوازيين. يجب ان نبرهن ان k و m متوازيان. نفرض ان العبارة خطأ. فاذا كان k لايوازي m، فانه يقطع m. ومن المبرهنة٥ ، فان k يجب ان يقطع l، وهذا يناقض الفرض بان k يوازي l. لذلك، فان فرضيتنا

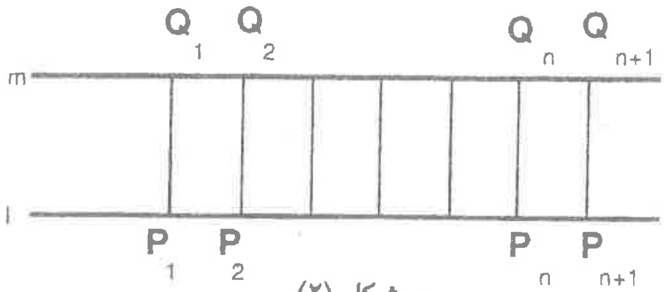
تؤدي الى تناقض. وعليه، فان المستقيمين الموازيين للمستقيم نفسه متوازيان.

١-٦ مستويات تآلفية منتهية

مستوي تآلفي منته هو مجموعة منتهية تحقق البديهيات من ١ الى ٤ للمستوى التآلفي.

مبرهنة ٧

اذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط، فان اي مستقيم يوازي l يحتوي بالضبط على n من النقاط.



شكل (٢)

البرهان

نفرض انl مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$. ليكن m اي مستقيم يوازيl. يجب ان نبرهن ان m يحتوي بالضبط على n من النقاط. من بديهية٢ ، توجد نقطة Q_1 على m. ومن بديهية١ ، يوجد المستقيم P_1Q_1. من البديهية٤ ، توجد بالضبط n-1 من المستقيمات الموازية الى P_1Q_1 من النقاط $P_2, \ldots\ldots, P_n$ ومن مبرهنة ٦ ، هذه المستقيمات تكون متوازية ومن المبرهنتين ٤و٥ ، تقطع هذه المستقيمات المستقيمm في n-1 من النقاط المختلفة، ولتكن $Q_2, \ldots\ldots Q_n$ والتي

تختلف عن Q_1 (من تعريف التوازي). من هذا نستنتج على انه توجد على الاقل n من النقاط على m.

لكي نبرهن على وجود على الاكثر n من النقاط على m، نفرض وجود نقطة اخرى، و Q_{n+1}، على m. من البديهية ٤،يوجد مستقيم يمر من Q_{n+1} ويوازي P_1Q_1. من المبرهنتين ٤و٥ ، هذا المستقيم يقطع l في نقطة غير النقاط $P_1,\ldots,P_n$، وهذا يخالف الفرض بان l يحتوي بالضبط على n من النقاط.

لذلك، فانه نتيجة لما تقدم، فان m يحتوي بالضبط على n من النقاط.

مبرهنة ٨

اذا كان اي مستقيم l يحتوي بالضبط على n من النقاط، فانه توجد بالضبط n-1 من المستقيمات الموازية الى l.

البرهان

ليكن l مستقيما يحتوي بالضبط على n من النقاط، ولتكن $P_1, P_2, \ldots, P_n$. ولتكن P نقطة لاتقع على l (بديهية٣).

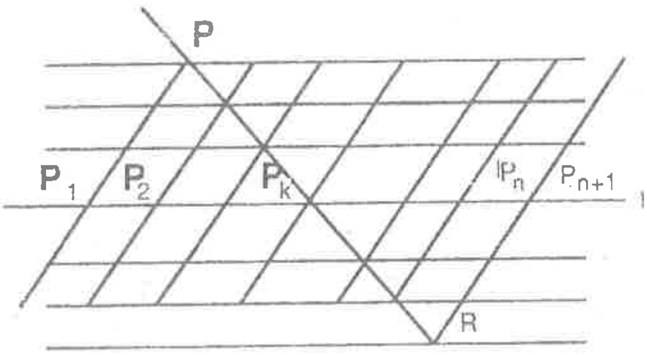
من بديهية ١ ، يوجد المستقيمان PP_1, PP_k (حيث P_k هي اي نقطة من النقاط $P_2,\ldots,P_n$).

من بديهية٤ ، يوجد بالضبط n-1 من المستقيمات الموازية الى PP_1 والتي تمر من النقاط $P_2,P_3,\ldots,P_n$ (احدهما سيمر بالنقطة P_k). من المبرهنتين ٤و٥ المستقيم PP_k الذي يقطع PP_1 والمستقيم الموازي له من P_k، يجب ان يقطع كل من الخطوط الاخرى الموازية الى PP_1 في نقطة واحدة فقط. لذلك، عدد نقاط التقاطع هذه

عبر PP_k تكون بالضبط n من النقاط.

من البديهية٤ ومبرهنة٤ ، يوجد بالضبط n-1 من المستقيمات الموازية الى l من n من النقاط على الخط PP_k عدا P_k (حيث ان P_k تقع على l).

نفرض على انه يوجد موازي آخر الى l، ومن المبرهنتين ٤و٥ هذا المستقيم سيقطع PP_k في نقطةR التي تختلف عن نقاط تقاطعه مع PP_1 والمستقيمات الموازية له. ومن البديهية٤ ، يوجد موازي من R الى PP1. ومن المبرهنتين ٤و٥ سيقطع هذا الموازي المستقيم l في نقطة P_{n+1} التي تختلف عن النقاط $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ وهذا يناقض الفرض بان l يحتوي بالضبط على n من النقاط.



شكل (٣)

مبرهنة ٩

اذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط، فان اي مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط.

البرهان

ليكن l مستقيما يحتوي بالضبط على n من النقاط. وليكن m اي مستقيم آخر. يجب ان نبرهن ان m يحتوي بالضبط على n من النقاط. اما m يقطع l، او لايقطعه.

اذا لم يقطع l، فمن المبرهنة ٧،يحتوي m بالضبط على n من النقاط.

نفرض ان m يقطع l في نقطة، ولتكن P.

من المبرهنة ٨ ، يوجد بالضبط $n-1$ من المستقيمات الموازية الى l.

من المبرهنتين ٤و٥ ، m يقطع l والمستقيمات الموازية له في n من النقاط (من ضمنها P).

نفرض وجود نقطة اخرى على m.

من البديهية٤ ، يوجد موازي آخر الى l من هذه النقطة، ولكن هذا يخالف المبرهنة٨ لذلك، فان m يحتوي بالضبط على n من النقاط.

تمارين ١-١

١- في المستوى التآلفي، اذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط، برهن كلا مما يلي:

أ) اي نقطة يمر بها بالضبط $n+1$ من المستقيمات

ب) يوجد بالضبط n^2 من النقاط في النظام.

ج) يوجد بالضبط $n(n+1)$ من المستقيمات في النظام.

٢- في المستوي الاسقاطي، اذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط، برهن كلا مما يلي:

(أ) اي مستقيم في النظام يحتوي بالضبط على n من النقاط.

(ب) اي نقطة في النظام يمر بها بالضبط n من المستقيمات.

(ج) يوجد بالضبط n^2-n+1 من المستقيمات في النظام.

١-٧ نظاما يونك وفانو The Systems of Young and Fano

نظام يونك

اذا اضفنا البديهية التالية الى مجموعة بديهيات المستوى التالفي، سنحصل على نظام يونك.

البديهية:٥ اذا كان l مستقيما، فانه توجد على الاكثر ثلاث نقاط تقع على l.

ان بديهية ٢ مع هذه البديهية تجعل هذا النظام هندسة منتهية، حيث ان الخط فيه يحتوي على ثلاث نقاط فقط وفي هذه الحالة يكون عدد النقاط والمستقيمات في هذا النظام منتهيا، كما سنوضح في المبرهنات التالية التي ستترك براهينها كتمارين (لاحظ تمارين ١-١).

مبرهنة ١٠

يحتوي النظام على تسع نقاط فقط.

مبرهنة ١١

يحتوي النظام على اثني عشر مستقيم فقط.

مبرهنة ١٢

اية نقطة يمر بها اربعة مستقيمات فقط.

نظام فانو

اذا اضفنا البديهية ٥ الى المستوى الاسقاطي، سنحصل على نظام فانو. ان نظام فانو منته ايضا حيث ان المستقيم فيه يحتوي على ثلاث نقاط فقط وعدد النقاط والخطوط فيه منته ايضا، كما في المبرهنات التالية:

مبرهنة ١٣

يحتوي نظام فانو على سبع نقاط فقط.

مبرهنة ١٤

يحتوي نظام فانو على سبعة مستقيمات فقط.

مبرهنة ١٥

اي نقطة يمر بها بالضبط ثلاثة مستقيمات.

الفصل الثاني
خواص النظام البدهي

توجد ثلاثة مفاهيم مهمة ترافق عادة اي نظام بدهي: الاتساق؛ الاستقلالية، والتمامية سنأخذ الانظمة البدهية التي قدمت في الفصل الاول كأمثلة لدراسة هذه المفاهيم.

٢-١ الاتساق Consistency

قبل ان نقدم تعريف الاتساق، نذكر نص قانوني المنطق التاليين ليعتبران كاساس لدراستنا هذه.

قانون التناقض

لاتوجد عبارة يمكن ان تكون صائبة وخاطئة معا.

قانون الوسط الاستثنائي

اية عبارة اما تكون صائبة او خاطئة.
ففي القانون الاول، اذا كانت P عبارة، فان قولنا "P و P~" لايؤدي فقط الى عبارة خاطئة؛ ولكن قولنا هذا لامعنى له. لذلك، فاننا لانسمح ابدا لاية عبارتين لنظام بدهي ان تكونا بالشكل "P و P~"!

تعريف ١

يكون النظام البدهي متسقا إذا وفقط اذا لاتوجد في النظام اي بديهيتين، او اي بديهية ومبرهنة، او اي مبرهنتين بالشكل"P و P ¯".

نستنتج من هذا التعريف ان الاتساق هو صفة اساسية لاي نظام بدهي، اي انه في اي نظام بدهي لايوجد تناقض بين اي بديهيتين، اي بديهية ومبرهنة، او اي مبرهنتين. ذلك من الواضح ان النظام الذي تكون فيه عبارة ما ونفيها صحيحا يكون نظاما لامعنى له.

والان كيف نختبر اتساق نظام ما؟ هل نتأكد من جميع المبرهنات؟ اذ من المحتمل وجود مبرهنات لم نتوصل اليها بعد، على كل حال، توجد طريقة اختبار اتخذت لهذا الغرض.

تعريف ٢

*تفسير نظام بدهي هو اعطاء معاني للكلمات الاولية التقنية بطريقة بحيث تصبح البديهيات اما صائبة او خاطئة.

تعريف ٣

يقال للتفسير الذي يجعل كل بديهية في مجموعة من بديهيات صائبة بانه نموذج(a model).

طريقة اختبار الاتساق

اذا وجد نموذج لمجموعة من بديهيات، فان

المجموعة تكون متسقة.

اذا وجد نموذج لمجموعة من بديهيات، فان جميع البديهيات في النظام تكون عبارات صحيحة. وبما ان المبرهنات تستنتج من البديهيات، فان المبرهنات تصبح عبارات صحيحة. ان فكرة النموذج هي مهمة جدا في المفهوم الذي يعطي معنى فيزياويا للكلمات الاولية وكذلك يبين على انه يوجد شيء ما من الحقيقة. طالما الغرض من النظام المنطقي هو لايجاد الحقيقة.

٢-٢ نماذج عن الاتساق

نقدم فيما يلي نماذج تبين ان المستوي التآلفي هو نظام متسق.

نموذج (١)

نفرض ان كلية التربية قد كرمت الثلاثة الاوائل في كل من المراحل: الثانية، الثالثة، والرابعة، وتقرر ايفادهم الى تسع دول لغرض الاطلاع. وقسمت اللجان الى مجموعات مكونة من ثلاثة اعضاء، بحيث ان طالبا واحدا من كل مرحلة في لجنة. وان كل لجنة من اللجان الثلاثة تقضي اسبوعا واحدا في دولة، ثم يعاد تشكيل اللجان وبطريقة انه لايشترك طالبان في لجنتين معا. ثم تقضي اللجان الجديدة اسبوعا واحدا في ثلاث دول اخرى (اي ان كل لجنة في دولة واحدة). وهكذا من اجل التوضيح، ان توزيع اللجان سيكون كما يلي:

طلبة المرحلة الثانية: A, B, C
طلبة المرحلة الثالثة: D, E, F
طلبة المرحلة الرابعة: G, H, I
مصر: A, D, G
الاردن: B, E, H
اليمن: C, F, I
السودان: A, E, I
الجزائر: B, F, G
تونس: C, D, H
المغرب: A, F, H
ايطاليا: B, D, I
فرنسا: C, E, G

في هذا النموذج، نفسر "النقاط" على انها طلاب "والمستقيمات" باللجان، والعلاقة "ينتمي الى" بعضو في. يبين هذا التفسير انه نموذج لمجموعة بديهيات المستوى التآلفي، لان جميع البديهيات قد تحققت وبنفس الطريقة، تبين النماذج الثلاثة التالية ان المستوى التآلفي هو نظام متسق:

نموذج (٢)

(٩نقاط، ١٢مستقيم)

1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	6
2	3	5	7	3	5	7	4	5	5	7	8
4	6	8	9	9	6	8	8	7	9	6	9

في هذا النموذج "النقاط" هي اعداد "والمستقيمات" هي

اعمدة من اعداد.

نموذج (٣)

(١٦نقطة، ٢٠مستقيم)

1	5	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	9	10
2	6	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	11	12
3	7	9	10	11	12	10	11	12	9	11	15	9	13	14	9	13	10	14	13
4	8	13	14	15	16	16	13	14	15	12	16	10	14	15	12	16	11	16	15

نموذج (٤)

الهندسة الاقليدية الاعتيادية.

حيث ان الهندسة الاقليدية تعتبرنموذجايتحقق فيه كل بديهيات المستوى التالفي

نأخذ الآن نماذج اخرى تبين اتساق المستوى الاسقاطي.

نموذج (٥)

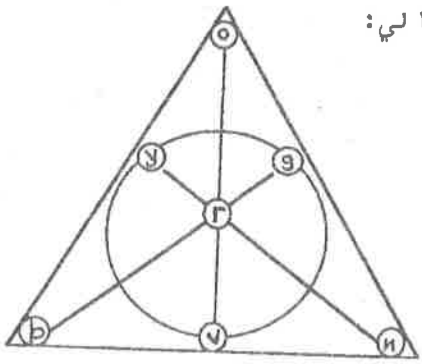
نفرض ان الهيئة التدريسية في قسم الرياضيات في كلية التربية تتكون من سبعة اعضاء. وان القسم قد قرر تأليف لجان لوضع مناهج في مواضيع معينة في الرياضيات. لقد اتفق على ان تتألف كل لجنة من ثلاثة اعضاء، بحيث لايشترك اثنان في لجنتين معا وبالشكل التالي:

اللجان	الاعضاء
الهندسة	A, B, C
التفاضل	B, D, F
التبولوجي	C, D, E
التحليل الرياضي	D, A, G
الجبر الخطي	E, A, F
المعادلات التفاضلية	F, G, C
اسس الرياضيات	G, E, B

في هذا النموذج نفسر "النقاط" بالاعضاء والمستقيمات باللجان المذكورة اعلاه. ان كل بديهية في المستوى الاسقاطي متحققة بهذا النموذج، وبنفس الطريقة بالنسبة للنماذج الثلاثة التالية:

نموذج (٦)

يقوم صاحب محل صياغة بصنع حلية مكونة من سبع خرزات مختلفة الالوان. وقد ربطها بسبعة اسلاك بحيث انه توجد ثلاث خرزات في كل سلك وثلاثة اسلاك في كل خرزة. الالوان: الاصفر، الاحمر، البرتقالي، الابيض، البنفسجي، السماوي، والاخضر. ان الحلية بدت كما في الشكل التالي:



شكل (٤)

في هذا النموذج نفسر "النقطة" على انها خرزة "والمستقيم" بسلك. وقد رتبت الاسلاك والخرزات كما يلي:

$w_1=\{b,y,o\}$, $w_2=\{w,g,o\}$ $w_3=\{w,y,r\}$, $w_4=\{b,g,r\}$,

$w_5=\{w,b,v\}$, $w_6=\{y,g,v\}$, $w_7=\{o,r,v\}$

نموذج (٧)

(٧ نقاط، ٧ مستقيمات)

1	1	1	2	2	3	3
2	4	6	4	5	4	5
3	5	7	7	6	6	7

نفسر "النقطة" بعدد والمستقيم بعمود.

نموذج (٨)

(١٣ نقطة، ١٣ مستقيم)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1	2	3
10	11	12	13	1	2	3	4	5	6	7	8	9

نفسر "النقطة" بعدد "والمستقيم" بعمود.

من الواضح ان النموذجين (١)و(٢) يبينان ان نظام يونك متسق، بينما النماذج ٥ ، ٦ و٧ تبين ان

نظام فانو متسق.

ليس من الضروري ان نأخذ جميع هذه النماذج لبيان ان نظاما ما متسق، كل مانحتاجه هو نموذج واحد على الاقل. على كل حال، سنجد استعمالات اخرى لبعض من هذه النماذج نذكرها فيما بعد.

يجب ان نلاحظ ان نموذجا عن المستوي التآلفي يمكن نحصل عليه من نموذج لمستوي اسقاطي وذلك بحذف مستقيم واحد . وبالعكس، يمكن ان نحصل على نموذج لمستوى اسقاطي من نموذج لمستوى تآلفي وذلك باضافة مستقيم واحد. (تأكد من ذلك).

٢-٣ الاستقلال Independence

بعد اختيارنا لمجموعة من بديهيات واختبارنا اتساقها، يتبادر الى الاذهان فيما اذا كانت احدى البديهيات مشتقة من البديهيات الاخرى في المجموعة، او بتعبير آخر، كيف نعرف ان بديهية ما هي ليست مبرهنة؟ فالاستقلالية تعني انه لاتوجد بديهية في النظام يمكن برهنتها من بقية البديهيات في النظام. اما اذا امكن استنتاج بديهية ما من بقية البديهيات، ففي هذه الحالة يمكن اعتبارها كمبرهنة، لكي نختبر استقلال بديهية ما في مجموعة من بديهيات، نأخذ التعريف التالي:

تعريف ٤

يقال عن عبارة انها مستقلة في مجموعة من عبارات اذا لم نتمكن من اشتقاقها من بقية العبارات في المجموعة. كما في حالة الاتساق، توجد طريقة

لاختبار الاستقلال.

طريقة الاختبار

اذا كانت مجموعة بديهيات متسقة وعندما العبارة المراد اختبارها تبدل بنفيها، فيوجد نموذج للمجموعة الجديدة، فان العبارة المراد اختبارها تكون مستقلة.

ذلك يعني، اذا كان

١) مجموعة البديهيات $A_1,\ldots,A_i,\ldots,A_n$ مجموعة متسقة.

٢) المجموعة $A_1,\ldots,\sim A_i,\ldots,A_n$ مجموعة متسقة، فان A_i تكون مستقلة

حيث اذا كانت المجموعة $A_1,\ldots,A_i,\ldots,A_n$ متسقةو A_i مبرهنة، فانه يمكن استنتاجها من البديهيات الاخرى، وفي هذه الحالة نقيض A_i سوية مع البديهيات الاخرى لايمكن ان تكون المجموعة متسقة، اي انه لايوجد نموذج لمثل هذه المجموعة من العبارات.

والان نبين ان كل بديهية في المستوى التآلفي مستقلة.

استقلال البديهية ١

ليكن $l=\{1,2,3\}$ ، $m=\{4,5,6\}$

ان هذا التفسير يتكون من مجموعتين كمستقيمين وستة عناصر كنقاط. بالتأكيد هذا التفسير يحقق نفي بديهية١ ، لان النقطتين 1 و 4 على سبيل المثال، لايوجد مستقيم يحتويهما. الاختبار الدقيق يبين ان البديهيات الباقية متحققة، وبما ان المستوي التآلفي متسق، اي ان الشرطين (١)و(٢) يتحققان، في هذه

الحالة يتبين ان البديهية١ مستقلة.
اما النموذج التالي (٦ نقاط، ١٠ مستقيمات) يحقق ايضا نفي بديهية١ ، حيث يوجد مستقيمان، كمثال {1,2,3} ,{1,3,4} يحتويان 1 و 3

1	2	1	2	2	1	3	1	1	4
3	5	5	3	3	4	5	2	2	5
4	6	6	4	5	6	6	4	3	6

وبنفس الطريقة نبين ان جميع البديهيات الباقية مستقلة

استقلال البديهية ٢

(٤ نقاط، ٦ مستقيمات)

1	3	1	2	1	2
2	4	3	4	4	3

استقلال البديهية ٣

(٤ نقاط، مستقيم واحد)

l={1,2,3,4}

استقلال البديهية ٤

نأخذ اي نموذج لاتساق المستوي الاسقاطي، اي النماذج ٥ ، ٦ ، ٧ او ٨ التي ذكرت في موضوع الاتساق.
ففي تلك النماذج، اي مستقيمين يتقاطعان، لذلك

لاتوجد خطوط متوازية، اما في النموذج التالي، فانه توجد مستقيمات يوازيها اكثر من مستقيم واحد من نقاط خارجة عنها

النموذج

(١٩ نقطة، ٢٩ مستقيم)

1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3
2	5	6	7	8	12	5	6	7	8	11	5	6	7	8
3	9	16	14	10	15	16	10	12	9	13	12	9	11	17
4	13	11	19	18	17	18	14		15	19	14	19	15	13
							17						18	

3	4	4	4	4	4	5	5	6	7	8	9	13	17
10	5	6	7	8	9	6	10	12	9	11	10	14	18
16	11	15	10	12	14	7	15	18	16	14	11	15	19
	17		13	16	18	8	19	18	17		12	16	
				19									

وبالنتيجة، لابد ان نشير هنا الى ان الاستقلالية هي غير اساسية، حيث اذا وجدت احدى البديهيات غير مستقلة، اي انها مبرهنة، فبدلا من ان توضع في مجموعة البديهيات، توضع في مجموعة المبرهنات. اما بالنسبة الى استقلال بديهيات المستوي الاسقاطي فتترك كتمرين.

تمارين ٢-٣

١- مما يلي اختار نماذج مبينا استقلال كل بديهية في المستوى الاسقاطي

التفسيرات:

أ)

1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	7
2	4	5	6	4	5	6	4	5	6	5	8
3	9	7	8	7	8	9	8	9	7	6	9

ب) l={1,2,3}, m={1,4,5,6}

ج)

1	1	1	2
	2	3	3

د)

1	1	2
2	2	3
3	4	4

هـ) l={1,2,3,4}

و)

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
4	5	6	7	1	2	3

ز) نقطة واحدة، لايوجد مستقيم

ح) l={1,2,3}, m={1,4,5}

ط) $l=\{1,2,3\}, m=\{4,5,6\}$

ي) $l=\{1,2\}, m=\{1,3\}, n=\{2,3\}$

ك)
$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 6 & 5 & 6 & 6 & 4 \end{array}$$

ل) $l=\{1,2,3\}, m=\{1,2,4\}, k=\{2,3,4\}$ و $n = \{1, 3, 4\}$

٢- لاحظ النظام البدهي التالي:

مجموعة البديهيات

١- اي مستقيمين مختلفين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.
٢- كل نقطة يمر بها مستقيمان فقط.
٣- توجد بالضبط أربعة مستقيمات في هذا النظام.

أ) بين ان النظام متسق.
ب) حاول ايجاد نماذج لاستقلال كل بديهية في هذا النظام.
جـ) برهن على ان كل مستقيم في هذا النظام يحتوي على ثلاث نقاط فقط.

٢-٤ التمام Completeneess

اية عبارة تتعلق بالكلمات الاولية في نظام معين

وان لم تكن بديهية فاما هي او نفيها تكون مبرهنة في النظام. فلو كان بالامكان اثبات صدقها، فانها مبرهنة، واذا ثبت خطئها، فان نفيها يكون مبرهنة.

اما اذا وجدت عبارة ليس بالامكان اثباتها او دحضها بواسطة البديهيات وذلك لعدم كفاية البديهيات، ففي هذه الحالة يمكن اضافة عدد آخر اليها لتكون كافية لاثبات العبارة او نفيها.

تعريف ٥

يكون النظام البدهي غير تام اذا امكن اضافة بديهية مستقلة. اما اذا لم نتمكن من اضافة مثل هذه البديهية، فان النظام يكون تاما.

تكون البديهيات في النظام التام كافية لاثبات او دحض اية عبارة. ولكن هل من الممكن معرفة متى يكون النظام تاما؟ قبل ان نأخذ طريقة الاختبار، علينا ان نقدم مفاهيم جديدة ومهمة في الرياضيات.

ليكن M_1,M_2 نموذجين لنظام معين يحتويان على عدد متساو من العناصر. ان كل عنصر في M_1 يقابل عنصرا معينا في M_2 وبالعكس، في هذه الحالة، يقال انه يوجد تناظر متباين (تقابل-احادي) بين M_1,M_2.

يقال عن هذا التقابل الاحادي بين عناصر M_1,M_2 انه يحفظ العلاقات (preserve relations) اذا كانت كل عبارة صحيحة حول عناصر M_1 هي ايضا صحيحة حول العناصر المقابلة لها في M_2.

تعريف ٦

يقال عن نموذجين لنظام بدهي انهما متشاكلين تقابليا (isomorphic) بالنسبة الى ذلك النظام اذا

وجد على الاقل تقابل آحادي واحد بين عناصر النظام بحيث يحفظ العلاقات.

تعريف ٧

عندما يكون اي نموذجين في النظام البدهي متشاكلين تقابليا، فان النظام يقال انه فصيلي (Categorical).

طريقة الاختبار

اذا كان النظام فصيليا، فانه يكون تاما. اي انه بتعبير آخر، عندما يكون اي نموذجين في النظام متشاكلين تقابليا، فان النظام يكون تاما.

البرهان

نفرض ان نظاما بدهيا يكون فصيلي، لكنه غير تام. اذا لم يكن تاما، فانه يمكن اضافة بديهية مستقلة ولتكن A_n الى مجموعة من بديهيات النظام $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ بما ان A_n بديهية مستقلة، فان:

١) المجموعة $A_1, A_2, \dots, A_n$ تكون متسقة

٢) المجموعة $A_1, A_2, \dots, \sim A_n$ تكون متسقة لذلك، فانه يوجد نموذجان للمجموعتين ١) و٢).

بما ان النظام فصيلي، فان هذين النموذجين يكونان متشاكلين تقابليا، لذلك، فالعبارات المتناظرة في النموذجين اما كل منهما صائبة اوكل منهما خاطئة. وهذا غير ممكن، حيث انه من الفرض "A_n" تكون صائبة في نموذج وتكون "$\sim A_n$" صائبة في النموذج

الاخر. لذلك يؤدي هذا الفرض الى خطأ، وبهذا، اذا كان النظام فصيليا، فانه يكون تاما.

ان النموذجين (٧) و(٨) في المستوى الاسقاطي غير متشاكلين تقابليا لانهما لايحتويان على نفس العدد من العناصر، فيكون المستوى الاسقاطي غير تاما. وكذلك فالمستوى التآلفي يكون غير تاما لان النموذجين (١) و (٣) لايحتويان على نفس العدد من العناصر، اي انهما غير متشاكلين تقابليا. بينما نظام يونك يكون تاماً لانه يتحقق فقط بالنموذج المكون من ٩ نقاط و١٢ خط. كذلك نظام فانو يكون تاما لانه يتحقق فقط بالنموذج المكون من ٧ نقاط و٧ خطوط. حيث ان اي نموذجين في نظام يونك او نظام فانو يحتويان على نفس العناصر، حيث يرمز برموز مختلفة لنفس العناصر.

وبالنتيجة، لابد ان نشير هنا الى ان التمامية هي خاصية ليست اساسية وبصورة عامة غير مفضلة.

في الفصل الحادي العشر، سندرس الهندسة الاسقاطية مع البديهيات الاربعة، وسنضيف بديهيات اكثر لكي تكون مجموعة البديهيات تامة.

امثلة

نأخذ النموذجين (١) و(٢) في المستوي التآلفي

نموذج (١)

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
A	D	G	A	B	C	A	B	C	A	B	C
B	E	H	D	E	F	E	F	D	F	D	E
C	F	I	G	H	I	I	G	H	H	I	G

نموذج (٢)

a•	b•	c•	d•	e•	f•	g•	h•	i•	j•	k•	l•
1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	6
2	3	5	7	3	5	7	4	5	5	7	8
4	6	8	9	9	6	8	8	7	9	6	9

هناك مئات من الطرق لوضع تقابل احادي بين النموذجين، نأخذ التقابل التالي:

A⇔1
B⇔2
C⇔3
D⇔4
E⇔5
F⇔7
G⇔8
H⇔6
I⇔9

من اجل ايجاد تقابل احادي بين المستقيمات، يجب ان يكون التقابل بطريقة بحيث يحفظ العلاقات، فمثلا، بما ان A, B, C تقع على المستقيم a، يجب ان نتأكد من وجود مستقيم في النموذج (٢) يحتوي على العناصر المقابلة لهذه النقاط، اي انه، يوجد مستقيم يحتوي على النقاط 1, 2, 3, لكنه لايوجد مثل هذا المستقيم في النموذج (٢)، لذلك، لايكون هذا التقابل يحفظ العلاقات.

والآن لو اخذنا التقابل التالي:

$A \Leftrightarrow 1$
$B \Leftrightarrow 2$
$C \Leftrightarrow 4$
$D \Leftrightarrow 5$
$E \Leftrightarrow 3$
$F \Leftrightarrow 7$
$G \Leftrightarrow 8$
$H \Leftrightarrow 9$
$I \Leftrightarrow 6$

وكذلك يوجد تقابل بين المستقيمات بحيث يحفظ العلاقات. فمثلا بما ان A, B, C تقع على المستقيم a، فيجب ان يكون هناك مستقيم يناظره a يحتوي على النقاط 1, 2, 4, وهكذا يوجد تناظر بالنسبة لبقية المستقيمات كما نبينها الان:

$a \Leftrightarrow a^*$	$g \Leftrightarrow b^*$
$b \Leftrightarrow i^*$	$h \Leftrightarrow g^*$
$c \Leftrightarrow l^*$	$i \Leftrightarrow j^*$
$d \Leftrightarrow c^*$	$j \Leftrightarrow d^*$
$e \Leftrightarrow e^*$	$k \Leftrightarrow f^*$
$f \Leftrightarrow k^*$	$l \Leftrightarrow h^*$

ان النموذجين يكونان في هذه الحالة متشاكلين.
لذلك لبيان ان نموذجين متشاكلان. فاننا نحتاج الى تقابل واحد بحيث يحفظ العلاقات.

تمارين ٢-٤

١- نفرض ان مايلي هو نموذج للمستوى التآلفي. جد

تقابل احادي يحفظ العلاقات بينه وبين النموذج (٢).

1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	5
2	4	6	8	4	5	7	4	5	6	7	6
3	5	7	9	6	8	9	9	7	8	8	9

٢- جد تقابل احادي يحفظ العلاقات بين:

أ) النموذج (٥) والنموذج (٦) في المستوي الاسقاطي.

ب) النموذج (١) للمستوي التآلفي مع نفسه.

جـ) النموذج (٧) للمستوي الاسقاطي مع نفسه.

٣- هل تستطيع ايجاد تقابل احادي لايحفظ العلاقات بين:

أ) النموذج (٥) والنموذج (٦) للمستوي الاسقاطي.

ب) النموذج (١) والنموذج (٢) للمستوي التالفي.

أ - سؤسق

الفصل الثالث
نقد اقليدس

نقدم في هذا الفصل التعاريف والبديهيات التي ذكرها اقليدس في كتابه (الاصول) والتي استنتج منها مبرهناته. وسنعطي دراسة انتقادية للنظام البدهي لاقليدس الذي هو الاساس للهندسة المستوية الاقليدية. سنشير الى بعض العيوب في طرق براهين اقليدس لمبرهناته. ومن ثم نبين طرق تحسينها، وكذلك سنذكر النواقص من البديهيات التي استخدمت بدون ان يذكر اي نص لها.

لقد استنتج اقليدس والذين سبقوه من الفلاسفة انه لايمكن اثبات كل شيء، فعند وضع بناء منطقي يجب ان تؤخذ بعض العبارات بدون برهان ثم تستنتج بقية العبارات منها. ففي الهندسة لايمكن برهان اي عبارة بدون فرض لان البرهان لابد ان يستند الى اشياء مفروضة بغير مناقشة. لذا فقد اعطى اقليدس ثلاثة وعشرين تعريفا وعشر فرضيات ومن ثم ثمان واربعين مبرهنة مع براهينها.

سنقدم في الفصول القادمة النظام المتكامل للهندسة الاقليدية الذي قدمه هلبرت الذي فيه يصحح عيوب اقليدس.

٣-١ التعاريف

١- النقطة هي التي ليست لها ابعاد.
٢- المستقيم هو طول بدون عرض.

٣ـ نهايات المستقيم هي نقاط.
٤ـ الخط المستقيم هو الخط الذي يقع كليا على نقاطه.
٥ـ السطح هو الذي له طول وعرض فقط.
٦ـ نهايات السطح هي خطوط.
٧ـ السطح المستوي هو ذلك السطح الذي يقع كليا على مستقيماته.
٨ـ الزاوية المستوية هي ميلان احد مستقيمين متقاطعين عن الآخر في مستوي ولايقعان على مستقيم واحد.
٩ـ عندما يكون المستقيمان المكونان للزاوية على استقامة واحدة تسمى تلك الزاوية بالزاوية المستقيمة.
١٠ـ عندما يقطع مستقيم مستقيما آخرا ويصنع زاويتين متجاورتين متساويتين، فان كلا من الزاويتين المتساويتين تسمى قائمة والمستقيم المرسوم يسمى عمودا على الاخر.
١١ـ الزاوية المنفرجة هي الزاوية التي تكون اكبرمن قائمة.
١٢ـ الزاوية الحادة هي الزاوية التي تكون اصغر من قائمة.
١٣ـ حدود الشيء اطرافه.
١٤ـ الشكل هو كل ما يكون ضمن حدود.
١٥ـ الدائرة هي شكل مستوي محاط بخط بحيث ان كل اجزاء المستقيمات الواقعة على الخط من نقطة واحدة مشتركة داخل الشكل، تكون متساوية في ما بينها.
١٦ـ والنقطة تدعى مركز الدائرة.
١٧ـ قطر الدائرة هو اي مستقيم مرسوم من المركز ومنته في الاتجاهين بمحيط الدائرة، وهذا الخط المستقيم ينصف الدائرة.

١٨ـ نصف الدائرة هو الشكل المحاط بالقطر والمحيط المقطوع به، ومركز نصف الدائرة هو مركز الدائرة نفسه.

١٩ـ الاشكال المضلعة هي الاشكال المحاطة بخطوط مستقيمة والشكل الثلاثي محاط بثلاثة مستقيمات. والشكل الرباعي باربعة مستقيمات، والمضلع ماكان محاط باكثر من اربعة مستقيمات.

٢٠ـ من الاشكال الثلاثية، المثلث المتساوي الاضلاع وهو الذي تكون اضلاعه الثلاثة متساوية. والمثلث المتساوي الساقين فيه ضلعين فقط متساويين، والمثلث المختلف الاضلاع هو الذي تكون اضلاعه مختلفة.

٢١ـ واضافة الى ذلك، من الاشكال الثلاثية، المثلث القائم الزاوية الذي فيه زاوية قائمة واحدة. والمثلث المنفرج الزاوية الذي فيه زاوية منفرجة واحدة. والمثلث الحاد الزوايا هو الذي تكون زواياه الثلاثة حادة.

٢٢ـ من الاشكال الرباعية، المربع الذي تكون اضلاعه متساوية وزواياه قوائم، والمستطيل الذي زواياه قوائم واضلاعه غير متساوية والمعين الذي اضلاعه متساوية وزواياه ليست قوائم وشبه المعين الذي فيه زواياه المتقابلة متساوية واضلاعه المتقابلة متساوية ولكن ليس متساوي الاضلاع ولاقائم الزوايا. والاشكال الرباعية الاخرى من غير هذه تدعى منحرفة.

٢٣ـ الخطوط المستقيمة المتوازية هي الخطوط المستقيمة التي تقع في مستوي واحد والتي لاتلتقي مهما امتدت في اي الاتجاهين.

٣-٢ الفرضيات

لقد اعطى اقليدس عشر فرضيات وقد قسمها الى مجموعتين سمى المجموعة الاولى مفاهيم عامة والثانية بالبديهيات (او الفرضيات).

مفاهيم عامة (Common Notions)

١- الاشياء المساوية لشيء واحد متساوية فيما بينها.
٢- اذا اضيفت كميات متساوية الى اخرى متساوية تكون النتائج متساوية.
٣- اذا طرحت كميات متساوية من اخرى متساوية تكون النتائج متساوية.
٤- الاشياء المتطابقة متساوية فيما بينها.
٥- الكل اكبر من الجزء.

البديهيات (Postulates)

١- من الممكن رسم خط مستقيم من اي نقطة الى اي نقطة.
٢- يمكن مد قطعة المستقيم من جهتيها الى غير حد.
٣- يمكن رسم دائرة اذا علم مركزها ونصف قطرها.
٤- جميع الزوايا القوائم متساوية.
٥- اذا قطع مستقيمان بمستقيم ثالث بحيث كان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع اقل من قائمتين، فان المستقيمين، اذا مدا بغير حد، يتلاقيان في تلك الجهة من القاطع التي يكون فيها مجموع الزاويتين اقل من قائمتين.

تعتبر البديهية الخامسة نقطة البداية في دراسة الهندسة اللااقليدية، حيث كانت مثار جدل ومناقشة. فعند دراسة مبرهنات اقليدس الثماني والاربعين، نجد ان اقليدس برهن اول ٢٨ مبرهنة دون ان يستعمل البديهية الخامسة، مما اثار انتباه العلماء الذين اتوا بعد اقليدس، مما جعل قسما منهم يعتقد بان البديهية الخامسة يجب ان تكون مبرهنة ولذا يجب ان تبرهن. سنركز اهتمامنا حول هذا الموضوع في الفصل الثامن.

٣-٣ *المبرهنات*

فيما يلي المبرهنات الثماني والاربعين التي بعضها عمليات.

١- كيفية رسم مثلث متساوي الاضلاع على مستقيم معلوم ومنته في الطول.
٢- كيفية رسم مستقيم من نقطة معلومة طوله يساوي طول مستقيم معلوم.
٣- من اكبر مستقيمين معلومين كيفية قطع جزء يساوي اصغر المستقيمين.
٤- اذا ساوى ضلعان والزاوية المحصورة بينهما من مثلث ضلعين والزاوية المحصورة بينهما من مثلث آخر، على التناظر، فانه يتساوى المثلثان وتتساوى الزوايا المتناظرة والضلع من احدهما نظيره من الاخر.
٥- في المثلث المتساوي الساقين تتساوى زوايا القاعدة واذا مد الضلعان المتساويان فالزاويتان الواقعتان تحت القاعدة تتساويان ايضا.
٦- اذا تساوت زاويتان في مثلث فالضلعان المقابلان

لهما متساويان.

٧- اذا رسم مستقيمان من طرفي مستقيم معلوم وتلاقيا في نقطة، فانه لايمكن رسم مستقيمين آخرين يساويان المستقيمين على التناظر وفي طرفي المستقيم المعلوم نفسه ومتلاقيان في نقطة آخرى في الجهة نفسها من المستقيم المعلوم.

٨- اذا ساوى ضلعان في مثلث ضلعي آخر على التوالي وتساوت قاعدتاهما تساوت زواياهما على التناظر.

٩- كيفية تنصيف زاوية مستوية.

١٠- كيفية تنصيف مستقيم معلوم طوله منته.

١١- كيفية اقامةعمود على مستقيم معلوم من نقطة مفروضة عليه.

١٢- كيفية رسم مستقيم عمود على مستقيم معلوم من نقطة خارجة عنه.

١٣- اذا لاقى مستقيم مستقيما معلوما، فانه يصنع اما زاويتين قائمتين او زاويتين مجموعهما يساوي زاويتين قائمتين.

١٤- اذا رسم من نقطة معلومة على مستقيم معلوم مستقيمان وعلى جهتيه المختلفين وكان مجموع الزاويتين المتجاورتين يساوي زاويتين قائمتين فالمستقيمان يقعان على مستقيم واحد.

١٥- اذا تقاطع مستقيمان فالزاويتان المقابلتان بالرأس متساويتان.

١٦- اذا مد احد اضلاع مثلث فالزاوية الخارجية تكون اكبر من كل الزاويتين الداخليتين المقابلتين لهما.

١٧- مجموع زاويتان في مثلث كيفما اتخذت اقل من زاويتين قائمتين.

١٨- في اي مثلث يكون اكبرالاضلاع مقابلا لاكبر الزوايا.

١٩- في اي مثلث تكون الزاوية الكبرى مقابلة لاكبر

الاضلاع.

٢٠- مجموع اي ضلعين في مثلث اكبر من ضلعه الثالث.

٢١- اذا رسم من طرفي قاعدة مثلث، مستقيمان وتلاقيا في نقطة داخل المثلث فالمستقيمان اصغر من ضلعي المثلث، ويحصران زاوية اكبر من الزاوية المحصورة بين ضلعي المثلث.

٢٢- كيفية رسم مثلث اضلاعه تساوي ثلاثة مستقيمات معلومة. ومن الضروري ان يكون مجموع اي زوج من المستقيمات اكبر من المستقيم الثالث.

٢٣- من نقطة على مستقيم معلوم، كيفية رسم زاوية مستقيمة تساوي زاوية معلومة.

٢٤- اذا ساوى ضلعان في مثلث، ضلعين في مثلث آخر، على التوالي. وكانت الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الاول اكبر من نظيرتها في المثلث الثاني، فان الضلع الثالث في المثلث الاول اكبر من الضلع الثالث في المثلث الثاني.

٢٥- اذا ساوى ضلعا مثلث ضلعي مثلث آخر، على التوالي. وكان الضلع الثالث في المثلث الاول اكبر من الضلع الثالث في المثلث الثاني، فالزاوية المحصورة بين الضلعين المتساويين في المثلث الاول اكبر من الزاوية المحصورة بين الضلعين المتساويين في المثلث الثاني.

٢٦- اذا ساوت زاويتان وضلع من مثلث زاويتين وضلعا مناظرا من مثلث آخر، على التوالي، فالضلعان الآخران والزاوية الثالثة في المثلث الاول تساوي الضلعين الاخرين والزاوية الثالثة في المثلث الثاني.

٢٧- اذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت الزاويتان المتبادلتان متساويتين يكون المستقيمان متوازيين.

٢٨ـ اذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت الزاوية الخارجية تساوي الزاوية الداخلية والمقابلة لها في نفس الجهة من القاطع، او كان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع يساوي قائمتين، يكون المستقيمان متوازيين.

٢٩ـ اذا قطع مستقيمان متوازيان بقاطع، فان الزاويتين الداخليتين المتبادلتين متساويتان والزاوية الخارجية تساوي الزاوية الداخلية المقابلة لها وكذلك مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع يساوي قائمتين.

٣٠ـ المستقيمات الموازية لمستقيم واحد تكون متوازية فيما بينها.

٣١ـ يمكن رسم موازي لمستقيم من نقطة خارجة عنه.

٣٢ـ اذا مد احد اضلاع مثلث، فالزاوية الخارجية تساوي مجموع الزاويتين الداخليتين المقابلتين لها ويكون مجموع الزوايا الثلاث للمثلث قائمتين.

٣٣ـ المستقيمان الواصلان بين النهايات المتقابلة لمستقيمين متوازيين ومتساويين (على التوالي) يكونان متساويين ومتوازيين.

٣٤ـ الزوايا المتقابلة والاضلاع المتقابلة في متوازي الاضلاع تكون متساوية والقطر ينصف المساحة.

٣٥ـ متوازيات الاضلاع المنشأة على قاعدة مشتركة ومحصورة بين متوازيين تكون متساوية.

٣٦ـ متوازيات الاضلاع التي قواعدها متساوية ومحصورة بين مستقيمين متوازيين تكون متساوية.

٣٧ـ المثلثات المشتركة بالقاعدة ومحصورة بين متوازيين تكون متساوية.

٣٨ـ المثلثات التي قواعدها متساوية ومحصورة بين

متوازيين تكون متساوية.

٣٩- المثلثات المتساوية والمشتركة بالقاعدة وواقعة في جهة واحدة منها تكون محصورة بين متوازيين.

٤٠- المثلثات المتساوية والتي قواعدها متساوية وعلى مستقيم واحد وواقعة في جهة واحدة منه تكون محصورة بين متوازيين.

٤١- اذا اشترك متوازي اضلاع ومثلث بقاعدة واحدة وكانا محصورين بين مستقيمين متوازيين، فان المتوازي الاضلاع يكون ضعف المثلث.

٤٢- يمكن انشاء متوازي اضلاع تكون مساحته مساوية لمساحة مثلث معلوم.

٤٣- في متوازي الاضلاع، متممات متوازيات الاضلاع حول القطر مساوية فيما بينها.

٤٤- يمكن انشاء متوازي اضلاع على قاعدة معينة وتساوي مثلث معلوما.

٤٥- يمكن انشاء متوازي اضلاع على مستقيم معلوم بحيث يساوي مضلع معلوم.

٤٦- يمكن رسم مربع على مستقيم معلوم.

٤٧- المربع المنشأ على وتر المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الاخرين.

٤٨- اذا كان المربع المنشأ على احد اضلاع مثلث يساوي مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الاخرين، فان المثلث يكون قائم الزاوية.

٣-٤ بعض مواطن الضعف في نظام اقليدس

١) خلو النظام البدهي لاقليدس من الكلمات الاولية، حيث ان اقليدس يعرف النقطة بانها لابعد لها والمستقيم هو طول بدون عرض، ما هو البعد والطول

والعرض؟. ان اقليدس يعرف الكلمات بواسطة كلمات اخرى قد تكون أصعب من الكلمة نفسها وربما هذه الكلمات تحتاج الى تعاريف اخرى، وهكذا، حيث تكون سلسلة من التعاريف التي قد تنتهي بنفس الكلمة الاولى، لذلك فانه في الانظمة الحديثة قد استخدمت كلمات اولية وبدلالتها تعرف بقية الكلمات في النظام.

٢) لقد استخدم اقليدس بديهيات لم يشير اليها في نظامه لذلك سميت ببديهيات ضمنية او فرضيات ضمنية،وهي:

١- فرضية الاستمرارية
٢- بديهية باخ
٣- بديهيات البينية
٤- وحدانية المستقيم
٥- لانهائية المستقيم.
٦- بديهيات الترتيب الخطية

٣) يستعمل اقليدس كلمة يساوي، بينما في الانظمة الحديثة يعني تطابق، فمثلا، عندما يقال زاويتان متساويتان، نقول بانهما متطابقتان.

٤) اعتمد على الرسم لبرهان مبرهناته وليس مجرد توضيح للبرهان.

٥) ان بديهيات اقليدس ليست كاملة. حيث يكون واضحا لو أخذنا مجموعة بديهيات هلبرت، سنبين اننا نستطيع اضافة بديهيات جديدة الى مجموعة بديهيات اقليدس. طريقة اخرى لبيان ان مجموعة بديهيات اقليدس غير كاملة، وذلك من العبارة التالية: "الخط الذي يصل بين نقطة داخل دائرة

ونقطة خارجها يقطع الدائرة". هذه العبارة لايمكن برهنتها اودحضها. والسبب الاساسي هو عدم اعطاء بديهية الاستمرارية.

نبين فيما يلي طرق اقليدس في برهان مبرهناته.

مبرهنة ١

كيفية رسم مثلث متساوي الاضلاع على مستقيم معلوم ومنته في الطول.

بتعبير آخر، لاي قطعة يوجد مثلث متساوي الاضلاع له القطعة كضلع.

العمل والبرهان

لتكن AB قطعة. من بديهية ٣، توجد دائرة مركزها A ونصف قطرها AB، وكذلك توجد دائرة مركزها B ونصف قطرها AB. لتكن C نقطة تقاطع الدائرتين. من البديهية ١، توجد القطعتان BC وAC .

ومن تعريف الدائرة $BC = AB$ و $AC = AB$

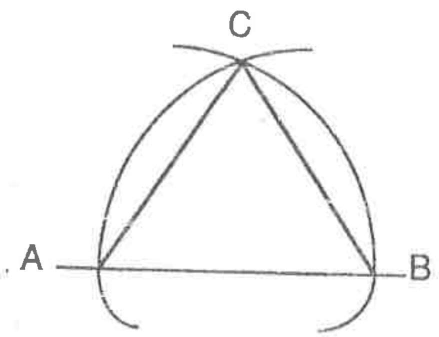
لذلك $AB = BC = AC$

وبهذا يكون المثلث ABC متساوي الاضلاع.

نلاحظ في هذه العملية ان اقليدس لم يبين لنا ان النقطة C موجودة، حيث انه لاتوجد بديهية عن تقاطع دائرتين، وحتى لو فرضنا وجود النقطة C، فمن المحتمل وقوعها على المستقيم AB، وفي هذه الحالة لايوجد المثلث ABC.

نلاحظ كذلك، من البديهية ١، انه لكل نقطتين مختلفتين، توجد قطعة مستقيم يصل بينهما ولكن لم يذكر اقليدس شيئا عن وحدانية القطعة.

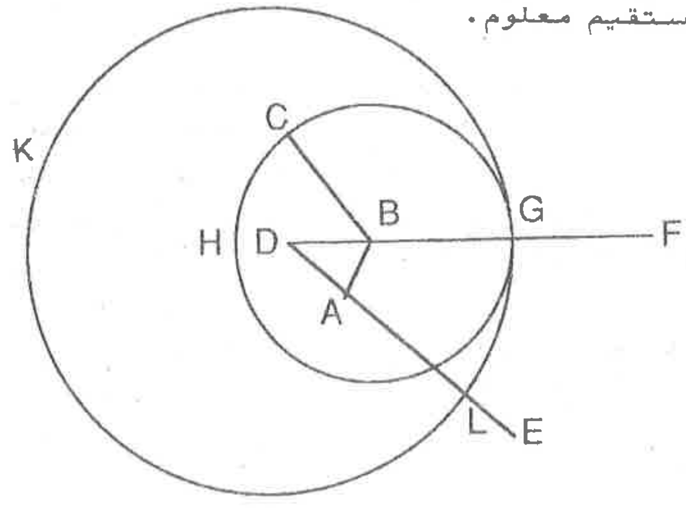
وكذلك ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تكون مثلثا واحداً فقط وهذا لايمكن برهانه من بديهيات اقليدس. في الواقع ان اقليدس لايعرف المثلث بصورة عامة، ولكنه يعرف مثلثات خاصة.



شكل (٥)

مبرهنة ٢

كيفية رسم مستقيم من نقطة معلومة طوله يساوي طول مستقيم معلوم.



شكل (٦)

لتكن A نقطة معلومة و BC مستقيما معلوما. المطلوب رسم مستقيم يمر من A طوله يساوي المستقيم BC.

يوجد مستقيم AB بين النقطتين AوB (بديهية ١)، وعلى هذا الخط يرسم مثلث متساوي الاضلاع DAB (مبرهنة١). تمد قطعة المستقيم AD الى نقطة E وكذلك قطعة المستقيم BD الى F (بديهية ٢). يرسم دائرة مركزها B ونصف قطرها BC ولتكن الدائرة HGC وكذلك يرسم دائرة GKL مركزها D ونصف قطرها DG (بديهية ٣).

بما ان B هي مركز الدائرة CGH، فان BG = BC. ومرة ثانية، بما ان D هي مركز الدائرة GKL، فان DG = DL. وبما ان DA = DB، فان AL = BG (مفاهيم عامة-٣).

وبما ان
BC = BG، فان AL = BG = BC (مفاهيم عامة-١)

اي ان AL = BC

لذلك، من نقطة معلومة A، رسم خطا مستقيما AL طوله يساوي طول مستقيم معلوم.

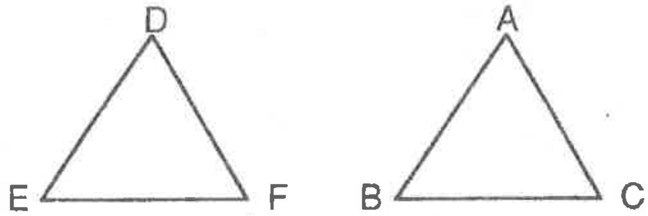
ما هو الخطأ او الخلل في البرهان؟ لو دققنا جيدا في البرهان نلاحظ ان كل العبارات في البرهان نتجت من بديهيات اقليدس، مفاهيم عامة، تعاريف، ومبرهنة ١. الخلل لايقع في العبارات التي استخدمت ولكن استخدمت فرضيات غير مذكورة.

احدى هذه الفرضيات التي استخدمت في البرهان

هي "الخط الذي يمر بنقطة داخل دائرة، يجب ان يقطع الدائرة". لقد استخدمها اقليدس كفرضية مخفية وضحت بالرسم. القواعد المسموحة في الانظمة البدهية، هي اذا كانت عبارة ليست بديهية، تعريف، اومبرهنة، فانها لاتعود الى النظام. الحل هنا ليس صعبا، فنستطيع ان نقدم العبارات نفسها كبديهيات اذا رغبنا.

مبرهنة ٤

اذا ساوى ضلعان والزاوية المحصورة بينهما من مثلث ضلعين والزاوية المحصورة بينهما من مثلث آخر، على التناظر، يتساوى المثلثان وتتساوى الزوايا الباقية والضلع من احدهما نظائرها من الاخر.



شكل (٧)

البرهان

يوضع المثلث ABC على المثلث DEF بحيث ان الراس A يقع على الرأس D، الضلع AB على الضلع DE. وبما ان $AB = DE$، فان النقطة B تقع على E. وبما ان $\angle D = \angle A$، فان الضلع AC يقع على الضلع DF. وبما ان $AC = DF$، فان الرأس C يقع على الرأس F، لذلك، فان $BC = EF$، $\angle B = \angle E$، و $\angle F = \angle C$.

استعمل اقليدس في برهانه هذا طريقة نقل

الاشكال كطريقة للبرهان. قد يكون هذا صحيحا في بعض الحالات، ولكن تحريك مثلث غير ممكن فيزياويا اذ لايمكن بقاء الاشكال على حالها بدون ان تتغير.

سنلاحظ ان هذه المبرهنة هي احدى البديهيات في نظام هلبرت، وقد صاغها بالشكل التالي:

نرمز للقطعة AB بالرمز A-B

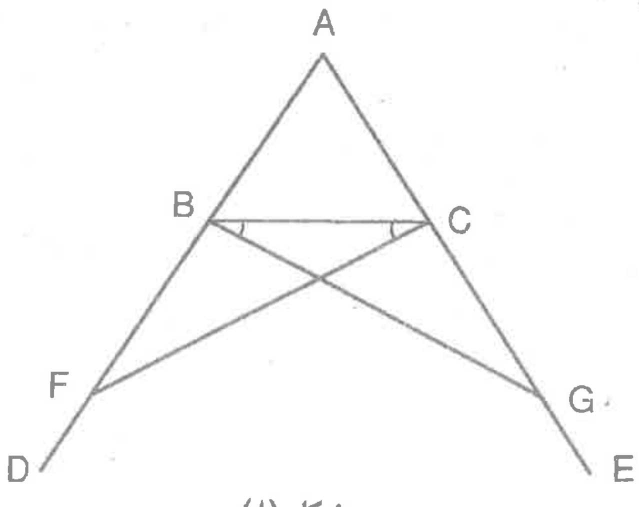
"في المثلثين ABC و DEF، اذا كان $\angle D \doteq \angle A$ و $A-B \doteq D-E$ و $A-C \doteq D-F$،

فان $\angle E \doteq \angle B$ و $\angle F \doteq \angle C$.

مبرهنة ٥

في المثلث المتساوي الساقين تتساوى زوايا القاعدة، واذا مد الضلعان المتساويان فالزاويتان الواقعتان تحت القاعدة تتساويان ايضا.

البرهان



شكل (٨)

ليكن ABC مثلثا متساوي الساقين، وفيه $AB = AC$

يمد AB الى نقطة D فيحصل على BD

ويمد AC الى نقطة E فيحصل على CE.

يجب برهان ان$\angle ACB = \angle ABC$ و $\angle BCE = \angle CBD$.

لتكن F نقطة على BD. لتكن G نقطة على AE ،

بحيث ان $AF = AG$ (عملية ٣)

وبما ان $AB = AC$

فان $BF = CG$ (مفاهيم عامة ٣)

وان$\angle FAG$ مشتركة للمثلثين AFC و ABG، فانه من مبرهنة٤، يتساوى المثلثان AFC و ABG.

لذلك $FC = BG$ و$\angle ABG = \angle ACF$

و $\angle AGB = \angle AFC$

لكن $BG = FC$، $BF = CG$،و$\angle CGB = \angle BFC$ والقاعدة BC مشتركة. لذلك يتساوى المثلثان BFC و CGB. وبذلك، فان$\angle GCB = \angle FBC$ و $\angle CBG = \angle BCF$

بما ان $\angle ACF = \angle ABG$ و $\angle BCF = \angle CBG$

فان$\angle ACB = \angle ABC$ وهما زاويتا القاعدة للمثلث ABC.

وقد برهن ايضا ان$\angle FBC = \angle GCB$ وهما الزاويتان تحت القاعدة.

تخطر على بالنا بعض الاسئلة حول هذا البرهان:

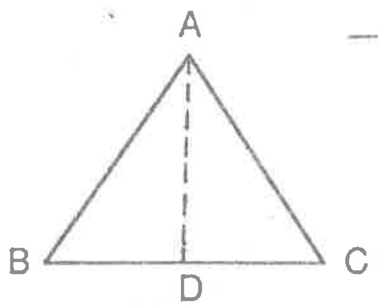
(١) هل يصح$\angle FAG = \angle GAB = \angle FAC = \angle BAC$؟

(٢) هل ان$\angle ABG$ يجب ان تكون اكبر من وتحتوي على $\angle CBG$؟. هل ان$\angle ACF$ يجب ان تكون اكبر من وتحتوي على $\angle BCF$؟

(٣) اذا تحقق (٢)، هل يتحقق طرح الزوايا اي عندما برهن على ان$\angle ACB = \angle ABC$. بالتأكيد الاجابات تكون

نعم، وبالحقيقة لايوجد شيء ماخطأ اذا كانت الاجابة بنعم. لكن هنا نظام بدهي، واسئلتنا ليست على صحة العبارات، لكن فيما اذا كانت هذه العبارات تستنتج من عبارات اخرى ذكر نصها او قد برهنت. الجواب كلا. العبارات اخذت لتكون "صحيحة". من المخططات، تبدو هذه العبارات صحيحة، لكن هذا لايكون جزءا من برهان. اذا لم تكن بديهيات، واذا لم تبرهن، هذه العبارات لاتكون جزءا من البرهان، سواء وجد المخطط او لم يوجد.

برهان آخر لمبرهنة ٥



شكل (٩)

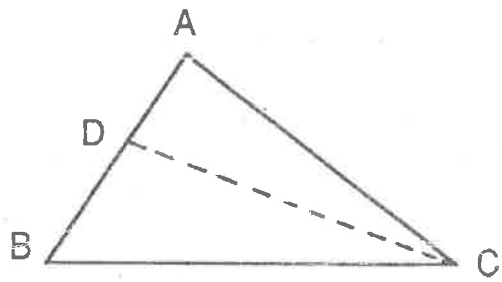
ليكن ABC مثلثا، وفيه AB = AC تنصف زاوية A. ان هذا المنصف يقطع الضلع BC في نقطة D. من مبرهنة ٤ يتساوى المثلثان ABD و ACD، لذا تتساوى الزاويتان B و C.

في هذا البرهان، استخدمت فرضيتين. اذ يفرض ان المنصف لزاوية يكون وحيدا، وعلاوة على ذلك، يفرض ان منصف زاويةمن مثلث يقطع الضلع المقابل. ان اقليدس لم يبرهن الفرضية الاولى واهمل الثانية، والتي لايستطع برهانها من مجموعة بديهياته حتى لو اخذها بنظر الاعتبار. ان هذه حقائق واضحة في الهندسة ولكن هل ممكن برهانها من النظام المعطى.

كتوضيح آخر للفرضيات الضمنية التي استخدمها اقليدس، ناخذ المبرهنة التالية:

مبرهنة ٦

اذا تساوت زاويتان في مثلث، فالضلعان المقابلان لهما متساويان



شكل (١٠)

البرهان

ليكن ABC مثلثا، وفيه الزاوية ABC تساوي الزاوية ACB، يجب برهان ان الضلع AC = AB.
اذا لم يكن AB يساوي AC، فان احدهما هو اكبر من الاخر. ليكن AB اكبر من AC.
من AB تقطع DB تساوي الى AC (عملية ٣).
يوجد المستقيم DC (بديهية ١)

بما ان DB = AC، و BC مشترك للمثلثين ABC و DCB. والزاوية ACB تساوي الزاوية DBC، فانه من مبرهنة ٤، AB = DC، ويتساوى المثلثان ABC و DCB، الاكبر يساوي الاصغر، وهذا تناقض. لذلك AB لايساوي AC يؤدي الى تناقض، وبهذا فان AB = AC.
لقد افترض اقليدس في هذا البرهان مبدأ

الانقسام الثلاثي لاطوال القطع (وبعدها استخدمه لقياس الزوايا))، حيث فرض بالنسبة للقطعتين AB و AC. يتحقق شرط واحد فقط مما يلي: AB = AC، AB اصغر من AC، AC اصغر من AB.

من الواضح ان برهانه هذا قد تم بواسطة التناقض. ولكن اين التناقض بالضبط؟ لقد استنتج ان "المثلث ABC يساوي المثلث DCB، الاكبر يساوي الاصغر، وهذا تناقض".

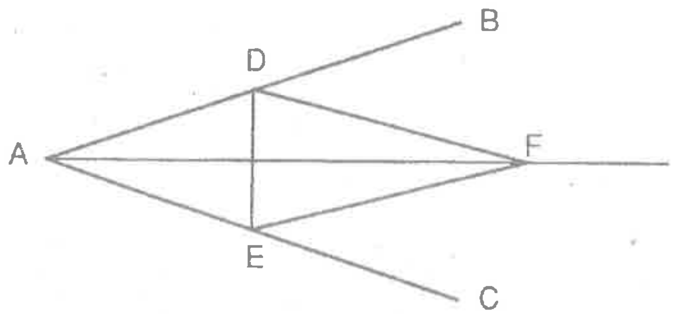
اذا لم يرجع الى المساحة، ماذا يقصد بقوله: ((احد المثلثين اصغر من الاخر))؟

اذا وجد تناقض هنا (حول المثلثين)، فانه يأتي من الرسم، وليس من اي شيء ذكر سابقا او برهن في النظام.

نلاحظ من تعاريف اقليدس، ان تعريف الزاوية بانها "ميلان احد مستقيمين متقاطعين عن الاخر" هو غير واضح، حيث انه لم يعط معنى الميلان.

مبرهنة ٩

كيفية تنصيف زاوية



شكل (١١)

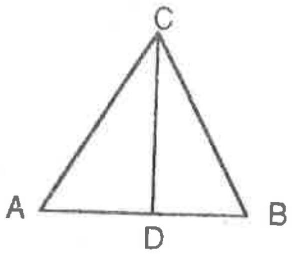
العمل والبرهان

لتكن BAC زاوية ولتكن D نقطة على الضلع AB.
توجد نقطة E على الضلع AC بحيث ان AE = AD (مبرهنة ٣) ومن مبرهنة ١، يوجد مثلث متساوي الاضلاع EDF.
ان الشعاع AF هو المنصف المطلوب للزاوية $\angle BAC$،
لانه من مبرهنة ٨، يتساوى المثلثان AEF و ADF
وبذلك، فان $\angle FAE = \angle FAD$
ويؤدي الى ان $\angle CAF = \angle BAF$

يعتمد اقليدس في هذا البرهان على الرسم، اذ كيف برهن ان AF يقع في داخل الزاوية.

مبرهنة ١٠.

كيفية تنصيف قطعة.



شكل (١٢)

العمل والبرهان

لتكن AB قطعة مستقيم.
من مبرهنة ١، يوجد مثلث متساوي الاضلاع ABC.
ومن مبرهنة ٩، تنصف الزاوية ACB.
لتكن D نقطة تقاطع هذا المنصف مع الضلع AB.
من مبرهنة ٤، يتساوى المثلثان ACD و BCD

ومنه نستنتج ان $AD = DB$.

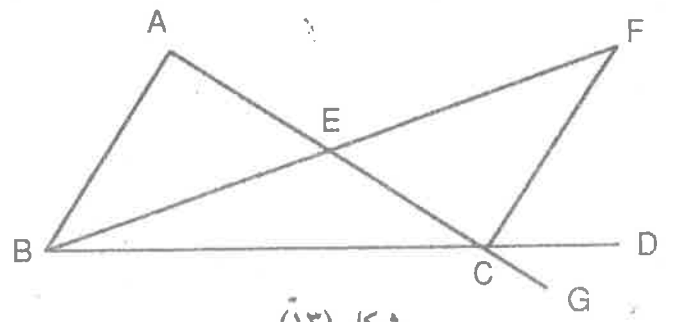
قاطع اقليدس المنصف و AB في نقطة D التي من المحتمل ان تكون غير موجودة. كذلك استخدم مفهوم "البين" بدون ان يتطرق اليه.

نلاحظ ان اقليدس افترض وجود نقاط تقاطع بين مستقيمين، بين مستقيم ودائرة، وبين دائرتين دون ان يشير عنها في بديهياته ودون ان يبرهن على وجودها، وقد اعتمد على الرسم في هذه الحالات. ان وجود هذه النقاط يحتاج الى بديهيات لازمة لذلك مثل بديهية باخ التي تدخل ضمن بديهيات الرتبة الخطية كما سنرى في نظام هلبرت، وبديهية الاستمرارية التي صاغها ديديكانيد.

نأخذ الان مبرهنة مهمة جدا.

مبرهنة ١٦

اذا مد احد اضلاع مثلث فالزاوية الخارجية تكون اكبر من اي من الزاويتين الداخليتين المقابلتين لها



شكل (١٣)

البرهان

ليكن ABC مثلثا، وليكن احد اضلاعه BC يمد الى

D، يجب برهان ان الزاوية الخارجية ACD اكبر من اي الزاويتين الداخليتين المقابلتين لها BAC و ABC.

لتكن E منتصف AC (كما في الشكل ١٣)

بعد ايصال BE يمد بخط مستقيم الى F بحيث ان EF يساوي BE (عملية ٣)، من بديهية ١، يتم توصيل C و F، ويمد AC الى G (بديهية ٢)

بما ان AE يساوي EC، و BE يساوي EF والزاوية AEB تساوي الزاوية FEC (زاويتان رأسيتان)، لذلك AB يساوي CF والمثلث AEB يساوي المثلث CEF، والزاويتان الباقيتان للمثلث AEB تساويان الزاويتين الباقيتين، على التوالي، للمثلث CEF.

لذلك، الزاوية BAE تساوي الزاوية ECF. لكن الزاوية ECD هي اكبر من الزاوية ECF، لذلك الزاوية ACD اكبر من الزاوية BAE.

بنفس الطريقة، اذا نصف BC، الزاوية BCG التي تساوي الزاوية ACD، يمكن ان تبرهن انها اكبر من الزاوية ABC.

لقد ذكر اقليدس في بديهية ٢ على انه يمكن مد قطعة المستقيم من جهتيها الى غير حد، ان هذا لايؤدي الى ان طول المستقيم غير منته. لقد اهمل اقليدس هذه النقطة لحد عام ١٨٥٤م حينما ميز ريمان بين المستقيم الذي يكون محدودا وبين المستقيم الذي يكون طوله منته.

كما ان اقليدس يستعمل هذه المصطلحات، غير محدود هو مفهوم امتداد، هذا يعني، كما في البديهية الثانية، انه يمكن مد المستقيم بصورة غير محدودة في اي اتجاه. لكن غير محدود ينسجم مع الفرض بان المستقيم يكون غير منته في الطول كما مع الفرض بان المستقيم يكون منته في الطول .

بعد هذا التمييز، ظهرت هندسات جديدة التي فيها المستقيمات غير محدودة لكنها منتهية بالطول، كما في الهندسة اللااقليدية والتي سندرسها فيما بعد.

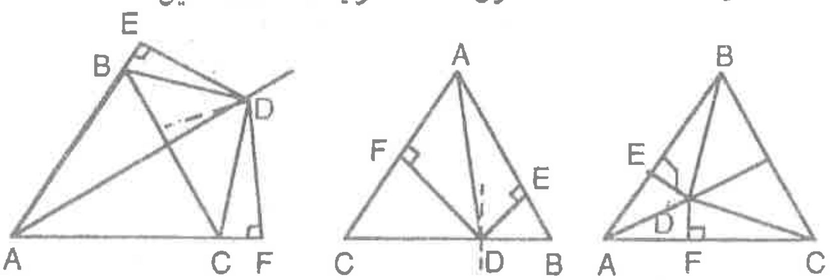
شيء آخر في هذا البرهان، من غير ان ينظر الى الرسم، كيف عرف اقليدس ان F تقع في داخل الزاوية ACD ومنه يستنتج ان الزاوية ACF هي اصغر من الزاوية ACD.

ان اقليدس لم يعرف او يناقش بصورة واضحة مفاهيم مثل داخل او خارج. ويتكلم عن جهة مستقيم ولم يعرفها ابدا. واهمل مفهوم البينية، حيث يكون مهما معرفة نقطة بين نقطتين اخريتين او شعاع بين شعاعين آخرين، الذي منه نعرف زاوية اصغر من زاوية، لقد ترك اقليدس الرسم ليحمل ثقل البرهان.

ان الخلل والعيوب التي رافقت نظام اقليدس بعدم ذكره البديهيات الضمنية واعتماده على الرسم والخ لايؤدي فقط الى استنتاجات ناقصة بل الى نتائج تناقض مفاهيمنا السابقة كما في النتيجة التالية. نفرض هنا ان الطالب له معرفة بالمبرهنات الاولية المعروفة في الهندسة.

نتيجة

كل المثلثات تكون متساوية الساقين.



الحالة (٣) الحالة (٢) الحالة (١)

شكل (١٤)

البرهان

ليكن ABC مثلثا. يرسم منصف زاوية ويرسم عمود منصف للضلع BC الذي يقابل زاوية A. نأخذ الحالات التالية:

الحالة (أ)

المنصف للزاوية A والعمود المنصف للقطعة BC اما متوازيان او متساويان. في اي حالة، منصف زاوية A يكون عموديا على BC، ومن ثم، من التعريف، يكون هو ارتفاع المثلث، لذلك، يكون المثلث متساوي الساقين. (من المبرهنة الاقليدية: اذا يتساوى منصف زاوية والارتفاع من نفس الرأس لمثلث، فان المثلث يكون متساوي الساقين).

الحالة (ب)

نفرض الان ان منصف زاوية A والعمود المنصف للضلع BC لايتوازيان ولايتساويان، فانهما يتقاطعان في نقطة D. توجد الحالات التالية:

الحالة (١) النقطة D في داخل المثلث
الحالة (٢) النقطة D على المثلث
الحالة (٣) النقطة D في خارج المثلث

لكل حالة، يرسم DE عموديا على AB
و DF عموديا على AC
وفي الحالتين (١) و (٣)، يوصل D الى B و D الى C.
وفي كل حالة، يكون البرهان كما يلي:
DE ≅ DF لان كل النقاط على منصف زاوية تكون متساوية

البعد من ضلعي الزاوية.

$DA \cong DA$ (ضلع مشترك)

والزاويتان DEA و DFA قائمتان

لذلك المثلث ADE يطابق المثلث ADF (مبرهنة ٢٦)

وعليه، فان $AF \cong AE$

الآن $DB \cong DC$ لأن كل النقاط على العمود المنصف لقطعة تكون متساوية البعد من نهايتي القطعة. كذلك، $DE \cong DF$، والزاويتان DEB و DFC قائمتان. لذلك المثلث DEB يطابق المثلث DFC (مبرهنة ساق ـ وتر) ومن ثم $BE \cong = FC$.

اي ان $AE \cong AF$ و $BE \cong FC$، فانه بالجمع في الحالتين (١) و (٢) وبالطرح في الحالة (٣)، يكون $AB \cong AC$

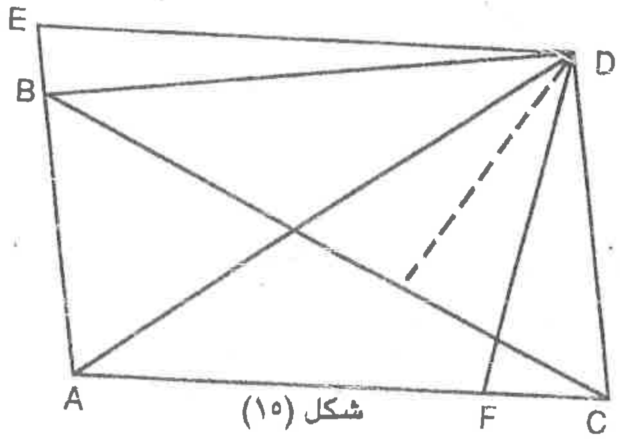
وبذلك يكون المثلث متساوي الساقين.

هناك شيءما خطأ، من الواضح انه ليست كل الحالات قد اخذت. فمثلا، في الحالتين (١) و (٢)، النقطتان E و F ربما تقعان على امتداد AB و AC، على التوالي. يترك كتمرين على ان البرهان لايزال متحقق. احتمال آخر يمكن ان نتوصل الى تناقض بسهولة، وهو ان E او F تقع على راس من المثلث. لكن هنالك حالات اخرى:

احتمال ان إحدى النقطتين E او F ربما تقع في قطعة، بينما الاخرى تقع على امتداد القطعة، وهذا الاحتمال لم يؤخذ كحالة سابقة، لذا سنأخذه في الحالة التالية:

الحالة (٤)

تكرر نفس الخطوات بالنسبة للحالات(١)، (٢)، و(٣)، غير ان النتائج ليست نفسها.



شكل (١٥)

يكون في هذه الحالة:

$$AB = AE - BE$$

و

$$AC = AF + FC$$
$$= AE + BE$$

وبما ان $AE - BE \neq AE + BE$

ومنه نستنتج ان $AB \neq AC$

الخلل في هذاالبرهان هوانه لم تؤخذ كل الحالات المحتملة.

يجب ان نؤكد هنا ان اية محاولة لاكمال البرهان من بديهيات ومبرهنات اقليدس سوف تكون فاشلة. ليس هذا فقط، بل ان اقليدس لم يتطرق الى مفاهيم مثل "البينية" "داخل"، او "خارج". في نظامه، ولايمكن البرهنة على ان المستقيم لايمكن ان يقطع كل اضلاع مثلث.

من البديهيات الضمنية، هي بديهية الاستمرارية لديديكانيد.

بديهية ديديكانيد

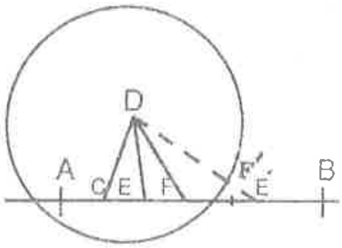
اذا وقعت كل نقاط مستقيم في صنفين بحيث ان كل نقطة من الصنف الاول تقع على يسار كل نقطة من

الصنف الثاني، فعندئذ توجد نقطة واحدة فقط تفصل بين الصنفين وتقسم المستقيم الى صنفين.

لقد استخدم اقليدس هذه البديهية في برهان المبرهنة التالية:

المستقيم الواصل بين نقطة داخل دائرة ونقطة خارجها له نقطة مشتركة مع الدائرة.

البرهان



شكل (١٦)

ليكن D مركز الدائرة

و r نصف قطرها،

و A نقطة داخل الدائرة

و B نقطة خارجها.

فيكون $AD < r < BD$

نرسم DC عموديا على AB او امتداده.

فيكون $CD < AD < r$. والان نقسم نقاط AB الى صنفين وهو مجموعة النقاط X التي تحقق $XD < r$ ومجموعة النقاط Y التي تحقق $YD \geqslant r$

لذلك، $XD < YD$

وهذا يؤدي الى ان $CX < CY$

لذا فان كل نقطة X تسبق كل نقطة Y، ومن بديهية

ديديكانيد، توجد نقطة E من القطعة AB بحيث ان كل النقاط التي تسبق E تنتمي الى صنف واحد وكل النقاط التي تتبع E تنتمي الى صنف آخر. يجب ان نبرهن ان E تقع على محيط الدائرة. فاذا لم تكن E على محيط الدائرة، فانها اما داخل الدائرة او خارجها. نفرض ان E في داخل الدائرة، فيكون $ED < r$. نختار نقطة F على AB بين E و B بحيث ان $EF < r-DE$

بما ان في المثلث DEF

$$DF < DE + EF$$

فان $DF < r$، وبهذا فان F تقع في داخل الدائرة الى يسار E، وهذا غير صحيح لان F تقع الى يمين E وتتصف بخاصية النقاط التي تقع الى يسار E اي انه تقع F داخل الدائرة و $DF > DE$ وهذا يؤدي الى ان E لاتفصل بين الصنفين ولذلك لايمكن ان تقع E داخل الدائرة.

واذاوقعت E خارج الدائرة (في الرسم اعلاه تكون E') لذلك، فان $DE' > r$. نفرض وجود نقطة F' على AB بين A و E' بحيث يكون $EF' < DE' - r$

بما انه في المثلث $DE'F'$

$$DF' + F'E' > DE'$$

فان $DF' > r$

وهذا غير صحيح لانه وجدنا نقطة الى يسار E' وتتصف بخواص النقاط الواقعة على المستقيم AB الى يمين E'، وهذا يؤدي الى ان E' غير فاصلة بين المجموعتين.

ولذلك يجب ان تقع النقطة E على محيط الدائرة.

لتصحيح العيوب التي ذكرت في هذا الفصل، فقد اقترحت انظمة بدهية مختلفة، منها باخ – ١٨٨٢، بيانو – ١٨٨٩، هلبرت – ١٨٩٩، فبلن – ١٩٠٤، وبركوف وبيتلي – ١٩٤٠، لبعضها فوائد معينة تميزها عن الاخرى، كنظام

هلبرت، ربما لانه كاحد علماء الرياضيات المعروفين في القرن العشرين. ربما ايضا لان نظامه اذا قورن مع بقية الانظمة، فهو اكثر شبها بنظام اقليدس. فقداستعمل نظام هلبرت، الذي سنقدمه ابتداء من الفصل الرابع وانتهاءا بالفصل السابع. سوف نعطي مادة كافية لاشتقاق مبرهنات تتعلق فقط بالمبرهنات الثمانية والعشرين الاولى لاقليدس. وسوف نحجم عن تقديم اعتبارات الاستمرارية، ونفرض وجود بعدين فقط.

الجزء الثاني
تقويم الهندسة الاقليدية

يبتدأ الجزء الثاني من الفصل الرابع وينتهي في الفصل السابع. سنقدم في هذا الجزء نظام هلبرت للهندسة الاقليدية، حيث سنعطي مادة كافية لبرهان بعض مبرهنات اقليدس الثماني والعشرين الاولى. سيكون تنويرا لبيان كيف نذهب كثيرا ابعد من اقليدس لاجل برهنة مبرهناته.

سينورنا ايضا كم عدد المبرهنات التي يمكن برهانها بدون تقديم مفاهيم مثل استمرارية المستقيمات، وجود عدد غير منته من النقاط على المستقيم. كذلك، ينورنا ايضا كيف نستطيع برهان بعض المبرهنات المعروفة للهندسة الاقليدية بدون تقديم بديهية التوازي او اي شيء يكافئها. ان هذا يكون ضروريا لاننا سنستعمل هذه المبرهنات في الهندسة اللاأقليدية.

الفصل الرابع
اسس الهندسة

قدم عالم الرياضيات الالماني دافيد هلبرت (١٨٦٢ ـ ١٩٤٣) نظاما بدهيا متكاملا الذي منه نستنتج الهندسة الاقليدية. لقد صحح الاخطاء والعيوب التي رافقت اعمال اقليدس. توجد طرق بديهية اخرى تؤدي الى هذه الهندسة، لكننا سنأخذ نظام هلبرت لاسلوبه البسيط والواضح.

نبتدأ نظامنا هذا بكلمات أولية تقنية تدعى نقاط التي يرمز لها بالرموز $A, B, C, \ldots$ ومستقيمات يرمز لها بالرموز $l, m, n, \ldots$

٤-١ بديهيات الوقوع والوجود

بديهية ١

لكل نقطتين مختلفتين معلومتين، يوجد مستقيم واحد فقط يحتويهما.

بديهية ٢

كل مستقيم يحتوي على نقطتين في الاقل.

بديهية ٣

لكل مستقيم معلوم، توجد في الاقل نقطة واحدة

لاتنتمي اليه.

بديهية ٤

يوجد في الاقل مستقيم واحد.

يتبين لنا من البديهيات اعلاه ان المستقيم هو مجموعة من نقاط. غير ان هذا لايعتبر تعريف للمستقيم لأن اي شكل في الهندسة هو مجموعة من نقاط، لكن هذا يوضح العلاقة بين النقطة والمستقيم ويساعدنا بتوضيح ماذا نعني بالمستقيمات المتساوية او المختلفة، حيث تساعد دراستنا للمجموعات بتوضيح هذه المفاهيم. للنقاط، الكلمة مختلفة تؤخذ ككلمة اولية منطقية كبقية الكلمات المنطقية.

تعريف ١

تكون المجموعتان متساويتين اذا وفقط اذا احتوتا بالضبط على نفس العناصر.

مبرهنة ١

توجد في الاقل ثلاث نقاط في النظام.

البرهان

يستنتج مباشرة من البديهيات ٤، ٣، ٢.

مبرهنة ٢

اي مستقيمين مختلفين يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر.

البرهان

يترك كتمرين

يمكن ان يعبر عن البديهية ١ بقولنا ان الخط يتعين بنقطتين. والخط الذي يتعين بالنقطتين A و B، يرمز له بالرمز AB او BA.

وفي بعض الاحيان يرمز للخطوط بالحروف الصغيرة k, l, m, ...

٤-١ تمارين

١- برهن على ان لكل نقطة يوجد في الاقل مستقيمان يمران بها.

٢- برهن على انه يوجد في الاقل مستقيم واحد لايمر من نقطة معلومة.

٣- اذا كانت C نقطة على AB، وتختلف عن A و B، فان $CA = BC = AB$

٤- اذا كان $AB = AC$ و $B \neq C$ فان $AB = BC$.

٤-٢ بديهيات الترتيب axioms of order

ان بديهيات الوقوع والوجود ليست كافية لاشتقاق بعض المبرهنات المعروفة في الهندسة الاقليدية وليست كافية لوجود اكثر من نقطتين على خط ولاوجود

عدد غير منته من النقاط على الخط، ولاتضمن وجود عدد غير منتـه من النقاط بين اي نقطتين، ولايمكن ان نتكلم عن نقطة بين نقطتين، ولايمكن ان نتكلم عن قطعة مستقيم او المقارنة بين القطع فايهما الاكبر او الاصغر. كل هذا يأتي من العلاقة "بين". فقد اهمل اقليدس هذه العلاقة في بديهياته، لكنه استنتجها من الرسم. لكن هذا لايعني اننا لانستخدم الرسم، غير انه لايكون جزءا من البرهان.

قاعدة لغوية

"بين" هي كلمة اولية تقنية. ويرمز للعبارة: "B تقع بين A و C" بالرمز : A-B-C

مجموعة البديهيات

بديهية ٥

A-B-C اذا وفقط اذا C-B-A

بديهية ٦

اذا كان A-B-C، فان النقاط A,B,C مختلفة وتقع على مستقيم واحد.

بديهية ٧

اذا كانت A, B, C اي ثلاث نقاط مختلفة وتقع على مستقيم واحد، فان واحدة فقط مما يلي تتحقق:

C-A-B، B-C-A، A-B-C

رمز

الرمز A-B-C-D هو مختصر الى: A-B-C، و A-B-D، و A-C-D، و B-C-D

وبنفس الطريقة بالنسبة لاكثر من اربع نقاط.

بديهية ٨

اذا كانت A, B, C, D اربع نقاط مختلفة وعلى مستقيم واحد وان A-B-C فان واحدة فقط مما يلي تتحقق:

D-A-B-C، A-D-B-C، A-B-D-C، A-B-C-D

بديهية ٩

اذا كانت A و B اي نقطتين، فان:

(أ) توجد نقطة C بحيث ان A-B-C

(ب) توجد نقطة D بحيث ان A-D-B

(جـ) توجد نقطة E بحيث ان E-A-B

مبرهنة ٣

(أ) اذا كان A-B-C و A-C-D، فان النقاط A, B, C, D مختلفة وعلى مستقيم واحد.

(ب) اذا كان A-B-D وB-C-D، فان النقاط A,B,C,D مختلفة وعلى مستقيم واحد.
(جـ) اذا كان A-B-C وB-C-D، فان النقاط A, B, C, D مختنفة وعلى مستقيم واحد.

البرهان

سنبرهن فرع (أ) ونترك الباقي كتمرين.

فرع (أ)

من بديهية ٦، بما ان A-B-C، فان النقاط A, B, C مختلفة وعلى مستقيم واحد. وكذلك بما ان A-C-D، فان النقاط A, C, D مختلفة وعلى مستقيم واحد.
اذا كان B = D، فانه بتعويض ذلك في A-C-D، يؤدي الى ان A-C-B، ولكن من الفرض A-B-C، وهذا يناقض بديهية ٧. لذلك، فان النقاط A, B, C, D تكون مختلفة. من البديهية ١، يوجد مستقيم واحد فقط يتعين من A و C. بما ان B و D تقعان على المستقيم AC، فان A, B, C, D تقع على مستقيم واحد.

نلاحظ ان A-B-C-D يؤدي الى A-B-C و A-C-D. هل ان العكس صحيح؟ اي هل ان B بين A و D او C بين B و D؟ بالطبع هذا مانريده وسنبرهنه في المبرهنة التالية:

مبرهنة ٤

(أ) اذا كان A-B-C و A-C-D، فان A-B-C-D.
(ب) اذا كان A-B-D و B-C-D، فان A-B-C-D.
(ج) اذا كان A-B-C و B-C-D، فان A-B-C-D.

البرهان

سنبرهن فرع (أ) ونترك الباقي كتمرين.

فرع (أ)

من مبرهنة ٣، A-B-C و A-C-D ← A, B, C, D مختلفة وعلى استقامة واحدة. وبما ان A-B-C، فانه من بديهية ٨، تتحقق واحدة فقط مما يلي:

D-A-B-C، A-D-B-C، A-B-D-C، A-B-C-D.

بما ان A-C-D، فانه من بديهية ٧، لاتتحقق كل من A-D-C وكذلك D-A-C. ومن هذا نستنتج انه لاتتحقق كل من A-B-D-C، A-D-B-C، D-A-B-C.

لذلك، فانه تتحقق فقط A-B-C-D.

مبرهنة ٥

(أ) اذا كان A-B-D و A-C-D، و $B \neq C$ ، فان A-B-C او A-C-B

(ب) اذا كان A-B-C وA-B-D، و $C \neq D$ ، فان B-C-D او B-D-C

(جـ) اذا كان A-B-C وA-B-D ، و $C \neq D$ ، فان A-C-D او A-D-C

البرهان

يترك كتمرين.

تعريف ٢ تعريف التجزئة (تجزئة المجموعة)

اذا كانت المجموعة S هي اتحاد مجموعتين (او اكثر) جزئيتين غير خاليتين A_1, A_2 بحيث ان كل عنصر في S هو عنصر في واحدة وواحدة فقط من المجموعات الجزئية، فانه يقال ان A_1, A_2 تكونان تجزئة للمجموعة S. كمثال المجموعتان $\{1,2\}\{3,4,5\}$، تكونان تجزئة للمجموعة $\{1,2,3,4,5\}$.

تعريف ٣ تعريف جهتي النقطة O او نصفا المستقيم

لتكن O اية نقطة على مستقيم m، و A نقطة اخرى على m. لتكن S_1 مجموعة كل النقاط على m من ضمنها A وكل النقاط X بحيث ان O-X-A او O-A-X.

لتكن S_2 مجموعة كل النقاط X بحيث ان X-O-A. فان S_1, S_2 تدعيان جهتي O على m. وتدعيان ايضا نصفي المستقيم m بالنسبة الى O. اي ان

$$S_1 = \{X \in m: O\text{-}X\text{-}A \vee O\text{-}A\text{-}X \vee X = A\}$$

$$S_2 = \{X \in m : X\text{-}O\text{-}A\}$$

مبرهنة ٦

جهتا النقطة O على المستقيم m لاتحتويان على O

البرهان

نفرض ان $O \in S_1$، وبما ان $A \neq O$ فان $A-O-O$ او $O-A-O$ وهذا يخالف بديهية ٦، وكذلك، اذا كان $O \in S_2$، فان $A-O-O$. لذا فان O لاتنتمي الى جهتي O.

تعريف ٤ تعريف الفصل

لتكن S_1, S_2 مجموعتين مختلفتين غير خاليتين ومنفصلتين وكلا منهما منفصلة عن مجموعة S. ويتحقق الشرطان التاليان:

(أ) لاي عنصر A في S_1 و B في S_2، توجد نقطة في S بين A و B،

(ب) لاي عنصرين A و B من نفس المجموعة، لاتوجد نقطة في S بينهما،

فانه يقال بان S تفصل (Separates) S_1 و S_2.

مبرهنة ٧ [illegible]

اية نقطة O على مستقيم m تفصل m الى جهتين بالنسبة الى O وتكونان مع O تجزئة للمستقيم m.

البرهان

(١) التجزئة

لتكن S_1 و S_2 جهتي O على m المتعينيتين من النقطتين O و A. يجب ان نبرهن ان S_1 و S_2 مع $\{O\}$ تكون تجزئة للمستقيم m.

بما ان $A \in S_1$، فان $S_1 \neq \phi$

بما ان $A \neq O$ فانه من بديهية ٩، توجد نقطة C بحيث $C-O-A$ ، ومن تعريف ٣، $C \in S_2$ ، لذلك $S_2 \neq \phi$

يجب ان نبرهن لكل $X \in m$ ، فانه تتحقق واحدة فقط مما يلي: $X \in S_1$ ، $X \in S_2$ ، $X \in \{O\}$

$X \in m \longrightarrow$ اما $X = O$ او $X \neq O$

١- نفرض ان $X = O$ ، فان $X \in \{O\}$

من مبرهنة ٦، $O \notin S_1$ و $O \notin S_2$ ، اي ان $X \notin S_1$ و $X \notin S_2$.

٢- نفرض ان $X \neq O$ ، اي ان $X \notin \{O\}$ ، وبما ان

$A \in m \longrightarrow$ اما $X = A$ او $X \neq A$

(أ) نفرض ان $X = A$ ، ومن تعريف ٣ وبديهية ٦،

$X \in S_1$ و $X \notin S_2$

(ب) نفرض ان $X \neq A$ وبما ان $A \neq O$ و $X \neq O$ ، فان النقاط O, X, A مختلفة وعلى مستقيم واحد.

ومن بديهية ٧، تتحقق واحدة فقط مما يلي:

$O-A-X$ ، $O-X-A$ ، $X-O-A$

وهذا يؤدي الى ان $X \in S_1$ او $X \in S_2$

ومن تعريف التجزئة، تكون المجموعات S_1 ، S_2 ، و $\{O\}$ تجزئة للمستقيم m.

(٢) الفصل

يجب ان نبرهن ان $\{O\}$ تفصل S_1 و S_2

(أ) يجب ان نبرهن لكل $X_1 \in S_1$ و $X_2 \in S_2$ ، فان X_1-O-X_2

$X_1 \in S_1 \longrightarrow O-X_1-A$ او $O-A-X_1$ او $X_1 = A$

$X_2 \in S_2 \longrightarrow X_2-O-A$

توجد ثلاثة احتمالات

(١) اذا كان $O-A-X_1$ و X_2-O-A ،
فانه نستنتج من بديهية ٥، X_1-A-O و $A-O-X_2$
ومن مبرهنة ٤ (جـ): يكون $X_1-A-O-X_2$
ومنه نستنتج ان X_1-O-X_2

(٢) اذا كان $O-X_1-A$ و X_2-O-A
فانه من بديهية ٥ $\longleftarrow$ $A-X_1-O$ و $A-O-X_2$
ومن مبرهنة ٤ $\longleftarrow$ $A-X_1-O-X_2$
$\longleftarrow$ X_1-O-X_2

(٣) اذا كان $X_1 = A$
وبما ان X_2-O-A
فان X_2-O-X_1

(ب) اولا: لتكن $X_1, \ Y_1$ اي نقطتين مختلفتين في S_1 ،
فانه كما في تعريف ٤ (ب)، يجب ان نبين على انه من الخطأ يكون X_1-O-Y_1. توجد عدة حالات تؤخذ بنظر الاعتبار، حيث ان:
$X_1 \in S_1$ ـــــ $O-X_1-A$ ، $O-A-X_1$ ، او $X_1 = A$
$Y_1 \in S1$ ـــــ $O-Y_1-A$ ، $O-A-Y_1$ ، او $Y_1 = A$
(١) اذا كان $O-X_1-A$ و $O-Y_1-A$
وبما ان $X_1 \neq Y_1$
فان من مبرهنة ٥ يكون $O-X_1-Y_1$ او $O-Y_1-X_1$
ومن بديهية ٧، لايتحقق X_1-O-Y_1

(٢) اذا كان $O-A-X_1$ و $O-A-Y_1$
وبما ان $X_1 \neq Y_1$
فان من مبرهنة ٥،يكون $O-Y_1-X_1$ او $O-X_1-Y_1$

ومن بديهية ٧، لايتحقق X_1-O-Y_1.

(٣) اذا كان $O-X_1-A$ و $O-A-Y_1$،
فان من مبرهنة ٤
يكون $O-X_1-A-Y_1 \longrightarrow O-X_1-Y_1$
ومن بديهية ٧، لاتتحقق X_1-O-Y_1.

(٤) اذا كان $X_1 = A$
بما ان $O-Y_1-A$ او $O-A-Y_1$
فانه $O-Y_1-X_1$ او $O-X_1-Y_1$
ومن بديهية ٧، لايتحقق X_1-O-Y_1.
وبنفس الطريقة:
اذا كان $Y_1 = A$ و $O-X_1-A$ او $O-A-X_1$

(٥) اذا كان $O-A-X_1$ و $O-Y_1-A$
تبرهن بنفس طريقة الحالة (٣).

ثانيا: يجب ان نبرهن اذا كانت X_2 , Y_2 نقطتين مختلفتين في S_2 فانه من الخطأ ان يكون X_2-O-Y_2.
$X_2 \in S_2 \longrightarrow X_2-O-A$ ،
ومن بديهية ٥ $\longrightarrow A-O-X_2$
$Y_2 \in S_2 \longrightarrow Y_2-O-A$
ومن بديهية ٥ $\longrightarrow A-O-Y_2$
وبما ان $X_2 \neq Y_2$
فان من مبرهنة ٥
يكون $O-X_2-Y_2$ او $O-Y_2-X_2$
ومن بديهية ٧، لايتحقق X_2-O-Y_2

قاعدة لغوية

يقال عن المجموعتين S_1, S_2 في تعريف ٣ انهما تتعينان من O و A.

تبين المبرهنة التالية وحدانية جهتي النقطة O على المستقيم m (عدم اعتمادها على A).

مبرهنة ٨ (علاقة)

لتكن O, A, A' ثلاث نقاط مختلفة على مستقيم m. جهتا النقطة O على المستقيم m المتعينتين من O و A هما نفس الجهتين المتعينتين من O و 'A.

البرهان

لتكن S_1 و S_2 جهتي النقطة O على المستقيم m المتعينتين من O و A

$$S_1 = \{ X \in m : O\text{-}X\text{-}A \vee O\text{-}A\text{-}X \vee X = A \}$$
$$S_2 = \{ X \in m : X\text{-}O\text{-}A \}$$

لتكن S_1' و S_2' جهتي النقطة O على m المتعينتين من O و 'A

$$S_1' = \{ X \in m : O\text{-}X\text{-}A' \vee O\text{-}A'\text{-}X \vee X = A' \}$$
$$S_2' = \{ X \in m : X\text{-}O\text{-}A' \}$$

النقاط O, A, A' مختلفة وتقع على المستقيم m فانه من بديهية ٧، تتحقق واحدة فقط مما يلي:

$A'\text{-}O\text{-}A$ ، $O\text{-}A'\text{-}A$ ، $O\text{-}A\text{-}A'$

الحالة (١)

نفرض ان $O-A-A'$. يجب ان نبرهن ان $S_1 = S'_1$ و $S_2 = S'_2$

(أ) لكي نبرهن ان $S_1 = S'_1$ يجب ان نبين ان $S_1 \leq S'_1$ و $S'_1 \leq S_1$

(١) لاجل ان نبرهن $S_1 \leq S'_1$

يجب ان نبين اذا كان $X \in S_1$ ، فان $X \in S'_1$

$X \in S_1 \longrightarrow O-A-X,\ O-X-A$ ، او $X=A$

نفرض $O-X-A$

وبما ان $O-A-A'$

فانه من مبرهنة٤ ،يكون

$O-X-A-A' \longrightarrow O-X-A' \longrightarrow X \in S'_1$

نفرض $O-A-X$

وبما ان $O-A-A'$ واذا كان $X \neq A'$

فان من مبرهنة ٥ $\longrightarrow O-X-A'$ او $O-A'-X$

$\longrightarrow X \in S'_1$

اما اذا كان $X = A'$

فان $X \in S'_1$

عندما $X = A$

وبما ان $O-A-A' \longrightarrow O-X-A' \longrightarrow X \in S'_1$

يتبين مما تقدم ان $S_1 \leq S'_1$

(٢) برهان $S'_1 \leq S_1$ نتبع نفس طريقة (١) من فرع (أ)

(ب) لكي نبرهن ان $S_2 = S'_2$ يجب ان نبين ان $S_2 \leq S'_2$ و $S'_2 \leq S_2$

(١) يجب ان نبرهن $S_2 \leq S'_2$

اي ان، لكل $X \in S_2$

فان $X \in S'_2$

$X-O-A \longleftarrow X \in S_2$

وبما ان $O-A-A'$

$X-O-A-A' \longleftarrow$ ومن مبرهنة٤

$X \in S'_2 \longleftarrow X-O-A' \longleftarrow$

(٢) بنفس طريقة (١) من فرع (ب)

نبرهن ان $S_2 \subseteq S'_2$

يتبين مما تقدم ان $S_1 = S'_1$ و $S_2 = S'_2$

وبنفس طريقة الحالة (١) نبرهن

$S_1 = S'_1$ و $S_2 = S'_2$

اذا كان $O-A'-A$ و $S_1 = S'_2$ و $S_2 = S'_1$ اذا كان $A'-O-A$.

مبرهنة ٩ للاطلاع

لتكن O', O نقطتين مختلفتين على مستقيم m. جهتا النقطة O على المستقيم m تختلفان عن جهتي النقطة O' على m.

البرهان

لتكن S_1, S_2 جهتي النقطة O على m المتعينتين من النقطتين O و A.

$$S_1 = \{ X \in m : O-A-X \vee O-X-A \vee X = A \}$$

$$S_2 = \{ X \in m : X-O-A \}$$

لتكن S'_1, S'_2 جهتي O' على المستقيم m المتعينتين من O' و A

$$S'_1 = \{ X \in m : O'-A-X \vee O'-X-A \vee X = A \}$$

$$S'_2 = \{ X \in m : X-O'-A \}$$

يجب ان نبرهن ان $S_1 \neq S'_1$ ، $S_1 \neq S'_2$ ، $S_2 \neq S'_1$ و $S_2 \neq S'_2$

من بديهية ٧، تتحقق واحدة فقط مما يلي:

$O-O'-A$ ، $O-A-O'$ ، $A-O-O'$

الحالة (١)

عندما $O-O'-A \longrightarrow O' \in S_1$ و $O \in S'_2$

نفرض ان $S_1 = S'_1$

وبما ان $O' \in S_1 \longrightarrow O' \in S'_1$ وهذا يناقض مبرهنة ٦.

لذا فان $S_1 \neq S'_1$.

نفرض ان $S_1 = S'_2$ وبما ان $O \in S'_2 \longrightarrow O \in S_1$

وهذا يناقض مبرهنة ٦.

لذا فان $S_1 \neq S'_2$.

نفرض ان $S_2 = S'_1$

وبما ان $A \in S'_1 \longrightarrow A \in S_2 \longrightarrow A-O'-A$ ، وهذا يناقض بديهية ٦.

لذا فان $S_2 \neq S'_1$.

نفرض ان $S_2 = S'_2$ ، وبما ان $O \in S'_2 \longrightarrow O \in S_2$

وهذا يناقض مبرهنة ٦.

لذلك $S_2 \neq S'_2$.

الحالة (٢)

عندما $O-A-O' \longrightarrow O \in S'_1$ و $O' \in S_1$

نفرض $S_1 = S'_1$

وبما ان $O \in S'_1 \longrightarrow O \in S_1$

وهذا يناقض مبرهنة ٦.

لذلك، فان $S_1 \neq S'_1$

نفرض $S_1 = S_2$

وبما ان $O' \in S_1 \longrightarrow O' \in S_2'$

وهذا يخالف مبرهنة ٦.

لذلك $S_1 \neq S_2'$

نفرض ان $S_2 = S_1'$

وبما ان $O \in S_1' \longrightarrow O \in S_2$

وهذا يخالف مبرهنة ٦.

لذلك $S_2 \neq S_1'$

نفرض ان $S_2 = S_2'$

$S_2 \neq \phi \longrightarrow$ توجد نقطة P بحيث ان $P \in S_2$

$\longrightarrow P \in S_2'$

$P \in S_2' \longrightarrow P\text{-}O'\text{-}A$ و $P \in S_2 \longrightarrow P\text{-}O\text{-}A$

$P\text{-}O\text{-}A$ وبما ان $O\text{-}A\text{-}O'$

فانه من مبرهنة ٤

يكون $P\text{-}O\text{-}A\text{-}O' \longrightarrow P\text{-}A\text{-}O'$

وهذا يناقض بديهية ٧ لان $P\text{-}O'\text{-}A$ متحققه.

لذلك، فان $S_2 \neq S_2'$

الحالة (٣)

عندما $A\text{-}O\text{-}O'$ ، البرهان مشابه للحالة (١).

تمارين ٤-٢

١- برهن على انه اذا كان $A\text{-}B\text{-}C$ و $A\text{-}B\text{-}D$ ، فان $A\text{-}C\text{-}D$

و B-C-D.

٢ ــ برهن على انه اذا كان A-B-D و B-C-D ، فان A-B-C-D.

? ٣ ــ برهن على انه اذا كان A-B-C و B-C-D ، فان A-B-C-D.

٤ ــ برهن على انه اذا كان A-B-C-D ، فان A,B,C,D مختلفة وتقع على مستقيم واحد.

٥ ــ برهن على انه اذا كان A-B-C-D-E ، فان A, B, C, D, E مختلفة وعلى مستقيم واحد.

٦ ــ برهن على انه توجد في الاقل خمس نقاط مختلفة على مستقيم معلوم.

٧ ــ برهن على انه توجد في الاقل خمس نقاط مختلفة لاتقع على مستقيم معلوم.

٨ ــ برهن على انه توجدفي الاقل ثلاث نقاط مختلفة بين اي نقطتين على مستقيم معلوم.

? ٩ ــ اذا كان A-B-C و A-B-D ، فان C = D ، B-C-D ، او B-D-C.

٤-٣ القطع (Segments)

تعريف ٥

لتكن A و B نقطتين مختلفتين، مجموعة كل النقاط X بحيث ان A-X-B تدعى قطعة.

ويرمز لها بالرمز : A-B

مبرهنة ١.

النقطتان A، B لاتنتميان الى A-B

البرهان

اذا كان $A, B \in A-B$

فان $A-A-B$ و $A-B-B$

وهذا يناقض بديهية ٦.

مبرهنة ١١

$A-B$ هي مجموعة غير خالية.

البرهان

من بديهية ٩، توجد نقطة C بحيث ان $A-C-B$

اي ان $C \in A-B$.

وبهذا فان $A-B$ هي مجموعة غير خالية.

مبرهنة ١٢

$$A-B = B-A$$

البرهان

يجب ان نبرهن ان $A-B$ هي مجموعة جزئية من $B-A$

وان $B-A$ هي مجموعة جزئية من $A-B$.

لكي نبين ان $A-B$ هي مجموعة جزئية من $B-A$

يجب ان نبرهن اذا كان $X \in A-B$، فان $X \in B-A$.

بما ان $X \in A-B$، فان $A-X-B$.

ومن بديهية ٥، يكون $B-X-A$

ومن التعريف ٥، $X \in B-A$

وبنفس الطريقة، نبرهن الاتجاه الاخر.

مبرهنة ١٣

$A\text{-}B$ هي مجموعة جزئية من المستقيم AB.

البرهان

لكي نبين ان $A\text{-}B$ هي مجموعة جزئية من المستقيم AB يجب ان نبرهن ذلك اذا كان $X \in A\text{-}B$ ، فان X تقع على المستقيم AB.

$$X \in A\text{-}B \longrightarrow A\text{-}X\text{-}B$$

ومن بديهية ٦، A, X, B مختلفة وعلى مستقيم واحد.

لذا فان X تقع على المستقيم AB.

مبرهنة ١٤ للاطلاع

لتكن A و B نقطتين مختلفتين، فان $A\text{-}B = C\text{-}D$ اذا وفقط اذا $\{A, B\} = \{C, D\}$

البرهان

نفرض ان $\{A, B\} = \{C, D\}$

فان اما $A = C$ و $B = D$ او $A = D$ و $B = C$.

في اي حالة، يكون عندنا من تعريف القطعة $A\text{-}B = C\text{-}D$.

نفرض الان ان $A\text{-}B = C\text{-}D$ وان $\{A, B\} \neq \{C, D\}$ فانه يوجد عنصر في احدى المجموعتين لاينتمي الى الاخرى، وليكن C.

اي ان $C \neq A$ و $C \neq B$

وبما ان $A \neq B$ ، فان النقاط A, B, C مختلفة.

من مبرهنة ١٣، $A\text{-}B$ مجموعة جزئية من الخط AB

و $C\text{-}D$ مجموعة جزئية من الخط CD

وبما ان $A-B = C-D$ ، فانه من بديهية ١ ، تكون النقاط A, B, C على مستقيم واحد.
ومن بديهية ٧، تتحقق واحدة فقط مايلي:
$A-B-C$ ، $A-C-B$ ، $C-A-B$

الحالة (١)

نفرض ان $C-A-B$
$A-B = \phi$ ⟵ توجد نقطة H بحيث ان $A-H-B$
بما ان $C-A-B$ و $A-H-B$
فانه من مبرهنة ٤ يكون $C-A-H-B$ ⟵ $C-A-H$
وبما ان $A-B = C-D$ ⟵ $H \in C-D$ ⟵ $C-H-D$
من مبرهنة٤، $C-A-H$ و $C-H-D$ ⟵ $C-A-H-D$
⟵ $C-A-D$ ⟵ $A \in C-D$
وبما ان $A-B = C-D$ ⟵ $A \in A-B$
وهذا يناقض مبرهنة ١٠.
وبنفس الطريقة، نتوصل الى تناقض اذا اخذنا الحالتيين الباقيتين عندما $A-C-B$ او $A-B-C$.
يتضح مما تقدم ان القطعة $A-B$ تتعين من النقطتين A و B.

تعريف ٦

تدعى كل من A و B نقطة نهاية القطعة $A-B$.

مبرهنة ١٥

لتكن A-B قطعة و A-R-B، فان A-R و R-B مجموعتان جزئيتان من A-B.

البرهان

لكي نبرهن ان A-R هي مجموعة جزئية من A-B ، يجب ان نبين اذا كان X ∈ A-R ، فان X ∈ A-B

X ∈ A-R ⟵ A-X-R ، ومن الفرض A-R-B

فانه من مبرهنة٤ ، يكون A-X-R-B

⟵ A-X-B

⟵ X ∈ A-B

وبنفس الطريقة، نستطيع ان نبرهن ان R-B هي مجموعة جزئية من A-B.

مبرهنة ١٦ XLL

اي نقطة R في القطعة A-B تفصل A-B الى مجموعتين جزئيتين غير خاليتين A-R, R-B اللتين مع {R} تكون تجزئة للقطعة A-B.

البرهان

من مبرهنة ١١، A-R, R-B مجموعتين غير خاليتين.

ومن مبرهنة ١٥، A-R, R-B مجموعتين جزئيتين من A-B.

(١) لكي نبرهن ان A-R, {R}, R-B تكون تجزئة الى A-B، يجب ان نبين اذا كانت X اية نقطة في A-B ، فان X تنتمي الى واحدة وفقط واحدة من المجموعات الجزئية:

$A-R,\ \{R\},\ R-B$

هناك احتمالان، اما $X \neq R$ او $X = R$

نفرض ان $X \neq R$. وبما ان $A-X-B$ و $A-R-B$ فانه من مبرهنة ١٣ وبديهية ٦، تكون النقاط X,A,R,B مختلفة وعلى خط واحد.

وبما ان $A-R-B$، فانه من بديهية ٨، تتحقق واحدة فقط مما يلي:

$X-A-R-B$ و $A-X-R-B$ و $A-R-X-B$ و $A-R-B-X$

لكن بما ان $A-X-B$ ومن بديهية ٧،

فانه لاتتحقق كل من $A-R-B-X$ و $X-A-R-B$.

اي انه اما $A-X-R-B$ او $A-R-X-B$ ⟵ اما $A-X-R$ او $R-X-B$. لذا فانه اما $X \in A-R$ او $X \in R-B$.

وبما ان $X \notin \{R\}$ ، فان اي نقطة $X \neq R$ في $A-B$ تكون عنصرا في واحدة وفقط واحدة من المجموعات $A-R$ ،$\{R\}$ ،$R-B$

اما اذا كان $X = R$ ، فان $X \in \{R\}$

ومن مبرهنة ١٠، $R \notin R-B$ و $R \notin A-R$

لذا فان اية نقطة X في $A-B$ تكون عنصرا في واحدة وفقط واحدة من المجموعات $A-R,\ \{R\},\ R-B$.

(٢) يجب ان نبرهن ان $\{R\}$ تفصل $A-B$ الى $A-R$ و $R-B$.

(أ) لتكن Y_1 و X_1 نقطتين مختلفتين في $A-R$. فان $A-X_1-R$ و $A-Y_1-R$.

من بديهية ٥، يكون $R-X_1-A$ و $R-Y_1-A$

من مبرهنة ٥ (أ) ، اما $R-X_1-Y_1$ او $R-Y_1-X_1$

ومن بديهية ٧، لايمكن ان يتحقق X_1-R-Y_1

بهذا فقط برهنا اذا كان $X_1,\ Y_1 \in A-R$ و $X_1 \neq Y_1$ ، فان R لاتقع بين X_1 و Y_1.

وبنفس الطريقة اذا أخذنا $X_2,\ Y_2 \in R-B$ و

$X_2 \neq Y_2$، فان R لاتقع بين X_2 و Y_2.

(ب) نفرض ان $X_1 \in A\text{-}R$ و $X_2 \in R\text{-}B$. يجب ان نبرهن ان $X_1\text{-}R\text{-}X_2$.

من الجزء (١)، $X_1 \neq X_2$.

بما ان $A\text{-}X_1\text{-}R$ و $A\text{-}R\text{-}B$

فانه من مبرهنة ٤، يكون $A\text{-}X_1\text{-}R\text{-}B \longrightarrow X_1\text{-}R\text{-}B$

وكذلك، $X_1\text{-}R\text{-}B$ و $R\text{-}X_2\text{-}B \longrightarrow X_1\text{-}R\text{-}X_2\text{-}B$

$\longrightarrow X_1\text{-}R\text{-}X_2$

٤-٣ تمارين

١ـ برهن على ان القطعة تحتوي على عدد غير منته من النقاط.

٢ـ برهن على ان الخط يحتوي على عدد غير منته من النقاط.

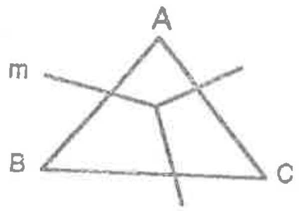
٣ـ برهن على ان نصف الخط يحتوي على عدد غير منته من النقاط. شرك

٤-٤ بديهية باخ (The Axiom of Pasch)

في كثير من البراهين الاقليدية، مثل، "المستقيم الذي يمر براس مثلث" و "منصف زاوية في مثلث" قد افترضت بان هذه المستقيمات تقطع الضلع المقابل في المثلث. لكن على اي اساس اعتمدت هذه الفرضية؟. لقد صاغ العالم باخ بديهيته ليس فقط على انها عبارة اعتمد عليها في البراهين، ولكن لانه ليس بالامكان برهنتها من بديهيات اقليدس المعروفة.

تعريف ٧

لتكن A, B, C ثلاث نقاط مختلفة ولاتقع على مستقيم واحد، ان اتحاد {A, B, C} مع القطع A-B, A-C, B-C يدعى مثلثا، تدعى A, B, C الرؤوس. تدعى A-B, A-C, B-C الاضلاع.
الخطوط التي تحتوي الاضلاع تدعى خطوط الاضلاع.



شكل (١٧)

من الواضح ان المثلث يتعين من رؤوسه.
المثلث الذي يتعين من A,B,C يرمز له بالرمز ΔABC.
لقد قدم باخ البديهية التالية التي توضح بالشكل ١٧.

بديهية ١٠ (باخ)

اذا كانت A, B, C رؤوس مثلث و m هو مستقيم لايمر باي راس من هذه الرؤوس ويحتوي m على نقطة من الضلع A-B ، فان m يحتوي كذلك على نقطة من الضلع A-C او B-C.

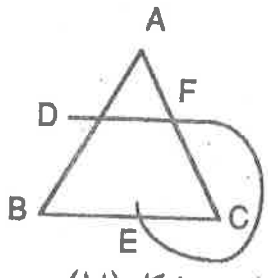
السؤال الذي يتبادر الى الاذهان هو هل ان المستقيم m يقطع كل من A-C وB-C؟. بالطبع كلا وهذا ما سنبرهنه في المبرهنة التالية:

مبرهنة ١٧

اذا كانت A, B, C رؤوس مثلث، اي مستقيم m يحتوي على نقطة من الضلع A-B ونقطة من الضلع A-C ، فانه لايمكن ان يحتوي على نقطة من الضلع B-C.

البرهان

نفرض وجود مستقيم m يحتوي على مثل هذه النقاط D, E, F بحيث ان D ∈ A-B ، E ∈ B-C و F ∈ A-C.
من الفرض ومبرهنة ٢، تكون النقاط مختلفة.
من بديهية ٧، تتحقق واحدة فقط مما يلي:
D-F-E ، D-E-F ، F-D-E
نفرض ان D-F-E. بما ان E ∈ B-C ، فانه تقع E على المستقيم BC (مبرهنة ١٣) وكذلك D تقع على الخط AB، ومن مبرهنة٢، النقاط D, E, B لاتقع على مستقيم واحد. لذلك من بديهية باخ، المستقيم AC الذي يقطع D-E في F يجب ان يقطع B-E او B-D. لكن هذا لايمكن من مبرهنة ٢ وبديهية ٧، لذا فان الفرض يكون خاطئا.
وبنفس الطريقة، نتوصل الى تناقض اذا كان D-E-F أو F-D-E.
وبهذا، فان المستقيم الذي يقطع ضلعين في مثلث، فانه لايقطع الضلع الثالث.



شكل (١٨)

والان نعيد نص بديهية باخ بشكل ابسط ((اذا كان مستقيم لايمر باي راس من رؤوس مثلث ويقطع ضلعا واحدا في المثلث، فانه يقطع في الاقل واحدا من الضلعين الاخرين.))

وكذلك نعيد نص مبرهنة ١٧ في الشكل التالي:
((اذا كان مستقيم يقطع ضلعا واحدا من مثلث، فانه يقطع في الاكثر واحدا من الضلعين الاخرين)).

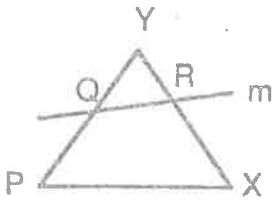
وبالنتيجة نتوصل الى مايلي:
((المستقيم الذي يقطع ضلعا واحدا من مثلث والذي لايمر باي راس منه، فانه يقطع ضلعا واحدا فقط من الضلعين الاخرين)).

تعريف ٨ شرح جهتي المستقيم او (نصفي) المستوي

ليكن m اي مستقيم و P نقطة لاتقع على m. لتكن S_1 مجموعة تحتوي على P وكل النقاط X لاتقع على m، بحيث ان P-X لاتحتوي على نقطة من m. لتكن S_2 مجموعة كل النقاط Y بحيث ان P-Y تحتوي على نقطة m. فان S_1 و S_2 تدعيان جهتي المستقيم m.
وتدعيان ايضا نصفي المستوي بالنسبة للمستقيم m.

مبرهنة ١٨

جهتا المستقيم m غير خاليتين.



شكل (١٩)

البرهان

ليكن m مستقيما ، توجد نقطة Q على m ونقطة P لاتقع على m. من بديهية ٩، توجد نقطة Y بحيث ان P-Q-Y ولذلك P-Y تحتوي على نقطة Q من m، اي ان $Y \in S_2$ وعليه فان جهة m المجموعة S_2 هي مجموعة غير خالية.

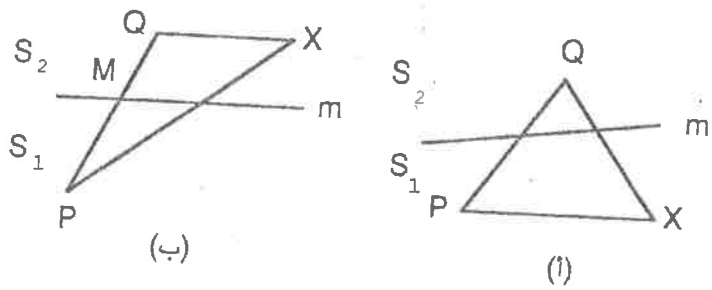
توجد نقطة اخرى R على m.
ومن بديهية ٩، توجد نقطة X بحيث ان Y-R-X. في ΔPXY بما ان m يقطع الضلع P-Y في Q ويقطع الضلع Y-X في R فانه من مبرهنة ١٧، لايمكن ان يقطع الضلع P-X.
ومن بديهية ٦، ومبرهنة ٢، لاتقع X على m، فان $X \in S_1$ اي ان جهة المستقيم m المجموعة S_1 هي مجموعة غير خالية.

يمكن ان نعبر عن جهتي المستقيم m نسبة الى نقطة P التي لاتقع على m بالصورة التالي :

$$S_1 = \{X \notin m : P\text{-}X \cap m = \phi \vee X = P\}$$
$$S_2 = \{Y : P\text{-}Y \cap m \neq \phi\}$$

مبرهنة ١٩ للطلاع

توجد جهتان فقط للمستقيم m (نسبة الى نقطة P) وتكونان مع m تجزئة لمجموعة كل النقاط.



شكل (٢٠)

البرهان

كل نقطة اما تقع على m او لاتقع، حيث لاتوجد نقطة تقع على m ولاتقع على m. من برهان مبرهنة ١٨، اذا كانت M نقطة على m، فانه توجد نقطتين P, Q لاتقعان على m، بحيث ان P-M-Q. لتكن X اية نفطة لاتقع على m. اذا كانت X تقع على المستقيم PQ، فانه تتحقق واحدة فقط من الحالات الاربعة التالية:

X-P-Q ، P-X-Q ، P-Q-X ، X = P او X = Q

فانه واحدة فقط من القطع P-X, Q-X تقطع m.

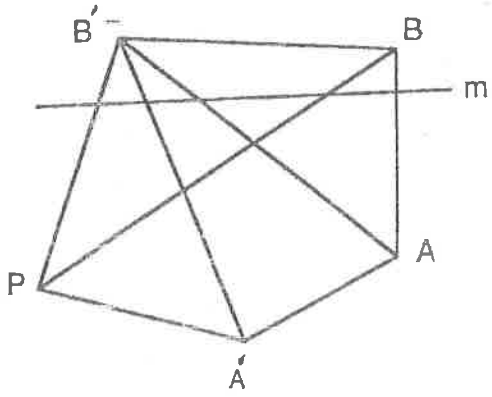
اذا كانت X لاتقع على المستقيم PQ، فانه ايضا واحدة فقط من القطع P-X, Q-X تقطع m.

حيث اذا كان اي قطعة من هذه القطع لاتقطع m، وبما ان P-M-Q، اي ان m يقطع P-Q في M، فان هذا يناقض بديهية ١٠. اما اذا كان كل من P-X و Q-X تقطع m، فان . هذا يناقض مبرهنة ١٧. هكذا، اذا كانت P-X لاتقطع m، فان X في S_1 كما في تعريف ٨ بما انه توجد هذه الاحتمالات فقط وان كل نقطة في واحدة فقط من المجموعات S_1, S_2 ، وبهذا نكمل البرهان .

تبين المبرهنات ١٨ و ١٩ ان جهتي المستقيم m، مع m تحقق خواص S_1, S_2 و S في التعريف.يجب ان نبين الان تحقق الحالة (أ) والحالة (ب) في تعريف ٤ .

مبرهنة ٢. Xiel

اي مستقيم m يفصل مجموعة كل النقاط الى جهتين.



شكل (٢١)

البرهان

من المبرهنتين ١٨ و ١٩، نعرف ان جهتي المستقيم m غير خاليتين ومنفصلتين عن بعضهما وعن m. لتكن P نقطة في احدى الجهتين. ولتكن A, A' اي نقطتين لاتقعان على m بحيث ان A'-P, A-P, لاتحتويان على نقطة من m. لتكن B, B' اي نقطتين في الجهة الاخرى من m، اي انه، لاتقعان على m لكن P-B، P-B' تحتويان على نقطة من m.

الحالة (أ)

اذا كان اي ثلاث، او اربع، او خمس من النقاط A, A', B,B′,p تقع على مستقيم واحد، فان m يقطع A-B, A-B', A'-B, A'-B' (لماذا؟). اذا كان اي ثلاث من هذه النقاط لاتقع على مستقيم واحد، فانه نستنتج مباشرة من بديهية باخ ان m يقطع A-B,A'-B ,A'-B' و A-B′.

الحالة (ب)

اذا كانت A, A' تنتميان الى نفس المجموعة، فانه يجب ان نبرهن ان $A-A'$ لاتقطع m. اذا كانت A, P, A' تقع على مستقيم واحد، او B, P, B' على مستقيم واحد، فانه يستنتج ان ايا من القطعتين $A-A'$ او $B-B'$ لاتقطع m (لماذا؟). اذا كانت A, P, A' لاتقع على خط واحد، وبما ان من الفرض ليست $P-A$ ولا $P-A'$ تقطع m، فان هذا يناقض بديهية باخ اذا قطع m القطعة $A-A'$.

اما اذا كانت B, P, B' لاتقع على خط واحد، وبما انه من الفرض كل من $P-B$ و $P-B'$ تقطع m، فان من مبرهنة ١٧، m لايقطع $B-B'$.

قاعدة لغوية

المجموعتان S_1, S_2 في تعريف ٨ يقال عنهما تتعينان من m و P.

تبين المبرهنة التالية وحدانية جهتي المستقيم m المتعينتين من المستقيم m واية نقطة لاتقع على m.

مبرهنة ٢١ للطلاع

ليكن m مستقيما، P، P' نقطتين لاتقعان على m. جهتا المستقيم m المتعينتين من P و m هما نفس الجهتين المتعينتين من P' و m.

البرهان

يترك كتمرين.

مبرهنة ٢٢

ليكن m, m' مستقيمين مختلفين. جهتا المستقيم m تختلفان عن جهتي المستقيم m'.

البرهان

يترك كتمرين.

تمارين ٤-٤

١- برهن اذا كان A-F-B و B-C-D، فانه توجد نقطة E في F-D بحيث ان A-E-C. (A,B,C لاتقع على مستقيم واحد).

٢- برهن اذا كان A, B, C ثلاث نقاط مختلفة ولاتقع على مستقيم واحد و D, E نقطتين بحيث ان B-C-D و C-E-A، فانه توجد نقطة F على الخط DE بحيث ان A-F-B.

٣- في تمرين ٢، بين ان D-E-F.

٤- اذا كان في ΔABC، A-D-B, A-E-C, و B-F-C، فان A-F تقطع D-E.

٥- برهن في ΔABC، اذا كان A-D-B، B-E-C، فان A-E تقطع C-D.

٤-٥ المجموعات المحدبة (Convex Sets)

تعريف ٩

تدعى المجموعة S مجموعة محدبة اذا وفقط اذا كان اي نقطتين تنتميان الى S، فان P-Q تكون مجموعة جزئية

 P, Q ∈ S
P-Q

من S.

مبرهنة ٢٣

(أ) اي مستقيم يكون مجموعة محدبة.

(ب) كل من جهتي نقطة O هي مجموعة محدبة. الطلاب

البرهان

(أ) ليكن m خطاً، لتكن A و B اي نقطتين على m. من تعريف القطعة، A و B تعينان القطعة A-B.
من مبرهنة ١٣، A-B مجموعة جزئية من m.
لذلك، من تعريف ٩، يكون m مجموعة محدبة.

(ب) لتكن S_2 و S_1 جهتي نقطة O على المستقيم m المتعينتين من النقطتين O و A.

اولا، يجب ان نبرهن ان S_1 هي مجموعة محدبة
لتكن X_1 و Y_1 اي نقطتين في S_1. يجب ان نبرهن ان X_1-Y_1 هي مجموعة جزئية من S1

ليكن $X \in X_1 - Y_1 \longrightarrow X_1 - X - Y_1$

$X_1 \in S_1 \longrightarrow O - X_1 - A \;,\; O-A-X_1$ ، او

$X_1 = A$

$Y_1 \in S_1 \longrightarrow O - Y_1 - A \;,\; O-A-Y_1$ ، او

$Y_1 = A$

(١) اذا كان $O-X_1-A$ و $O-Y_1-A$

من مبرهنة ٥، يكون $O-X_1-Y_1$ او $O-Y_1-X_1$.

عندما $O - X_1 - Y_1$ بما ان $X_1-X - Y_1$ فانه من مبرهنة ٤، يكون $O-X_1-X-Y_1 \longrightarrow O - X - Y_1$

وبما ان $O - Y_1 - A$ فانه من مبرهنة ٤، يكون

$O-X-Y_1-A \Longrightarrow O-X-A \Longrightarrow X \in S_1$

عندما $O-Y_1-X_1$ ، وبما ان X_1-X-Y_1 ، فان من
بديهية ٥ ومبرهنة ٤ يكون $O-Y_1-X-X_1$ $\longleftarrow$
$O-X-X_1$ وبما ان $O-X_1-A$ $\longleftarrow$ $O-X-X_1-A$
$\longleftarrow$ $O-X-A$ $\longleftarrow$ $X \in S_1$.

(٢) اذا كان $O-A-X_1$ و $O-A-Y_1$ ، فانه من مبرهنة ٥،
يكون $O-X_1-Y_1$ او $O-Y_1-X_1$
عندما $O-X_1-Y_1$ وبما ان X_1-X-Y_1 ، فانه من مبرهنة
٤، يكون $O-X_1-X-Y_1$ $\longleftarrow$ $O-X_1-X$ وبما ان $O-A-X_1$
، فانه من مبرهنة ٤، يكون $O-A-X_1-X$ $\longleftarrow$
$O-A-X$ $\longleftarrow$ $X \in S_1$
عندما $O-Y_1-X_1$ وبما ان X_1-X-Y_1 ، فانه من مبرهنة
٤، يكون $O-Y_1-X-X_1$ $\longleftarrow$ $O-Y_1-X$ وبما ان
$O-A-Y_1$ ، فانه من مبرهنة ٤، يكون $O-A-Y_1-X$
$\longleftarrow$ $O-A-X$
$\longleftarrow$ $X \in S_1$

(٣) اذا كان $O-X_1-A$ و $O-A-Y_1$ ، فانه من مبرهنة ٤،
يكون $O-X_1-A-Y_1$ $\longleftarrow$ $O-X_1-Y_1$ وبما ان X_1-X-Y_1
فانه من مبرهنة ٤، $O-X_1-X-Y_1$
$\longleftarrow$ $O-X_1-X$ وبما ان $O-X_1-A$
من مبرهنة ٥ $\longleftarrow$ $O-X-A$ او $O-A-X$ او $X = A$
$\longleftarrow$ $X \in S_1$

(٤) اذا كان $X_1 = A$ و $O-Y_1-A$ او $O-A-Y_1$
$\longleftarrow$ $O-Y_1-X_1$ او $O-X_1-Y_1$
وبما ان X_1-X-Y_1
فانه من مبرهنة ٤ $\longleftarrow$ $O-Y_1-X-X_1$ او $O-X_1-X-Y_1$
$\longleftarrow$ $O-X-X_1$ او $O-X_1-X$ وبما ان $X_1 = A$
$\longleftarrow$ $O-X-A$ او $O-A-X$

$\longleftarrow \quad X \in S_1$.

(٥) اذا كان $O-A-X_1$ و $O-Y_1-A$ ، البرهان يكون مشابها للحالة (٣).

(٦) اذا كان $A = Y_1$ و $O-X_1-A$ او $O-A-X_1$ ، يكون البرهان مشابها للحالة (٤).

ثانيا، يجب ان نبرهن ان S_2 هي مجموعة محدبة
لتكن X_2, Y_2 نقطتين مختلفتين في S_2، يجب ان نبرهن ان X_2-Y_2 مجموعة جزئية من S_2

ليكن $X \in X_2-Y_2 \longrightarrow X_2-X-Y_2$

$X_2 \in S_2 \longrightarrow X_2-O-A$

$Y_2 \in S_2 \longrightarrow Y_2-O-A$

من بديهية ٥، X_2-O-A و $Y_2-O-A \longrightarrow A-O-X_2$ و $A-O-Y_2$

ومن مبرهنة ٥ $\longrightarrow O-X_2-Y_2$ او $O-Y_2-X_2$

عندما $O-X_2-Y_2$ وبما ان X_2-X-Y_2 ، فانه من مبرهنة ٤) يكون $O-X_2-X-Y_2 \longrightarrow O-X_2-X$

ومن بديهية ٥ $\longrightarrow X-X_2-O$ وبما ان X_2-O-A

من مبرهنة ٤ $\longrightarrow X-X_2-O-A$

$\longrightarrow X-O-A$

$\longrightarrow X \in S_2$

عندما $O-Y_2-X_2$

بما ان X_2-X-Y_2 ، فانه من بديهية ٥، يكون Y_2-X-X_2

وبما ان $O-Y_2-X_2$ ، فان من مبرهنة ٤، يكون $O-Y_2-X-X_2 \longrightarrow O-Y_2-X$

بما ان Y_2-O-A ، فانه من بديهية ٥، يكون $A-O-Y_2$

من مبرهنة ٤، $O-Y_2-X$ و $A-O-Y_2 \longrightarrow A-O-Y_2-X$

من بديهية ٥ ⟵ $A-O-X$
⟵ $X-O-A$
⟵ $X \in S_2$

لذلك، فان كل من S_1, S_2 تكون مجموعة محدبة.

مبرهنة ٢٤

كل قطعة هي مجموعة محدبة.

البرهان

لتكن $A-B$ قطعة. يجب ان نبرهن ان $A-B$ هي مجموعة محدبة. لتكن X و Y اي نقطتين مختلفتين في $A-B$. يجب ان نبرهن ان $X-Y$ هي مجموعة جزئية من $A-B$.

ليكن $Z \in X-Y$ ⟵ $X-Z-Y$
$X \in A-B$ ⟵ $A-X-B$
$Y \in A-B$ ⟵ $A-Y-B$

من مبرهنة ٥، $A-X-B$ و $A-Y-B$ ⟵ $A-Y-X$ او $A-X-Y$

عندما $A-X-Y$ وبما ان $X-Z-Y$ ، فان من مبرهنة ٤،
⟵ $A-X-Z-Y$
⟵ $A-Z-Y$ وبما ان $A-Y-B$
من مبرهنة ٤ ⟵ $A-Z-Y-B$
⟵ $A-Z-B$
⟵ $Z \in A-B$

عندما $A-Y-X$ ، من بديهية ٥، يكون $X-Y-A$
وبما ان $X-Z-Y$
من مبرهنة ٤ ⟵ $X-Z-Y-A$
⟵ $X-Z-A$
من بديهية ٥ ⟵ $A-Z-X$ وبما ان $A-X-B$
من مبرهنة ٤ ⟵ $A-Z-X-B$

$\longleftarrow$ A-Z-B

$\longleftarrow$ $Z \in A-B$

وبهذا، فان A-B هي مجموعة محدبة.

مبرهنة ٢٥ المطلوب

كل من جهتي المستقيم m هي مجموعة محدبة.

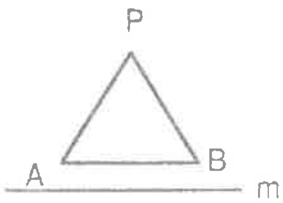
البرهان

لتكن S_1, S_2 جهتي المستقيم m المتعينتين من m ونقطة P.

$$S_1 = \{ X \notin m : P\text{-}X \cap m = \phi \} \cup \{P\}$$

$$S_2 = \{ Y : P\text{-}Y \cap m \neq \phi \}$$

(أ) يجب ان نبرهن ان S_1 هي مجموعة محدبة.
لتكن A و B نقطتين مختلفتين في S_1، يجب ان نبرهن ان A-B هي مجموعة جزئية من S_1.
ليكن $X \in A\text{-}B$ $\longrightarrow$ A-X-B
$A \in S_1$ $\longrightarrow$ $A \notin m$ وان P - A لاتقطع m او
$A = P$
$B \in S_1$ $\longrightarrow$ $B \notin m$ وان P-B لاتقطع m او
$B = P$
يجب ان نبرهن ان $X \in S_1$



شكل (٢٢)

اذا كان $X = P$ ⟵ $X \in S_1$

نفرض ان $X \neq P$

اما ان تكون النقاط A, B, P على استقامة واحدة او ليست على استقامة واحدة.

الحالة (١)

اذا كانت A, B, P لاتقع على مستقيم واحد.

في ΔABP، اذا قطع المستقيم m الضلع $A-B$

وبما ان لايمر باي راس منه، فانه من بديهية باخ، m يقطع $P-A$ او $P-B$ وهذا خلاف الفرض، لذلك فان m لايقطع $A-B$.

وبما ان $X \notin A-B$ ، فان $X \notin m$

في ΔPAX، نفرض ان m يقطع $P-X$

وبما ان m لايقطع $P-A$ ، فانه من بديهية باخ، m يقطع الضلع $A-X$

من مبرهنة ١٥، $A-X$ هي مجموعة جزئية من $A-B$، فان m يقطع $A-B$ وهذا تناقض.

لذا فان m لايقطع $P-X$ وبما ان $X \notin m$ ، فانه من تعريف S_1، $X \in S_1$

الحالة (٢)

نفرض ان A, B, P تقع على استقامة واحدة.

من بديهية ٦، بما ان $A-X-B$ ⟵ A, X, B مختلفة وعلى استقامة واحدة. اي ان X على الخط AB ⟵ النقاط A, B, P, X تقع على مستقيم واحد.

وبما ان $P \neq X$ ، $A \neq B$ ، $A \neq X$ ، $B \neq X$.

نفرض ان $A \neq P$ و $B \neq P$ ⟵ النقاط A, B, P, X مختلفة.

النقاط A, B, P, X مختلفة وعلى استقامة واحدة،
وبما ان $A-X-B$
فانه من بديهية ٨ $\longleftarrow$ تتحقق واحدة فقط مما يلي:
$P-A-X-B$ ، $A-P-X-B$ ، $A-X-P-B$ ، $A-X-B-P$
اذا كان $A-X-B-P$ $\longleftarrow$ $A-X-P$
ومن مبرهنة ١٥ $\longleftarrow$ $P-X$ هي مجموعة جزئية من $P-A$
وبما ان $P-A$ لاتقطع m ، فان $P-X$ لاتقطع m.
اذا كان $A-X-P-B$ $\longleftarrow$ $A-X-P$.
وكما في الحالة السابقة، $P-X$ لاتقطع m
اذا كان $A-P-X-B$ $\longleftarrow$ $P-X-B$
ومن مبرهنة ١٥ $\longleftarrow$ $P-X$ هي مجموعة جزئية من $P-B$
وبما ان $P-B$ لاتقطع m، فان $P-X$ لاتقطع m
اذا كان $P-A-X-B$ $\longleftarrow$ $P-X-B$
من مبرهنة ١٥ $\longleftarrow$ $P-X$ هي مجموعة جزئية من $P-B$.
كما في الحالة السابقة $\longleftarrow$ $P-X$ لاتقطع m.
بما ان $A-X-B$ $A \in S_1$ و $B \in S_1$، ومن تعريف الفصل ومبرهنة ٢٠ فان، X لاتقع على m
وبهذا فقد برهنا ان $P-X$ لاتقطع m و X لاتقع على m اي ان $X \in S_1$
نفرض $A = P$ ، وبما ان $A-X-B$ ، فان $P-X-B$
ومن مبرهنة ١٥، $P-X$ هي مجموعة جزئية من $P-B$
وبما ان $P-B$ لاتقطع m، فان $P-X$ لاتقطع m
$\longleftarrow$ $X \in S_1$
وبنفس الطريقة اذا كان $B = P$.
وبذلك تكون S_1 مجموعة محدبة.

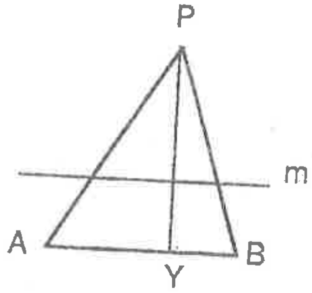
(ب) يجب ان نبرهن ان S_2 هي مجموعة محدبة.
لتكن A و B نقطتين مختلفتين في S_2. يجب ان نبرهن ان A-B هي مجموعة جزئية من S_2.
لتكن $Y \in A\text{-}B$. يجب ان نبرهن ان $Y \in S_2$

$Y \in A\text{-}B \longrightarrow A\text{-}Y\text{-}B$

$A \in S_2 \longrightarrow$ P-A تقطع m، ومن مبرهنة ٢، A لاتقع على m

$B \in S_2 \longrightarrow$ P-B تقطع m، ومن مبرهنة ٢، B لاتقع على m

اما النقاط P, A, B على استقامة واحدة او ليست على استقامة واحدة.
نفرض ان النقاط P, A, B لاتقع على مستقيم واحد.
في ΔPAB الخط m يقطع P-A و P-B ولايمر باي راس من ΔPAB.
من مبرهنة ١٧ $\longrightarrow$ m لايقطع A-B
وبما ان A-Y-B ، فانه من مبرهنة ١٥ تكون B-Y مجموعة جزئية من A-B $\longrightarrow$ m لايقطع B-Y



شكل (٢٣)

في $\triangle PYB$ ، m يقطع $P-B$ ولايقطع $B-Y$ ولايمر باي راس من المثلث، فانه من بديهية باخ، m يقطع $P-Y$

$\longleftarrow Y \in S_2$

نفرض ان النقاط P, A, B على مستقيم واحد.

من بديهية ٧ $\longleftarrow$ تتحقق واحدة فقط ممايلي:

$P-A-B$ ، $P-B-A$ ، $A-P-B$

١ـ نفرض ان $P-A-B$، وبما ان $A-Y-B$

من مبرهنة ٤ $\longleftarrow P-A-Y-B \longleftarrow P-A-Y$

من مبرهنة ١٥ $\longleftarrow P-A \subset P-Y$

وبما ان $P-A$ تقطع m $\longleftarrow P-Y$ تقطع m

$\longleftarrow Y \in S_2$

٢ـ نفرض ان $P-B-A$ ، بنفس الطريقة السابقة، فان $Y \in S_2$

٣ـ نفرض $A-P-B$.

لتكن $P-A$ تقطع m في X_1 و $P-B$ تقطع m في X_2.

اي ان $P-X_1-A$ و $P-X_2-B$

وبما ان $P-X_1-A$ ، $A-P-B$ ، فانه من مبرهنة ٤ وبديهية ٥، يكون $A-X_1-P-B \longleftarrow X_1-P-B$

وبما ان X_1-P-B ، $P-X_2-B$ ، فانه من مبرهنة ٣، النقاط B, P, X_1, X_2 مختلفة وعلى مستقيم واحد $\longleftarrow X_1, X_2$ تقعان على المستقيم PB.

$\longleftarrow$ m يقطع المستقيم PB في النقطتين المختلفتين X_1 و X_2 وهذا يخالف مبرهنة ٢.

لذا فان هذه الحالة لايمكن ان تؤخذ.

من الحالتين (١) و (٢)، نستنتج ان S_2 هي مجموعة محدبة.

مبرهنة ٢٦

تقاطع n من المجموعات المحدبة هو مجموعة محدبة.

البرهان

ليكن $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$

حيث ان $A_1, A_2, \ldots, A_n$ هي مجموعات محدبة.

يجب ان نبرهن ان A هي مجموعة محدبة.

لتكن X و Y نقطتين مختلفتين في A

يجب ان نبين ان X-Y هي مجموعة جزئية من A

$X, Y \in A \longrightarrow$

$X, Y \in A_1$ ، $X, Y \in A_2$ ، .... و $X, Y \in A_n$

وبما ان $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات محدبة

$\longleftarrow$ $X-Y \subseteq A_1$ ، $X-Y \subseteq A_2$ ، ... ، $X-Y \subseteq A_n$

$\longleftarrow$ $X-Y \subseteq A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$

$\longleftarrow$ $X-Y \subseteq A$

$\longleftarrow$ A هي مجموعة محدبة.

تعريف ١٠

تدعى جهتا نقطة O على مستقيم m بجهتي O المتعاكستين.

تعريف ١١

تدعى جهتا المستقيم m بجهتي m المتعاكستين.

مبرهنة ٢٧

(أ) اذا كانت النقطتان A, B في جهتين متعاكستين من مستقيم m و B, C في نفس الجهة من m، فان A, C في جهتين متعاكستين من m.

(ب) اذا كانت النقطتان A, B في جهتين متعاكستين من مستقيم m وان B, C في جهتين متعاكستين من m، فان A, C في نفس الجهة من m.

(جـ) اذا كانت A, B في نفس الجهة من m و B, C في نفس الجهة من m، فان A, C في نفس الجهة من m.

تعريف ١٢

مجموعة كل النقاط على مستقيم في نفس الجهة من نقطة O، تدعى شعاع، تدعى O نقطة البداية.
الشعاعان المناظران لجهتي O يدعيان شعاعين متعاكسين.

يرمز للشعاع الذي نقطة بدايته A و B نقطة على الشعاع بالرمز:

$$\overrightarrow{AB}$$

اي ان $\overrightarrow{AB}$ هو مجموعة كل النقاط X على المستقيم AB بحيث ان A لاتقع بين X و B

بتعبير آخر، اما يكون A-X-B او A-B-X.

مبرهنة ٢٨

(أ) الشعاع هو مجموعة محدبة.
(ب) الشعاع هو مجموعة جزئية من مستقيم.
(ج) للشعاع نقطة بداية وحيدة.
(د) نقطة البداية لاتنتمي الى الشعاع.

(هـ) لكل شعاع يوجد شعاع واحد معاكس له.

(و) الشعاع الذي نقطة بدايته على مستقيم، لكنه لايقع على المستقيم، فان كل نقاطه تقع في نفس الجهة من المستقيم.

(ز) يتعين الشعاع من نقطة بدايته واي نقطة من نقاطه.

البرهان

(ا) يستنتج حالا من مبرهنة ٢٣(ب) ومن تعريف الشعاع.

(ب) يبرهن من تعريف الشعاع ،

(ج) يبرهن من تعريف الشعاع ومن مبرهنة ٩.

(د) يبرهن مباشرة من مبرهنة ٦ وتعريف الشعاع.

(هـ) يبرهن من تعريف الشعاع ومبرهنة ٧.

(و) ليكن $\overrightarrow{OA}$ شعاعا لايقع على مستقيم m، وان O على m.

يجب ان نبرهن ان كل نقاط $\overrightarrow{OA}$ تقع في نفس الجهة من m.

نفرض ان العبارة خطأ، فتوجد نقطة B على $\overrightarrow{OA}$ بحيث ان B تقع في جهة m التي لاتحتوي على A، اي ان A و B في جهتين متعاكستين من m.

من تعريف الفصل ومبرهنة ٢٠، حيث ان m يفصل جهتيه ، فانه توجد نقطة Q على m بحيث ان $A-Q-B$.

من تعريف الشعاع الذي هو جزء من مستقيم، O تقع على المستقيم AB، وبما ان $A-Q-B$ ، فانه من بديهية ٦، Q تقع على المستقيم AB.

اي ان، الخط AB يقطع الخط m في النقطتين O و Q، من بديهية ١، يكون $O = Q$

بما ان $A-Q-B \longrightarrow A-O-B$

A و B في جهتين متعاكستين من O على الخط AB. بتعبير آخر، A و B في شعاعين متعاكسين نقطة بدايتهما O.
وهذا يخالف الفرض بان A و B تقعان على الشعاع $\overrightarrow{OA}$. لذا فان فرضيتنا خاطئة.
اي ان كل نقاط OA تقع في نفس الجهة من m.
(ز) يستنتج البرهان مباشرة من تعريف الشعاع ومبرهنة ٨.

٤-٦ داخل وخارج المثلث

تعريف ١٣

داخل Δ ABC هو مجموعة كل النقاط الناتجة من تقاطع
(أ) جهة المستقيم AB التي تحتوي C.
(ب) جهة المستقيم AC التي تحتوي B.
(جـ) جهة المستقيم BC التي تحتوي A.
خارج مثلث هو مجموعة كل النقاط التي لاتقع على المثلث ولاتقع في داخله.

مبرهنة ٢٩

داخل مثلث هو مجموعة محدبة.

البرهان

ليكن ABC مثلثا.
داخل المثلث ABC هو تقاطع جهة AB التي تحتوي C وجهة AC التي تحتوي B

وجهة BC التي تحتوي A

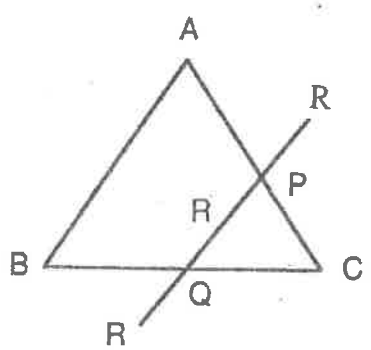
من مبرهنة ٢٥ ⟵ جهة المستقيم هي مجموعة محدبة

ومن مبرهنة ٢٦ ⟵ تقاطع ثلاث مجموعات محدبة هي مجموعة محدبة

⟵ داخل ΔABC هو مجموعة محدبة.

مبرهنة ٣٠

اذا كانت P, Q نقطتين على ضلعي مثلث، و R نقطة على المستقيم PQ وفي داخل المثلث، فان P-R-Q.



شكل (٢٤)

البرهان

ليكن ABC مثلثا، P نقطة على الضلع A-C و Q نقطة على الضلع B-C ، R نقطة على المستقيم PQ وفي داخل المثلث.

من بديهية ٧، تتحقق واحدة فقط مما يلي:

P-Q-R ، Q-P-R ، P-R-Q

نفرض ان P-Q-R تتحقق، وبما ان Q على المستقيم BC ، فان P و R في جهتين متعاكستين من BC.

بما ان الشعاع CA لايقع على الخط BC لكن نقطة بدايته على الخط BC ، فمن مبرهنة ٢٨(و)،

كل نقاط الشعاع CA تقع في نفس الجهة من BC

اي ان A و P في نفس الجهة من BC.

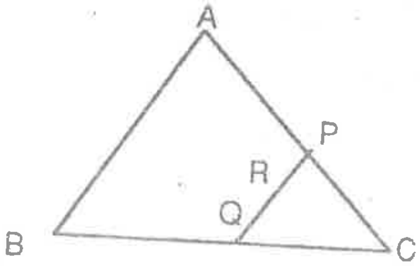
ومن مبرهنة ٢٧(أ)، A و R تقعان في جهتين متعاكستين من BC

اي ان R لاتقع في جهة BC التي تحتوي A مناقضا الفرض بان R في داخل المثلث.

وبنفس الطريقة نتوصل الى تناقض ، اذا فرضنا Q-P-R. لذا فان P-R-Q تتحقق.

مبرهنة ٣١

اذا كانت P, Q نقطتين على ضلعي مثلث فان P-Q هي مجموعة جزئية من داخل المثلث.



شكل (٢٥)

البرهان

ليكن ABC مثلثا، وفيه النقطة P على الضلع A-C والنقطة Q على الضلع B-C. لتكن R نقطة في P-Q.

يجب ان نبرهن ان R في داخل المثلث.

بما ان الشعاع CA لايقع على المستقيم BC وان نقطة

بدايته C تقع على BC ، فمن مبرهنة ٢٨(و)، كل نقاط $\overrightarrow{CA}$ تقع في نفس الجهة من BC ،اي ان A و P في نفس الجهة من BC.

وكذلك، بما ان P-R-Q ، فان R و P تقعان على الشعاع $\overrightarrow{QP}$. وبما ان Q على الخط BC ، فانه من مبرهنة ٢٨ (و) كل نقاط QP تقع في نفس الجهة من BC ، اي ان P, R في نفس الجهة من BC. ومن مبرهنة ٢٧(أ)، النقطتان A و R تقعان في نفس الجهة من BC. اي ان R تقع في جهة BC التي تحتوي A.

مرة ثانية، وبنفس الطريقة نستطيع ان نبين ان R تقع في جهة AC التي تحتوي B.

كذلك، بما ان C ,Q تقعان على الشعاع $\overrightarrow{BC}$ وان $\overrightarrow{BC}$ لايقع على المستقيم AB ونقطة بدايته B على AB ، فمن مبرهنة ٢٨(و)، كل نقاط $\overrightarrow{BC}$ تقع في نفس الجهة من AB اي ان Q,C في نفس الجهة من AB. وبالمثل بالنسبة الى P,C.

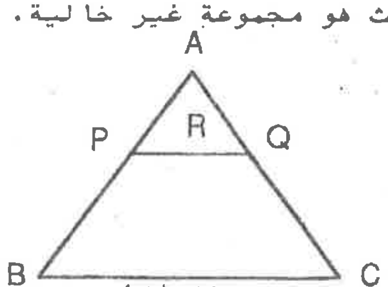
ومن مبرهنة ٢٧(جـ)، P و Q في جهة AB التي تحتوي C.

من مبرهنة ٢٥، جهة المستقيم AB التي تحتوي C هي مجموعة محدبة، فان P-Q هي مجموعة جزئية من جهة المستقيم AB التي تحتوي C. وبما ان R في P-Q ، فان R في جهة المستقيم AB التي تحتوي C.

من الخطوات اعلاه، نستنتج ان R في داخل المثلث.

مبرهنة ٣٢

داخل مثلث هو مجموعة غير خالية.



شكل (٢٦)

البرهان

ليكن ABC مثلثا.
من بديهية ٩، توجد نقطة P بحيث ان A-P-B
وكذلك توجد نقطة Q بحيث A-Q-C.
من مبرهنة ٢، $P \neq Q$
من بديهية ٩، توجد نقطة R بحيث ان P-R-Q
⟵ $R \in$ P-Q
من مبرهنة ٣١، P-Q هي مجموعة جزئية من داخل المثلث
⟵ R في داخل المثلث
لذا، فان داخل المثلث هو مجموعة غير خالية.

مبرهنة ٣٣ المهلا ٨

في المثلث ABC ، اذا كان A-D-B ، فان C-D مع داخل المثلث ACD وداخل المثلث BCD تكون تجزئة لداخل المثلث ABC.

البرهان

ليكن داخل $S = \Delta ABC$ ، داخل $S_1 = \Delta ABC$ داخل $S_2 = \Delta BCD$. يجب ان نبرهن ان C-D مع S_1 و S_2 تكون تجزئة الى S.
يجب ان نبين لكل X في S ، فان X تنتمي الى واحدة وواحدة فقط من المجموعات C-D ، S_1 ، S_2
$X \in S$ ⟵ X في جهة AB التي تحتوي C ،
X في جهة AC التي تحتوي B ، و
X في جهة BC التي تحتوي A .
بما ان A-D-B ، ومن بديهية ٦، AB = AD = BD
⟵ X في جهة AD التي تحتوي C وفي جهة BD التي

تحتوي C.

بما ان A-D-B و A على AC ، فانه من مبرهنة ٢٨(و)

X في جهة AC التي تحتوي D.

وبنفس الطريقة، X في جهة BC التي تحتوي D.

اما $X \in C\text{-}D$ او $X \notin C\text{-}D$

الحالة (١)

نفرض ان $X \in C\text{-}D$ ، ومن مبرهنة ١٣، $X \in CD$
ومن تعريف الفصل ومبرهنة ٢٠، X لاتقع في جهتي CD.
وبما ان A-D-B، فان A و B في جهتين متعاكستين من CD

$\longleftarrow$ X لاتقع في جهة CD التي تحتوي A.
ولاتقع في جهة CD التي تحتوي B.

$\longleftarrow$ $X \notin S_1$ و $X \notin S_2$

$\longleftarrow$ تنتمي X الى واحدة فقط من المجموعات:
$C\text{-}D$ ، S_1, S_2

الحالة (٢)

نفرض ان $X \notin C\text{-}D$ $\longleftarrow$ اما $X \in CD$ او $X \notin CD$

(أ) نفرض ان $X \in CD$ ، ومن بديهية ٧،
اما $X\text{-}C\text{-}D$ او $C\text{-}D\text{-}X$
اذا كان X-C-D وبما ان $C \in AC$ ، فان X و D في جهتين متعاكستين من AC
ومن مبرهنة ٢٨ (و)، B و D في نفس الجهة من AC
ومن مبرهنة ٢٧(أ)، B و X في جهتين متعاكستين من AC

اي ان X لاتقع في جهة AC التي تحتوي B

$\longleftarrow$ $X \notin S$ وهذا يناقض الفرض.

اذا كان C-D-X وبما ان $D \in AB$ ، فان X و C في جهتين متعاكستين من AB.

$\longleftarrow$ X لاتقع في جهة AB التي تحتوي C

$\longleftarrow$ $X \notin S$ وهذا يناقض الفرض

(ب) نفرض $X \notin CD$

من مبرهنة ٢٠ $\longrightarrow$ تقع X في احدى جهتي CD

$\longleftarrow$ اما X في جهة CD التي تحتوي A او في جهة CD التي تحتوي B.

نفرض ان X في جهة CD التي تحتوي A $\longleftarrow$ X لاتقع في جهة CD التي تحتوي B

$\longleftarrow$ $X \notin S_2$

ومن اعلاه، X في جهة AC التي تحتوي D و X في جهة AD التي تحتوي C

$\longleftarrow$ $X \in S_1$

وبما ان $X \notin S_2$ و $X \notin C\text{-}D$ ، فان X تنتمي الى واحدة فقط من المجموعات $C\text{-}D$, S_1, S_2.

اذا كانت X في جهة CD التي تحتوي B ، فان X لاتقع في جهة CD التي تحتوي A ، اي ان $X \notin S_1$.

ومن اعلاه، X في جهة BD التي تحتوي C و X في جهة BC التي تحتوي D.

فان $X \in S_2$

وبما ان $X \notin C\text{-}D$ و $X \notin S_1$ ، فان X تنتمي الى واحدة وواحدة فقط من المجموعات:

$C\text{-}D$ ، $S_1; S_2$

تعريف ١٤

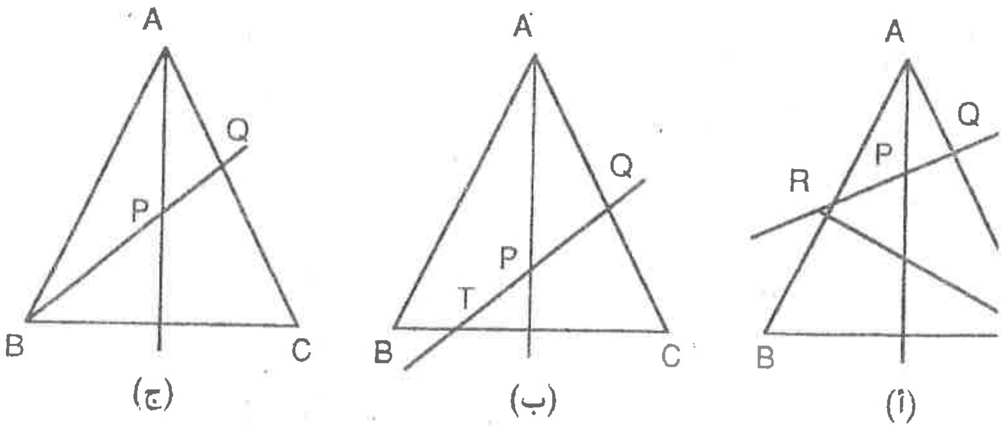
في اي مثلث، الضلع الذي لايحتوي احد رؤوس المثلث كنقطة نهايته يدعى الضلع المقابل لذلك الرأس. والراس يدعى الراس المقابل.

مبرهنة ٣٤ مبرهنة الخط المستعرض

المستقيم الذي يمر براس مثلث ونقطة في داخل المثلث، فانه يقطع الضلع المقابل.

البرهان

ليكن m مستقيما يمر من راس A لمثلث ABC ، اي انه يقطع كلا الخطين AB و AC ، لذلك، من مبرهنة ٢، m لايمكن ان يقطعهما مرة ثانية. نفرض ان m يمر من نقطة P في داخل المثلث. نأخذ اي نقطة Q على A-C. فانه من بديهية باخ، اذا كان الخط PQ لايحتوي على راس، يقطع A-B او B-C.



شكل (٢٧)

الحالة (١)   (شكل ٢٧(أ))

نفـرض ان المستقيم QP يقطع A-B في نقطة R ، فانه من مبرهنة ٣٠، يكون Q-P-R. في المثلث QRC ، بما ان Q-P-R ، فانـه تتحقق بديهية باخ، والخط AP طالما لايمكن ان يقطع المستقيم AC مرة ثانية، فانه يقطع R-C في نقطة، ولتكن S. اي ان R-S-C. مرة ثانية، في المثلث RBC تتحقق بديهية باخ، وبما ان الخط AS لايمكن ان يقطع الخط AB مرة ثانية، فانه يجب ان يقطع B-C.

الحالة (٢)   (شكل ٢٧(ب))

نفرض ان المستقيم QP يقطع B-C في نقطة T، فانه من مبرهنة ٣٠، يكون Q-P-T ، ومرة ثانية تتحقق بديهية باخ في المثلث QTC. بما ان AP لايمكن ان يقطع المستقيم AC مرة ثانية، فانه يجب ان يقطع T-C ، اي انه يقطع B-C.

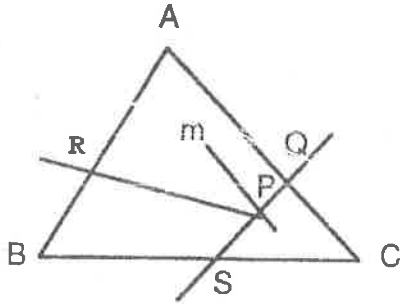
الحالة (٣)   (شكل ٢٧(ج))

نفـرض ان الخط QP يحتوي على رأس؛ بما انه لايمكن ان يحتوي على A او C، لذلك فانـه يحتوي على B. (يترك كتمرين لبيان ان Q-P-B.) بتطبيق بديهية باخ على المثلث QBC ، بطريقة مشابهة للبرهان اعلاه، نستنتج ان المستقيم AP يقطع B-C.

مبرهنة ٣٥ المعاكسة

المستقيم الذي يمر في نقطة داخل مثلث، لكنه

لايحتـوي علـى راس من المثلث، يقطـع في الاقـل احـد الاضلاع.



شكل (٢٨)

البرهان

لتكن P نقطـة في داخـل مثلـث ABC ، وليكـن m مستقيما يمر من P. نأخذ اية نقطة على ضلع، ولتكن Q في A-C ، اذا كان m يحتوي على Q، فـان هذا يؤدي الى النتيجة. اذا كان m لايحتوي على Q، نـأخـذ الخط QP. من بديهية باخ اذا كان الخط QP لايحتوي على B، فـانـه امـا يقطع A-B او يقطع B-C. اذا كان الخط QP يقطع A-B في نقطة، ولتكن R، فـانـه يتكون مثلـث ARQ ؛ اذا كان QP يقطع B-C في نقطة، ولتكن S، فـانـه يتكون مثلث QSC.

يستنتج من مبرهنة ٣٠ ان Q-P-R ، وفي الحالة الاخرى يكون Q-P-S. لذلك فـانـه في اي حالـة، تطبق بديهية باخ، و m يقطع اما A-R او A-Q في المثلث ARQ ، او S-C او Q-C في المثلث QBC. لذلك، في اي حالة، يقطـع احد اضـلاع المثلث ABC. اخيـرا، اذا كـان المسـتقيم QP يحتوي على B، فان Q-P-B (لاحظ الاسئلة ادناه) وبهذا نتوصل الى النتيجة.

تمارين ٤-٦

١- برهن على انه اذا كان $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ ، فان $A = C$

٢- برهن على ان $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$

٣- برهن على ان كلا من المجموعات التالية محدبة :
ϕ ، $\{A\}$ ، مجموعة كل النقاط (المستوي)

٤- برهن او ادحض كلا مما يلي:

أ) $A-B = C-D$ اذا وفقط اذا $A = C$ او $A = D$

ب) نهايتا القطعة وحيدتان.

جـ) اذا كانت A, B نقطتين مختلفتين، فان $\{A, B\}$ هي مجموعة محدبة.

د) اتحاد مجموعتين محدبتين هي مجموعة محدبة.

هـ) مجموعة جزئية من مجموعة محدبة تكون مجموعة محدبة.

٥- برهن على انه اذا كان مستقيم يمر من نقطة داخلية لمثلث ونقطة على ضلع من المثلث، ولايقطع اي من الضلعين الاخرين، فانه يمر بالرأس المقابل.

٦- برهن على انه في مثلث ABC ، اذا كان A-D-B ، و B-E-C فان نقطة تقاطع A-E و C-D تقع في داخل المثلث.

٧- برهن على ان نقطة تقع في داخل مثلث اذا وفقط اذا تقع بين رأس ونقطة على الضلع المقابل.

مطلب

٤-٧ الزوايا

تعريف ١٥

ليكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ شعاعين مختلفين لايقعان على مستقيم واحد ولهما نقطة بداية مشتركة A، اتحاد الشعاعين مع نقطة البداية يدعى زاوية.
الشعاعان هما ضلعي الزاوية. المستقيم الذي يحتوي الضلع يدعى خط الضلع. نقطة البداية تدعى الرأس.

رمز

يرمز للزاوية التي هي اتحاد الشعاعين AB و AC بالرمز:

$$\angle BAC \quad \text{او} \quad \angle CAB$$

او للتبسيط $\angle A$

مبرهنة ٣٦

ليكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ شعاعين لايقعان على مستقيم واحد وان B' على $\overrightarrow{AB}$ و C' على $\overrightarrow{AC}$ فان

$$\angle BAC = \angle BAC' = \angle B'AC = \angle B'AC'$$

البرهان

تبرهن من تعريف ١٥ ومبرهنة ٢٨(ز).

قاعدة لغوية

زاوية مثلث هي الزواية التي يَكون رأسها هو رأس في المثلث وقطعتي المثلث التي يكون الرأس كنقطة نهايتهما كمجموعتين جزئيتين من ضلعيها.
ضلع مقابل لزاوية هو ضلع المثلث الذي لايكون رأس الزاوية كنقطة نهاية. هذا يعني، مثلا الضلع المقابل للزاوية BAC هو نفس الضلع المقابل للرأس A.

تعريف ١٦

داخل زاوية CAB هو تقاطع جهة الشعاع AC التي تحتوي B وجهة الشعاع AB التي تحتوي C.
خارج زاوية هو مجموعة كل النقاط التي لاتقع في داخل الزاوية ولا على الزاوية.
عندما نتكلم عن جهة شعاع او جهة قطعة، فمن الواضح نقصد احدى جهتي المستقيم الذي يحتوي الشعاع او القطعة.

مبرهنة ٣٧

للزاوية يوجد رأس واحد فقط.

البرهان

يستنتج مباشرة من تعريف الزاوية ومن مبرهنة ٢٨ (جـ)

مبرهنة ٣٨

داخل زاوية هو مجموعة غير خالية.

البرهان

بما ان داخل مثلث هو مجموعة جزئية من داخل زاوية، ومن مبرهنة ٣٢؛ داخل المثلث هو مجموعة غير خالية، فان داخل الزاوية هو مجموعة غير خالية.

مبرهنة ٣٩

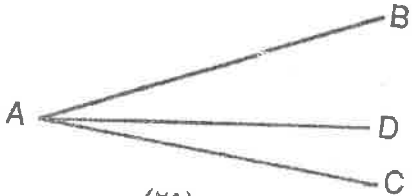
داخل زاوية هو مجموعة محدبة.

البرهان

لتكن $\angle BAC$ زاوية
داخل $\angle BAC$ هو تقاطع جهة $\overrightarrow{AB}$ التي تحتوي C وجهة $\overrightarrow{AC}$ التي تحتوي B.
من مبرهنة ٢٥، جهة المستقيم هي مجموعة محدبة
ومن مبرهنة ٢٦، تقاطع n من المجموعات المحدبة، $n = 2$، هو مجموعة محدبة.
$\longleftarrow$ داخل $\angle BAC$ هو مجموعة محدبة.

مبرهنة ٤٠

اذا كانت D نقطة في داخل $\angle BAC$ ، فان كل نقطة على الشعاع $\overrightarrow{AD}$ تقع في داخل $\angle BAC$.



شكل (٢٩)

البرهان

بما ان D في داخل $\angle BAC$ ، فان D لاتقع على AB ولاتقع على $\overrightarrow{AC}$.

لذا فان AD لايقع على AB او على AC وبما ان نقطة بدايته A تقع على AB ، فانه من مبرهنة ٢٨(و) كل نقاط $\overrightarrow{AD}$ تقع في نفس الجهة من $\overrightarrow{AB}$

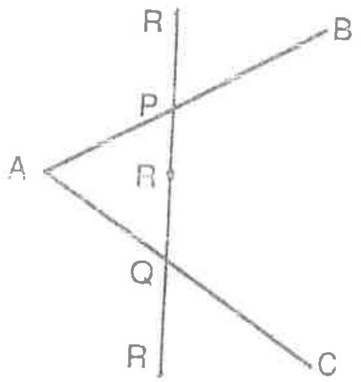
وبما ان D في جهة AB التي تحتوي C، فان كل نقاط AD تقع في جهة AB التي تحتوي C.

بما ان نقطة بداية $\overrightarrow{AD}$ تقع على AC، فانه من مبرهنة ٢٨(و) كل نقاط AD تقع في نفس الجهة من AC.

وبما ان D تقع في جهة AC التي تحتوي B، فان كل نقاط $\overrightarrow{AD}$ تقع في جهة AC التي تحتوي $\overrightarrow{B}$ لذا، فانه من تعريف داخل زاوية كل نقاط الشعاع AD تقع في داخل الزاوية.

مبرهنة ٤١

اذا كانت P, Q نقطتين على ضلعي زاوية، و R نقطة على الخط PQ وفي داخل الزاوية، فان P-R-Q



شكل (٣٠)

البرهان

لتكن $\angle BAC$ زاوية، وفيها $P \in \overrightarrow{AB}$ و $Q \in \overrightarrow{AC}$ وان $R \in PQ$ و R في داخل $\angle BAC$. يجب ان نبرهن P-R-Q.

R في داخل $\angle BAC$ ، و P و Q على ضلعي $\angle BAC$ فان النقاط P, Q, R مختلفة وبما انها تقع على مستقيم واحد فمن بديهية ٧، تتحقق واحدة فقط ممايلي:

P-R-Q ، P-Q-R ، R-P-Q

نفرض ان R-P-Q.

بما ان $P \in \overrightarrow{AB}$ ، فان R و Q في جهتين متعاكستين من AB.

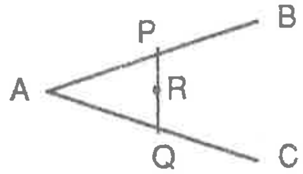
بما ان $\overrightarrow{AC}$ لايقع على AB لكن نقطة بدايته A تقع على AB ، فانه من مبرهنة ٢٨(و)، كل نقاط $\overrightarrow{AC}$ تقع في نفس الجهة من AB

بما ان $Q, C \in \overrightarrow{AC}$ ، فان Q, C في نفس الجهة من AB ومن مبرهنة ٢٧(أ)، فان R, C في جهتين متعاكستين من AB ، اي ان R لاتقع في جهة AB التي تحتوي C وهذا يؤدي الى ان R لاتقع في داخل $\angle BAC$ وبذلك يناقض

الفرض.
وبنفس الطريقة، نتوصل الى تناقض اذا فرضنا ان P-Q-R. لذا فان P-R-Q تتحقق.

مبرهنة ٤٢

اذا كانت P, Q نقطتين على ضلعي زاوية، فان P-Q هي مجموعة جزئية من داخل الزاوية.



شكل (٣١)

البرهان

لتكن ∠ BAC زاوية، ولتكن $P \in \overrightarrow{AB}$ و $Q \in \overrightarrow{AC}$. يجب ان نبرهن ان P-Q هي مجموعة جزئية من داخل ∠ BAC

لتكن R ∈ P-Q ⟵ P-R-Q

$R, Q \in \overrightarrow{PQ}$ ⟵

$\overrightarrow{PQ}$ لايقع على AB و AB ∋ P، من مبرهنة ٢٨(و)، كل نقاط $\overrightarrow{PQ}$ تقع في نفس الجهة من AB.

اي ان R, Q في نفس الجهة من AP = AB.

اي ان R تقع في جهة AP التي تحتوي Q.

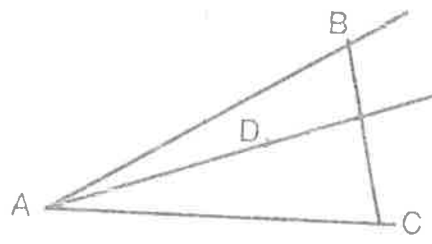
وبنفس الطريقة نبرهن ان R تقع في جهة AQ التي تحتوي P.

من تعريف داخل زاوية، تقع R في داخل ∠ PAQ ومن مبرهنة ٣٦، ∠ PAQ = ∠ BAC .

لذا فان R تقع في داخل BAC ∠ .

مبرهنة ٤٣ المعاكس

اذا كانت D نقطة في داخل BAC ∠ فان $\overrightarrow{AD}$ يقطع B-C.



شكل (٣٢)

البرهان

D في داخل BAC ∠ ⟵

D في جهة AB التي تحتوي C وفي جهة AC التي تحتوي B

اما D تقع على المستقيم BC او لاتقع.

(١) نفرض ان D ∈ BC وبما ان B, C على ضلعي BAC ∠ و D في داخل الزاوية، فانه من مبرهنة ٤١، B-D-C

اي ان $\overrightarrow{AD}$ يقطع B-C.

(٢) نفرض ان D لاتقع على BC.

من مبرهنة ٢٠ وتعريف الفصل، تقع D في جهة BC التي تحتوي A او في جهة BC التي لاتحتوي A.

(أ) نفرض ان D تقع في جهة BC التي تحتوي A وبما ان D تقع في جهة AB التي تحتوي C.

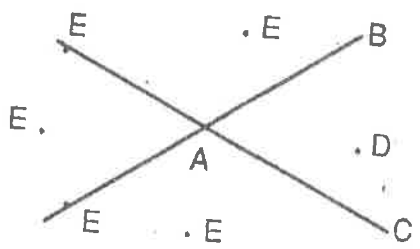
وفي جهة AC التي تحتوي B، فان D تقع في

داخل $\Delta\ ABC$ لذا فان $\overrightarrow{AD}$ يقطع $B-C$ (لماذا؟).

(ب) نفرض ان D تقع في جهة BC التي لاتحتوي A.
اي ان A, D في جهتين متعاكستين من BC.
من تعريف الفصل ومبرهنة ٢٠، توجد نقطة H
على BC بحيث ان $A-H-D \longrightarrow H \in \overrightarrow{AD}$
ومن مبرهنة ٤٠، $\longrightarrow$ H في داخل $\angle BAC$
بما ان $H \in BC$ وفي داخل $\angle BAC$ فانه من
مبرهنة ٤١، يكون $B-H-C \longrightarrow H \in B-C$
وبما ان $H \in \overrightarrow{AD}$ ، فان $\overrightarrow{AD}$ يقطع B-C.

مبرهنة ٤٤ العلاقة

اذا كانت D نقطة في داخل $\angle BAC$ ، و E اية نقطة في خارج الزاوية، فان القطعة D-E تقطع الزاوية.



شكل (٣٣)

البرهان

D في داخل $\angle BAC$ ، فان D تقع في جهة $\overrightarrow{AB}$ التي تحتوي C وفي جهة $\overrightarrow{AC}$ التي تحتوي B.
E تقع في خارج الزاوية، فان E لاتقع في داخل الزاوية ولاعلى الزاوية.
توجد عدة حالات تؤخذ بنظر الاعتبار:
(١) تقع E على الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AB}$
(٢) تقع E على الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AC}$

(٣) تقع E في جهة المستقيم AB التي لاتحتوي C
(٤) تقع E في جهة المستقيم AC التي لاتحتوي B.

الحالة (١)

نفرض ان E تقع على الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AB}$، اي ان E-A-B. وهذا يؤدي الى ان E و B في جهتين متعاكستين من AC ، وبما ان D في جهة $\overrightarrow{AC}$ التي تحتوي B، فانه من مبرهنة ٢٧(أ)، D, E في جهتين متعاكستين من $\overrightarrow{AC}$. من مبرهنة ٢٠ وتعريف الفصل، توجد نقطة H على $\overrightarrow{AC}$ بحيث ان D-H-E.

وبهذا، فان D-E تقطع BAC∠.

الحالة (٢)

تبرهن بنفس طريقة الحالة (١)

الحالة (٣)

تقع E في جهة المستقيم AB التي لاتحتوي C.
وبما ان D تقع في جهة AB التي تحتوي C، فان D, E في جهتين متعاكستين من AB. من مبرهنة ٢٠ وتعريف الفصل، توجد نقطة H على AB بحيث ان D-H-E.
$H \in AB \longleftarrow H \in \overrightarrow{AB}$ ، $H = A$ او H على الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AB}$.
اذا كان $H \in \overrightarrow{AB}$ ، فان D-E تقطع الزاوية.
اذا كان $H = A$ ، فان D-E تقطع الزاوية.
اذا كان H تقع على الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AB}$ ، فان H-A-B.

ومنه نستنتج ان B و H في جهتين متعاكستين من $\overrightarrow{AC}$ ، وبما ان D في جهة $\overrightarrow{AC}$ التي تحتوي B، فانه من مبرهنة ٢٧(أ)، D, H في جهتين متعاكستين من $\overrightarrow{AC}$. من تعريف الفصل، ومبرهنة ٢٠، توجد نقطة R على $\overrightarrow{AC}$ بحيث ان D-R-H.

D-R-H ، وبما ان D-H-E ، فان من مبرهنة ٤، يكون

$D\text{-}R\text{-}H\text{-}E \longrightarrow D\text{-}R\text{-}E$

$\longrightarrow R \in D\text{-}E$ ، وبما ان $R \in \overrightarrow{AC}$

$\longrightarrow$ D-E تقطع الزاوية.

الحالة (٤)

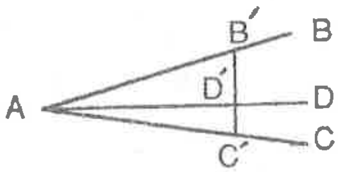
تبرهن بنفس طريقة الحالة (٣).

تعريف ١٧

لتكن BAC زاوية متكونة من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$، فان $\overrightarrow{AD}$ يكون بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ اذا وفقط اذا AD في داخل $\angle BAC$.

مبرهنة ٤٥

الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يكون بين شعاعين آخرين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ اذا وفقط اذا توجد نقاط B' على $\overrightarrow{AB}$ ، C' على $\overrightarrow{AC}$ ، و D' على $\overrightarrow{AD}$ ، بحيث ان B'-D'-C'.



شكل (٣٤)

البرهان

(١) نفرض ان $\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

من تعريف ١٧، $\overrightarrow{AD}$ يقع في داخل $\angle BAC$

من بديهية ٩، توجد نقطة B' على $\overrightarrow{AB}$ وتوجد نقطة C' على $\overrightarrow{AC}$

من مبرهنة ٣٦ $\longleftarrow$ $\angle BAC = \angle B'AC'$

$\longleftarrow$ $\overrightarrow{AD}$ في داخل $\angle B'AC'$.

من مبرهنة ٤٣ $\longleftarrow$ $\overrightarrow{AD}$ يقطع $B'-C'$ في نقطة D'

$\longleftarrow$ $B'-D'-C'$

(٢) نفرض انه توجد نقاط $B' \in \overrightarrow{AB}$, $C' \in \overrightarrow{AC}$، و $D' \in \overrightarrow{AD}$ بحيث ان $B'-D'-C'$.

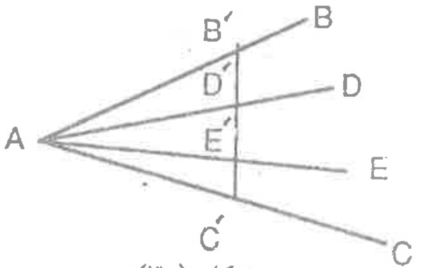
من مبرهنة ٤٢ $\longleftarrow$ D' تقع في داخل $\angle BAC$. وبما ان $D' \in \overrightarrow{AD}$ ، فانه من مبرهنة ٤٠، كل نقاط $\overrightarrow{AD}$ تقع في داخل $\angle BAC$.

من تعريف ١٧ $\longleftarrow$ $\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

مبرهنة ٤٦ للاطلاع

(أ) اذا كان $\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، وان $\overrightarrow{AE}$ يقع بين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$، فان $\overrightarrow{AE}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

(ب) اذا كان $\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، وان $\overrightarrow{AC}$ يقع بين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AE}$ (حيث ان E تقع في جهة $\overleftrightarrow{AB}$ التي تحتوي D)، فان $\overrightarrow{AC}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AE}$.



شكل (٣٥)

برهان (أ) شكل (٣٥)

$\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، فانه من مبرهنة ٤٥، توجد نقاط $B' \in \overrightarrow{AB}$ ، $C' \in \overrightarrow{AC}$ ، $D' \in \overrightarrow{AD}$ بحيث ان $B'-D'-C'$

من مبرهنة ٣٦ $\longleftarrow$ $\angle DAC = \angle D'AC'$.

$\overrightarrow{AE}$ يقع بين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$.

ومن تعريف ١٧، فان $\overrightarrow{AE}$ في داخل $\angle DAC$ $\longleftarrow$ $\overrightarrow{AE}$ في داخل $\angle D'AC'$.

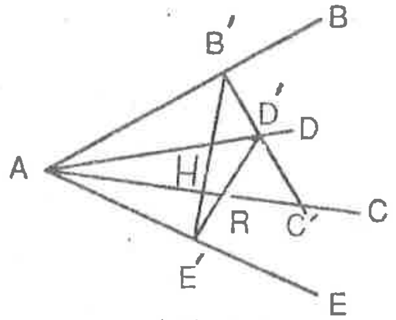
من مبرهنة ٤٣ $\longleftarrow$ $\overrightarrow{AE}$ يقطع $D'-C'$ في نقطة E'

$\longleftarrow$ $D'-E'-C'$

وبما ان $D'-E'-C'$ ، $B'-D'-C'$ ، فانه من مبرهنة ٤، يكون $B'-D'-E'-C'$ $\longleftarrow$ $B'-E'-C'$.

وبما ان $B'-E'-C'$ ، $B' \in \overrightarrow{AB}$ ، $E' \in \overrightarrow{AE}$ ، و $C' \in \overrightarrow{AC}$

ومن مبرهنة ٤٥، $\overrightarrow{AE}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.



شكل (٣٦)

برهان (ب) (شكل ٣٦)

$\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

من مبرهنة ٤٥ $\longleftarrow$ توجد نقاط $D' \in \overrightarrow{AD}$ ، $B' \in \overrightarrow{AB}$ ، و $C' \in \overrightarrow{AC}$ بحيث ان $B'-D'-C'$.

من بديهية ٩ $\longleftarrow$ توجد نقطة E' على $\overrightarrow{AE}$.

$\overrightarrow{AC}$ يقع بين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AE}$ ، ومن تعريف ١٧ ، $\longleftarrow$ $\overrightarrow{AC}$ يقع في داخل $\angle DAE$.

وبما ان $D' \in \overrightarrow{AD}$ و $E' \in \overrightarrow{AE}$ ، فانه من مبرهنة ٣٦ ،

$\angle DAE = \angle D'AE'$

$\longleftarrow$ $\overrightarrow{AC}$ يقع في داخل $\angle D'AE'$

من مبرهنة ٤٣ $\longleftarrow$ $\overrightarrow{AC}$ يقطع $D'E'$ في R.

$\longleftarrow$ $D'-R-E'$ و $R \in \overrightarrow{AC}$

$\longleftarrow$ E' و D' في جهتين متعاكستين من $\overleftrightarrow{AC}$.

$B'-D'-C'$ $\longleftarrow$ $B', D' \in \overrightarrow{C'B'}$

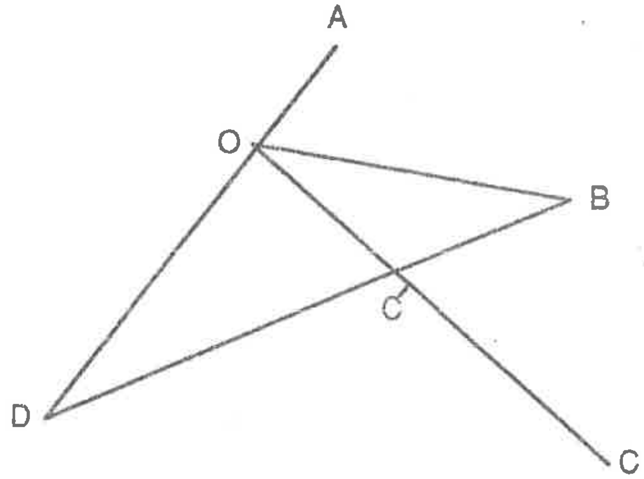
بما ان $\overrightarrow{C'B'}$ لايقع على $\overleftrightarrow{AC}$ ، لكن نقطة بدايته C' تقع على $\overleftrightarrow{AC}$، فانه من مبرهنة ٢٨(و)، كل نقاط $\overrightarrow{C'B'}$ تقع في نفس الجهة من $\overleftrightarrow{AC}$. لذا فان B', D' تقعان في نفس الجهة من $\overleftrightarrow{AC}$.

من مبرهنة ٢٧(أ) $\longleftarrow$ B', E' في جهتين متعاكستين من $\overleftrightarrow{AC}$. من تعريف الفصل ومبرهنة ٢٠ $\longleftarrow$ توجد نقطة H على $\overleftrightarrow{AC}$ بحيث ان $E'-H-B'$ وبما ان $B' \in \overrightarrow{AB}$، $E' \in \overrightarrow{AE}$ و $H \in \overrightarrow{AC}$

فان من مبرهنة ٤٥ $\longleftarrow$ $\overrightarrow{AC}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AE}$.

مبرهنة ٤٧

اذا كان $\overrightarrow{OB}$ يقع بين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OC}$، وان $\overrightarrow{OD}$ هو الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{OA}$، فان $\overrightarrow{OC}$ يقع بين $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OD}$.



شكل (٣٧)

البرهان

$\overrightarrow{OB}$ يقع بين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OC}$، من تعريف ١٧ ⟵ $\overrightarrow{OB}$ في داخل $\angle AOC$ ⟵ B في جهة $\overleftrightarrow{OC}$ التي تحتوي A.

بما ان $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OD}$ شعاعين متعاكسين، و O هي نقطة بداية $\overrightarrow{OC}$ ، فان A و D في جهتين متعاكستين من $\overleftrightarrow{OC}$.

من مبرهنة ٢٧(أ) ⟵ D, B في جهتين متعاكستين من $\overleftrightarrow{OC}$. من تعريف الفصل ومبرهنة ٢٠ ⟵ توجد نقطة C' على $\overrightarrow{OC}$ بحيث ان D-C'-B.

من مبرهنة ٤٥ ⟵ $\overrightarrow{OC}$ يقع بين $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OD}$.

تمارين ٤-٧

١- في $\angle BAC$ حيث A-D-B و A-C-E ، برهن ان D-E و B-C تتقاطعان.

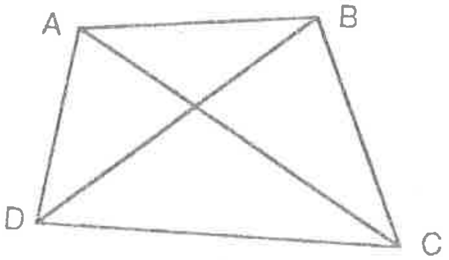
٢- لتكن A, B, C ثلاث نقاط لاتقع على مستقيم واحد والنقاط D, E, F بحيث ان B-C-D ، A-E-C ،و B-E-F.
برهن ان F تقع في داخل $\angle ACD$.

٣ـ اذا كان $\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، فانه من الخطا اما $\overrightarrow{AB}$ يقع بين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ او ان $\overrightarrow{AC}$ يقع بين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}$.

٤ـ اذا كان $\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وان $\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AC'}$ هما الشعاعين المعاكسين للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، على التوالي، فان $\overrightarrow{AD'}$ ، الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AD}$ ، يقع بين $\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AC'}$.

٤-٨ رباعي الاضلاع المحدب *Convex Quadrilateral*

تعريف ١٨



شكل (٣٨)

لتكن A, B, C, D اربع نقاط مختلفة لايوجد اي ثلاث منها على مستقيم واحد، اتحاد النقاط الاربع مع القطع الاربع A-B ، B-C ، C-D ، و D-A يدعى رباعي اضلاع. النقاط تدعى الرؤوس، القطع تدعى الاضلاع، الخطوط التي تحتوي الاضلاع تدعى خطوط الاضلاع.

ضلعان لهما نقطة نهاية مشتركة يدعيان متجاورين، ضلعان غير متجاورين يدعيان متقابلين.

زاوية رباعي اضلاع هي الزاوية التي تحتوي على راس وضلعين متجاورين.

زاويتان لرباعي اضلاع تكونان متجاورتين اذا

اشتركتا بضلع، زاويتان غير متجاورتين تكونان متقابلتين.
رأسا الزاويتين المتجاورتين يدعيان رأسين متجاورين، رأسين غير متجاورين يدعيان رأسين متقابلين.
القطعة الواصلة بين رأسين متقابلين تدعى قطر.

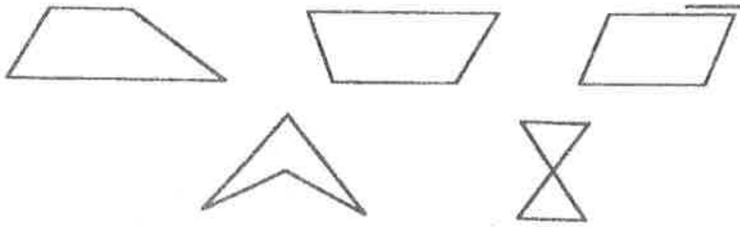
تعريف ١٩

اذا لم يتقاطع ضلعان في رباعي اضلاع، فانه يدعى بسيط (a simple).

تعريف ٢٠

(أ)

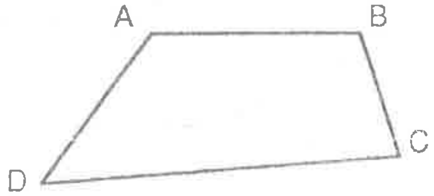
(ب)



شكل (٣٩)

اذا كان لاي رأسين متجاورين لرباعي اضلاع، الرأسان اللذان لايقعان على خط الضلع للرأسين المتجاورين يكونان في نفس الجهة من خط الضلع، فان رباعي الاضلاع يدعى رباعي اضلاع محدب.
اي انه عندما نتكلم عن رباعي اضلاع محدب نقصد الاشكال المبينة في الشكل (أ) ادناه بدلا من تلك الاشكال المبينة في الشكل (ب).

تعريف ٢١



شكل (٤٠)

ان داخل رباعي الاضلاع المحدب هو تقاطع كل انصاف المستوي المتعينة من خطوط الاضلاع والتي تحتوي على الرؤوس التي لاتقع على خطوط الاضلاع.

هكذا، اذا كان ABCD رباعي اضلاع محدب كما في الشكل فان داخله هو تقاطع:

١- نصف المستوي المتعين من AD الذي يحتوي C، B.

٢- نصف المستوي المتعين من AB الذي يحتوي D، C.

٣- نصف المستوي المتعين من BC الذي يحتوي D، A.

٤- نصف المستوي المتعين من DC الذي يحتوي A، B.

مبرهنة ٤٨

داخل رباعي اضلاع محدب يكون مجموعة محدبة

البرهان

يترك كتمرين.

ص ١١٤ ٩٢ شابه

هذه المبرهنة لاتصح اذا كان رباعي الاضلاع غير محدب.

مبرهنة ٤٩

يقطع قطرا رباعي اضلاع محدب احدهما الاخر.

البرهان

يترك كتمرين.

تمارين ٤-٨

١- برهن ان رباعي الاضلاع يكون محدبا اذا وفقط اذا كان قطريه يتقاطعان.
٢- برهن ان خطا يقطع ضلعا واحدا من رباعي اضلاع ولايمر باي رأس، فانه يقطع ضلعا ثانيا.
٣- برهن اذا كان خط يقطع ثلاثة اضلاع من رباعي اضلاع، فانه يقطع الرابع.

الفصل الخامس
التطابق والمقارنة
Congruence and Comparison

٥-١ بديهيات عن تطابق القطع

لقد ذكرنا سابقا ان التطابق هو علاقة اولية تقنية.

فيقال ان شكلا يطابق شكلا آخر.

ويرمز لهذا بالرمز $\cong$

فمثلا، "A-B تطابق C-D" يرمز لها:

$$A\text{-}B \cong C\text{-}D$$

مجموعة البديهيات

بما ان التطابق هو علاقة اولية، يجب ان نقدم بديهيات لتعطينا خواص هذه العلاقة.

بديهية ١١ (بديهية انشاء قطعة)

لتكن A-B قطعة و C نقطة على خط m، فانه على كل شعاع على m نقطة بدايته C توجد نقطة واحدة فقط D بحيث ان $A\text{-}B \cong C\text{-}D$

بديهية ١٢

تطابق القطع هو علاقة تكافؤ.

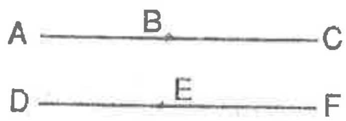
نستنتج من هذه البديهية ان كل قطعة تطابق نفسها، واذا كانت قطعة واحدة تطابق قطعة ثانية، فان

الثانية تطابق الاولى، واذا كانت قطعة واحدة تطابق قطعة ثانية، والقطعة الثانية تطابق قطعة ثالثة، فان الاولى تطابق الثالثة.

بديهية ١٣ (جمع القطع)

اذا كان (أ) $A-B-C$ ، (ب) $D-E-F$ ،
(جـ) $A-B \cong D-E$ و (ء) $B-C \cong E-F$ فان $A-C \cong D-F$.

مبرهنة ٥. (طرح القطع)



شكل (٤١)

اذا كان (أ) $A-B-C$ ، (ب) $D-E-F$ ،
(جـ) $A-B \cong D-E$ و (ء) $A-C \cong D-F$ فان $B-C \cong E-F$

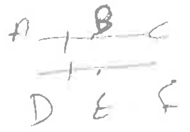
البرهان

نفرض ان $B-C$ لاتطابق $E-F$. فانه من بديهية ١١، توجد نقطة G بحيث ان $D-E-G$ و $B-C \cong E-G$. كذلك بما ان $B-C$ لاتطابق $E-F$ ، فانه من بديهية ١٢، نستنتج ان $E-F$ لاتطابق $E-G$ ، ومن هذا $F \neq G$.
لكن بما ان $A-B \cong D-E$ و $B-C \cong E-G$ ، فانه من بديهية ١٣ $A-C \cong D-G$. ولكن من الفرض $A-C \cong D-F$ فيكون من بديهية ١٢، $D-G \cong D-F$ ، ومن البديهيتين ١١ و ١٢ نستنتج ان $F = G$.
وهذا يقودنا الى تناقض. لذلك، فان فرضيتنا خاطئة.

وبذلك نستنتج ان $E-F \cong B-C$.

مبرهنة ٥١

اذا كان $A-C \cong D-F$ و B نقطة بحيث ان A-B-C ،
فانه توجد ونقطة E بحيث ان D-E-F و $A-B \cong D-E$.



البرهان

يترك كتمرين.

٥-١ تمارين

١- اذا كان $A-B \cong A-C$ ، هل ان $B = C$؟ ولماذا؟
٢- اذا كان A-B لاتطابق A-C، برهن ان $B \neq C$.

٥-٢ مقارنة القطع

تعريف ٢٢

A-B تكون اصغر من C-D اذا وفقط اذا توجد نقطة E بحيث ان C-E-D و $A-B \cong C-E$.

رمز

يرمز للعبارة "A-B اصغر من C-D" بالرمز

$$A-B < C-D$$

نبرهن الان بعض المبرهنات المعروفة حول العلاقة "اصغر من".

مبرهنة ٥٢

اذا كانت A-B و C-D اي قطعتين، فانه تتحقق واحدة فقط ممايلي:

$A-B < C-D$ و $A-B \cong C-D$, $C-D < A-B$

البرهان

يترك كتمرين.

مبرهنة ٥٣

اذا كان $A-B < C-D$ و $A-B \cong E-F$ فان $E-F < C-D$

البرهان

بما ان $A-B < C-D$ ، فانه توجد نقطة G بحيث ان C-G-D و $A-B \cong C-G$ ، بما انه من الفرض $A-B \cong E-F$ ، فانه من بديهية ١٢، $E-F \cong C-G$. لذلك من تعريف ٣٢، يكون $E-F < C-D$.

مبرهنة ٥٤

اذا كان $A-B < C-D$ و $C-D \cong E-F$ ، فان $A-B < E-F$.

البرهان

من تعريف ٣٢، توجد نقطة G بحيث ان C-G-D ، و $A-B \cong C-G$ من مبرهنة ٥١، توجد نقطة H بحيث ان

$E-H-F$ ، و $E-H \cong C-G$ بمـا ان $A-B \cong C-G$ فانه من بديهية ١٢، $A-B \cong E-H$ ، لذلك، فان $A-B < E-F$.

مبرهنة ٥٥

هل اذا ثبت ان الاصغر من القطع هو علاقة متعدية ، برهن ذلك

اذا كان $A-B < C-D$ و $C-D < E-F$ فان $A-B < E-F$.

البرهان

بما ان $A-B < C-D$ ، فانه توجد نقطة G بحيث ان $C-G-D$ و $A-B \cong C-G$. بما ان $C-D < E-F$ ، فانه توجد نقطة H بحيث ان $E-H-F$ و $C-D \cong E-H$.
ومن مبرهنة ٥٤، نستنتج ان $A-B < E-H$. لذلك توجد نقطة I بحيث ان $E-I-H$ و $A-B \cong E-I$.
بما ان $E-H-F$ و $E-I-H$ ، فانه من مبرهنة ٤، $E-I-H-F$.
لذلك، $E-I-F$ ، وبذلك يكون $A-B < E-F$.

٥-٢ تمارين

١- برهن اذا كان $A-B-C$ ، فان $A-B < A-C$.
٢- برهن اذا كان $A-B-C-D$ ، فان $A-B < A-D$.

٥-٣ تطابق الزوايا والمثلثات

مجموعة البديهيات

بديهية ١٤ (بديهية انشاء زاوية)

لتكن BAC زاوية وليكن DF شعاعا على خط m، فانه في كل جهة من m يوجد شعاع واحد فقط DE بحيث

$\angle BAC \cong \angle EDF$.

بديهية ١٥

تطابق الزوايا هو علاقة تكافؤ.

بديهية ١٦

في مثلثين ABC و DEF ، اذا كان $A\text{-}B \cong D\text{-}E$ ، $A\text{-}C \cong D\text{-}F$ و $\angle A \cong \angle D$ ، فان $\angle B \cong \angle E$ و $\angle C \cong \angle F$.

ان هذه البديهية تنص على انه عندما ضلعان والزاوية المحددة بهما في مثلث تطابق على التوالي ضلعين والزاوية المحددة بهما من مثلث آخر، فان الزوايا الباقية متطابقة. ماهو الفرق بين هذه البديهية ومبرهنة اقليدس الرابعة؟ المبرهنة تنص على ان تحت نفس الفرض، فان المثلثين يتطابقان. لذا نحتاج الى تعريف تطابق مثلثين.
كمثال ناخذ المثلثين ABC و DEF توجد ستة طرق مختلفة لوضع تناظر متباين بين رؤوسهما، وكمايلي :

١- $C \leftrightarrow F$ ، $B \leftrightarrow E$ ، $A \leftrightarrow D$
٢- $C \leftrightarrow E$ ، $B \leftrightarrow F$ ، $A \leftrightarrow D$
٣- $C \leftrightarrow F$ ، $B \leftrightarrow D$ ، $A \leftrightarrow E$
٤- $C \leftrightarrow D$ ، $B \leftrightarrow F$ ، $A \leftrightarrow E$
٥- $C \leftrightarrow E$ ، $B \leftrightarrow D$ ، $A \leftrightarrow F$
٦- $C \leftrightarrow D$ ، $B \leftrightarrow E$ ، $A \leftrightarrow F$

كذلك، بما ان رؤوس المثلث تعين الاضلاع، فان

اي تناظر بين رؤوس مثلثين يؤدي الى تناظر بين الاضلاع، وبما ان للزاوية رأس وحيد، فان اي تناظر بين الرؤوس يؤدي الى تناظر بين الزوايا.

رمز تعريف رمز التناظر للمثلثين

بالرمز $\Delta ABC - \Delta DEF$ نعني التناظر التالي :

$$A \leftrightarrow D \quad \angle A \leftrightarrow \angle D \quad A-B \leftrightarrow D-E$$
$$B \leftrightarrow E \quad \angle B \leftrightarrow \angle E \quad B-C \leftrightarrow E-F$$
$$C \leftrightarrow F \quad \angle C \leftrightarrow \angle F \quad A-C \leftrightarrow D-F$$

تعريف ٢٣ تعريف التطابق او تناظر متطابق

ليكن ABC و DEF مثلثين، اذا وجد على الاقل تناظر واحد $\Delta ABC - \Delta XYZ$ ، حيث ان X, Y, Z هي D, E, F في ترتيب ما ، بحيث ان

$$\angle A \doteq \angle X \qquad A-B \cong X-Y$$
$$\angle B \doteq \angle Y \qquad B-C \cong Y-Z$$
$$\angle C \doteq \angle Z \qquad A-C \cong X-Z$$

فان هذا التناظر يدعى تناظر متطابق. ويقال عن المثلثين متطابقان.

رمز

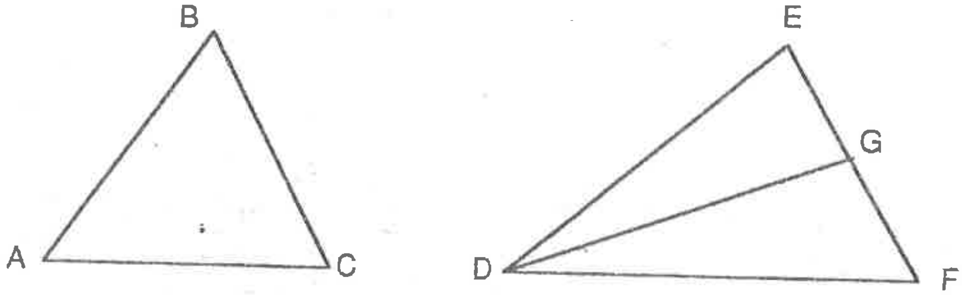
اذا كان $\Delta ABC - \Delta DEF$ هو تناظر متطابق للمثلثين ABC و DEF، فانه يرمز لهذا بالرمز:

$$\Delta ABC \doteq \Delta DEF$$

مبرهنة ٥٦ (S A S)

اذا كان ضلعان والزاوية المحددة بهما في مثلث تطابق ضلعين والزاوية المحددة بهما من مثلث آخر، فان المثلثين يتطابقان.

بعبارة اخرى، اذا كان في مثلثين ABC و DEF،
A-B ≅ D-E ، A-C ≅ D-F ، و ∠A ≅ ∠D ، فان
Δ ABC ≅ Δ DEF



شكل (٤٢)

البرهان

∠C ≅ ∠F

من بديهية ١٦، ∠B ≅ ∠E. كل مانحتاجه من تعريف ٢٣، ان نبرهن ان B-C ≅ E-F نفرض ان العبارة خطأ.

من مبرهنة ٥٢، اما B-C < E-F او E-F < B-C.
نفرض ان B-C < E-F.
من تعريف < ، توجد نقطة G بحيث ان B-C ≅ E-G و E-G-F
ومن بديهية ٦، E, G, F نقاط مختلفة وتقع على مستقيم واحد.
اي ان F, G تقعان على المستقيم EF. ومن مبرهنة ٢٨(و)، F و G في نفس الجهة من DE. في المثلثين ABC

و DEG ، من بديهية ١٦، نستنتج ان $\angle EDG \cong \angle BAC$،
ولكن من الفرض $\angle EDF \cong \angle BAC$ ،
لذلك، من بديهية ١٤، نستنتج ان $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DG}$ ، اي
ان $F, G \in DF$ وهذا يناقض مبرهنة ٢.
لذلك، فان الفرض بان $E-F < B-C$ يؤدي الى
تناقض ، وبنفس الطريقة في الحالة الاخرى.
لذلك، فان $B-C \cong E-F$ وان $\Delta BAC \cong \Delta EDF$

تعريف ٢٤

زاويتان لهما ضلع مشترك وضلعيهما الاخرين يكونان شعاعين متعاكسين يقال عنهما تكونان زوجا خطيا.

تعريف ٢٥

زاويتان تطابقان على التوالي زاويتين لزوج خطي يقال عنهما متكاملتين، احداهما مكملة للاخرى.
من هذا التعريف ومن بديهية ١٥، تستنتج المبرهنة التالية:

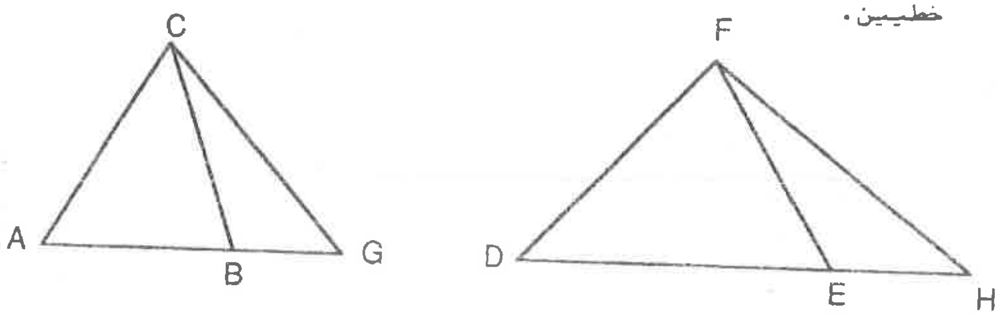
مبرهنة ٥٧

• اذا كانت زاويتان تكونان زوجا خطيا، فانهما متكاملتان.

مبرهنة ٥٨

اذا كانت زاويتان متطابقتين ، فانه تتطابق كذلك الزاويتان اللتان تكونان معهما، على التوالي، زوجين

خطيين.



شكل (٤٣)

البرهان

لتكن $\angle ABC \doteq \angle DEF$. من بديهية ٩، توجد نقطة G بحيث ان A-B-G ، وتوجد نقطة H بحيث ان D-E-H. لذا يكون الشعاعان BA و BG متعاكسين، وكذلك الشعاعان ED و EH ، وتكون الزاويتان ABC و CBG زوجا خطيا، وكذلك الزاويتان DEF و FEH. نختار النقاط D ,H و F بطريقة لاتؤثر على التعميم بحيث ان $A-B \doteq D-E$ ، $B-C \doteq E-F$ ، و $B-G \doteq E-H$.

يجب ان نبرهن ان $\angle FEH \doteq \angle CBG$

في المثلثين ABC و DEF :

$A-B \doteq D-E$ ، $\angle ABC \doteq \angle DEF$ ، و $E-F \doteq B-C$

لذلك من مبرهنة SAS ، $D-F \doteq A-C$

و $\angle BAC \doteq \angle EDF$

من بديهية ١٣، $D-H \doteq A-G$ لذلك مرة ثانية نطبق مبرهنة SAS على Δ CAG و Δ FDH، فيكون $\Delta FDH \cong \Delta CAG$ ، وهذا يؤدي الى ان $F-H \doteq C-G$ وان $\angle DHF \doteq \angle AGC$.

في المثلثين CBG و FEH :

$\angle EHF \doteq \angle BGC$ ، $E-H \doteq B-G$ ، و $H-F \doteq G-C$

لذلك، من بديهية ١٦، نستنتج ان

$$\angle CBG \cong \angle FEH$$

نتيجة (١)

مكملات الزوايا المتطابقة تكون متطابقة

البرهان

نستنتج هذا من تعريف ٢٥، بديهية ١٥، ومبرهنة ٥٨.

تعريف ٢٦

يقال عن زاويتين لهما رأس مشترك بانهما زاويتان رأسيتان اذا وفقط اذا شعاعي زاوية واحدة هما الشعاعين المعاكسين لشعاعي الزاوية الاخرى.

نتيجة (٢)

تكون الزاويتان الرأسيتان متطابقتين.

البرهان

ينتج هذا من تعريف ٢٦، مبرهنة ٥٨، والخاصية الانعكاسية لبديهية ١٥.

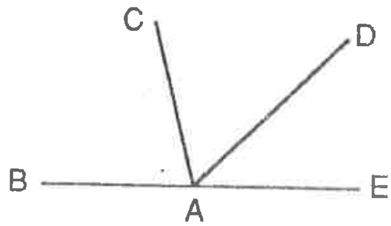
تعريف ٢٧

زاويتان لهما رأس مشترك وضلع مشترك، وضلعيهما الآخرين في الجهتين المتعاكستين لخط

الضلع المشترك، تدعيان زاويتين متجاورتين.

نتيجة (٣)

اذا كانت زاويتان متكاملتين ومتجاورتين، فانهما تكونان زوجا خطيا.



شكل ٤٤

شكل (٤٤)

البرهان

لتكن $\angle BAC$ و $\angle CAD$ زاويتين متكاملتين وان B و D في الجهتين المتعاكستين للخط AC. يجب ان نبرهن ان $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}$ شعاعين متعاكسين وان $\angle BAC$ و $\angle CAD$ تكونان زوجا خطيا. ليكن $\overrightarrow{AE}$ الشعاع المعاكس الى AB. فانه من مبرهنة ٢٧ ← D, E في نفس الجهة من الخط AC.

بما ان $\overrightarrow{AE}$ هو الشعاع المعاكس للشعاع AB ، فتكون الزاويتان $\angle BAC$ و $\angle CAE$ زوجا خطيا. ومن مبرهنة ٥٧، تكون الزاويتان $\angle BAC$ و $\angle CAE$ متكاملتين، وبما ان الزاويتين $\angle BAC$ و $\angle CAD$ متكاملتان، ومن بديهية ١٥ ، $\angle BAC = \angle BAC$ فان من نتيجة ١ ، $\angle CAD \doteq \angle CAE$.

ومن بديهية ١٤، $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}$.

لذلك يكون الشعاع AD هو الشعاع المعاكس للشعاع

$\overrightarrow{AB}$ ، وان الزاويتين $\angle BAC$ و $\angle CAD$ تكونان زوجا خطيا.

تمارين ٥-٣

١- اذا كان $\angle ABD \cong \angle ABC$ هل ان $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$؟ لماذا؟

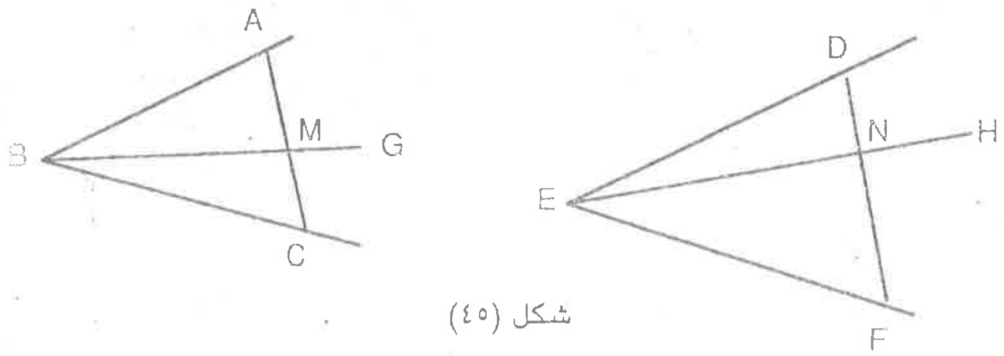
٢- اذا كان $\angle ABD$ لاتطابق $\angle ABC$ ، برهن على ان $\overrightarrow{BD} \neq \overrightarrow{BC}$.

٣- اذا كان $D\text{-}F \cong B\text{-}C$ و $A\text{-}C \cong D\text{-}E$ ، و $\angle D \cong \angle C$ ماهو التناظر المتطابق للمثلثين ABC و DEF؟

٥-٤ جمع وطرح الزوايا

مبرهنة ٥٩

اذا كان $\angle DEF \cong \angle ABC$ وان $\overrightarrow{BG}$ شعاع في داخل $\angle ABC$ ، فانه يوجد شعاع $\overrightarrow{EH}$ في داخل $\angle DEF$ بحيث ان $\angle DEH \cong \angle ABG$ و $\angle HEF \cong \angle GBC$.



شكل (٤٥)

البرهان

من بديهية ١١، نختار النقاط D, F بطريقة لاتؤثر على المفهوم العام، بحيث ان $A\text{-}B \cong D\text{-}E$ ،

و $C-B \cong F-E$.

ومن مبرهنة SAS $\longleftarrow$ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ، وان $A-C \cong D-F$ ، $\angle BCA \cong \angle EFD$ و $\angle BAC \cong \angle EDF$.

بما ان $\overrightarrow{BG}$ يمر براس الزاوية $\angle ABC$ ويقع في داخل الزاوية، فانه من مبرهنة ٤٣، $\overrightarrow{BG}$ يقطع $A-C$ في نقطة ولتكن M.

بما ان $A-C \cong D-F$ وان $A-M-C$ ،من مبرهنة ٥١، توجد نقطة N بحيث ان $D-N \cong A-M$ وان $D-N-F$.

من مبرهنة ٤٥، وتعريف ١٧ يكون الشعاع $\overrightarrow{EN}$ هو الشعاع المطلوب $\overrightarrow{EH}$ الذي يقع في داخل $\angle DEF$.

بما ان $A-C \cong D-F$ و $A-M \cong D-N$ و $A-M-C$ و $D-N-F$ فانه من مبرهنة ٥٠ (طرح القطع)، يكون $M-C \cong N-F$ ،

في ΔABM و ΔDEN :

$\angle BAM = \angle BAC \cong \angle EDF = \angle EDN$ $\longleftarrow$ $\angle BAM \cong \angle EDN$

$A-M \cong D-N$ و $A-B \cong D-E$ ، فانه من مبرهنة SAS ،

$\Delta ABM \cong \Delta DEN$ $\longleftarrow$ $\angle ABM \cong \angle DEN$

وبنفس الطريقة، فان المثلثين MBC و NEF يتطابقان، ولذلك فان $\angle MBC \cong \angle NEF$،

$\angle ABG = \angle ABM \cong \angle DEN = \angle DEH$

لذلك، $\angle ABG \cong \angle DEH$.

$\angle GBC = \angle MBC \cong \angle NEF = \angle HEF$ ،لذلك $\angle GBC \cong \angle HEF$

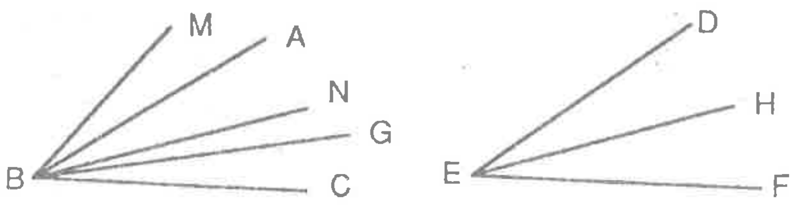
مبرهنة ٦. (جمع الزوايا)

لتكن $\angle ABC$ و $\angle DEF$ زاويتين لهما، على التوالي، الشعاعين $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{EH}$ يقعان في داخليهما،

و $\angle GBC \cong \angle HEF$ ، و $\angle ABG \cong \angle DEH$

فان

$\angle ABC \cong \angle DEF$



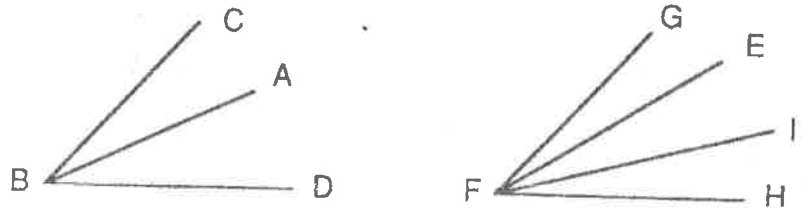
شكل (٤٦)

البرهان

من بديهية ١٤، يوجد شعاع $\overrightarrow{BM}$ في جهة الخط $\overleftrightarrow{BC}$ التي تحتوي A بحيث ان $\angle DEF \cong \angle MBC$. بما ان $\overrightarrow{EH}$ في داخل $\angle DEF$، فانه من مبرهنة ٥٩، يوجد شعاع $\overrightarrow{BN}$ في داخل $\angle MBC$ بحيث ان $\angle HEF \cong \angle NBC$ و $\angle DEH \cong \angle MBN$.
ولكن من الفرض $\angle HEF \cong \angle GBC$، لذلك من بديهية ١٥، $\angle NBC \cong \angle GBC$ ومن بديهية ١٤، $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BN}$
لذلك $\angle ABG \cong \angle DEH \cong \angle MBN = \angle MBG$
ومن هذا $\angle ABG \cong MBG$ ومن بديهية ١٤ ، $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BM}$
لذلك، $\angle DEF \cong \angle MBC = \angle ABC$
اي ان $\angle DEF \cong \angle ABC$

مبرهنة ٦١ (طرح الزوايا)

اذا كان $\angle GFH \cong \angle CBD$ و $\angle HFE \cong \angle DBA$
وان الشعاعين $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{FE}$ يقعان في داخل $\angle CBD$ و $\angle GFH$ ، على التوالي، فان $\angle EFG \cong \angle ABC$.



شكل (٤٧)

البرهان

بما ان $\angle GFH \cong \angle CBD$ وان $\overrightarrow{BA}$ شعاع في داخل $\angle DBC$،فانه من مبرهنة ٥٩، يوجد شعاع $\overrightarrow{FI}$ في داخل $\angle GFH$ بحيث ان $\angle HFI \cong \angle DBA$ و $\angle IFG \cong \angle ABC$.

لكن من الفرض $\angle HFE \cong \angle DBA$

فانه من بديهية ١٥، $\angle HFE \cong \angle HFI$

ومن بديهية ١٤ ← $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FI}$

لذلك $\angle EFG \cong \angle ABC$

تمارين ٥-٤

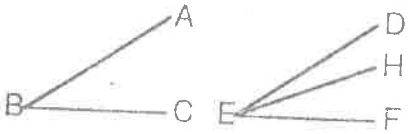
١- استخدم مبرهنة ٣٤ بدلا من مبرهنة ٤٥ وتعريف ١٧ لتحصل على النقطة M في مبرهنة ٥٩ .

٥-٥ مقارنة الزوايا

تعريف ٢٨

تكون زاوية $\angle ABC$ اصغر من زاوية $\angle DEF$ اذا وفقط اذا يوجد شعاع $\overrightarrow{EH}$ في داخل $\angle DEF$ بحيث ان $\angle HEF \doteq \angle ABC$. ويرمز لهذا بالرمز :

$$\angle ABC < \angle DEF$$



شكل (٤٨)

مبرهنة ٦٢

لاي زوج من الزوايا ، وليكن $\angle A$ و $\angle B$.

فانه تتحقق واحدة فقط ممايلي :

$$\angle A < \angle B \quad و \quad \angle A \doteq \angle B \quad و \quad \angle B < \angle A$$

البرهان

يترك كتمرين.

مبرهنة ٦٣

اذا كان $\angle B < \angle A$ و $\angle A \doteq \angle C$ ، فان $\angle C < \angle B$.

البرهان

لتكن $\angle B = \angle DBE$

بما ان $\angle B < \angle A$ ، ومن تعريف ٢٨، يوجد شعاع $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\angle B$ بحيث ان $\angle A \doteq \angle FBE$.

ومن الفرض $\angle A \doteq \angle C$ ، فانه من بديهية ١٥، $\angle C \doteq \angle FBE$.

ومن ~~مبرهنة~~ ٢٨، $\angle C < \angle B$

تعريف

مبرهنة ٦٤

اذا كان $\angle B \doteq \angle C$ و $\angle A < \angle B$
فان $\angle C < \angle A$.

البرهان

لتكن $\angle B = \angle DBE$ و $\angle C = \angle GCH$.
بما ان $\angle B < \angle A$ ، فانه من تعريف ٢٨، يوجد شعاع $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\angle B$ بحيث ان $\angle FBE \doteq \angle A$.
$\angle C \doteq \angle B$ و $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\angle B$ ، فانه من مبرهنة ٥٩، يوجد شعاع $\overrightarrow{CI}$ في داخل $\angle C$ بحيث ان $\angle ICH \doteq \angle FBE$.
وبما ان $\angle FBE \doteq \angle A$ ،
فانه من بديهية ١٥، $\angle ICH \doteq \angle A$
ومن تعريف ٢٨، $\angle C < \angle A$.

مبرهنة ٦٥

اذا كان $\angle B < \angle A$ و $\angle C < \angle B$ ، فان $\angle C < \angle A$.

البرهان

لتكن $\angle B = \angle DBE$ و $\angle C = \angle GCH$.
بما ان $\angle B < \angle A$ ، فانه من تعريف ٢٨، يوجد شعاع $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\angle B$ بحيث ان $\angle FBE \doteq \angle A$.
وكذلك $\angle C < \angle B$ ، فانه يوجد شعاع $\overrightarrow{CI}$ في داخل $\angle C$ بحيث ان $\angle ICH \doteq \angle B$. وبما ان $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\angle B$، فانه من مبرهنة ٥٩، يوجد شعاع $\overrightarrow{CJ}$ في داخل $\angle ICH$ بحيث ان $\angle JCH \doteq \angle FBE$. وبما ان $\angle FBE \doteq \angle A$ ، فانه من

بديهية ١٥، $\angle JCH \cong \angle A$.
من تعريف ١٧، $\overrightarrow{CJ}$ يقع بين $\overrightarrow{CH}$ و $\overrightarrow{CI}$ وان $\overrightarrow{CI}$ يقع بين $\overrightarrow{CG}$ و $\overrightarrow{CH}$ ، ومن مبرهنة ٤٦(١)، $\overrightarrow{CJ}$ يقع بين $\overrightarrow{CH}$ و $\overrightarrow{CG}$ ، اي ان $\overrightarrow{CJ}$ يقع في داخل $\angle C$ وبما ان $\angle JCH \cong \angle A$ فانه من تعريف ٢٨، $\angle C > \angle A$.

تمارين ٥-٥

١) برهن اذا كان $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\angle ABC$ ، فان $\angle ABC > \angle FBC$.
٢) برهن اذا كان $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\angle ABC$ ، وان $\overrightarrow{BE}$ في داخل $\angle FBC$ ، فان $\angle ABC > \angle EBC$.

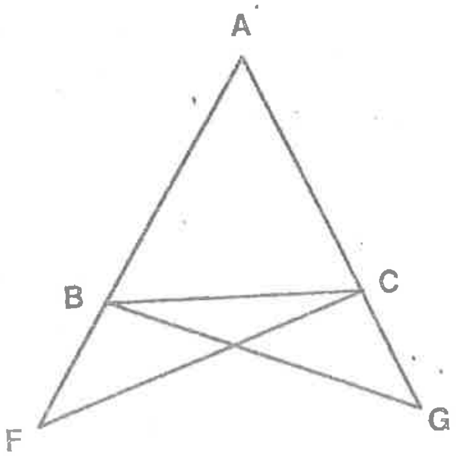
الفصل السادس
هندسة اولية

٦-١ اعادة براهين مبرهنات اقليدس

الغرض من هذا الفصل هو تقديم مبرهنات اولية مهمة برهنت من قبل اقليدس، مثلا المبرهنات ASA ، SAA ، SSS ؛ ومبرهنات اخرى.

مبرهنة ٦٦ للاطلاع

في المثلث ABC ، اذا كان A-B ≅ A-C. وان F و G نقطتان بحيث ان A-B-F و A-C-G.
فان ∠ CBF ≅ ∠ BCG و ∠ ABC ≅ ∠ ACB .



شكل ٤٩

شكل ٤٩

البرهان

من بديهية ٩، توجد نقطة G بحيث ان A-C-G.
من بديهية ١١، توجد نقطة F من جهة A التي تحتوي B

بحيث ان $A-F \cong A-G$ ، ومن بديهية ١١ ومبرهنة ٥١، فان $A-B-F$.

ناخذ المثلثين ABG و ACF ، وفيهما:

$A-B \cong A-C$ ، $A-F \cong A-G$ ، و $\angle A \cong \angle A$

فانه من مبرهنة SAS ، $\Delta ABG \cong \Delta ACF$

لذا فان $\angle ACF \cong \angle ABG$ ، $\angle AFC \cong \angle AGB$ ، و $F-C \cong B-G$.

من مبرهنة طرح القطع، نستنتج ان $C-G \cong B-F$.

ومن مبرهنة (SAS)، $\Delta GCB \cong \Delta FBC$.

لذا فان $\angle BCG \cong \angle CBF$ وكذلك $\angle CBG \cong \angle BCF$.

وبذلك يكون عندنا $\angle ACF \cong \angle ABG$ و $\angle CBG \cong \angle BCF$.

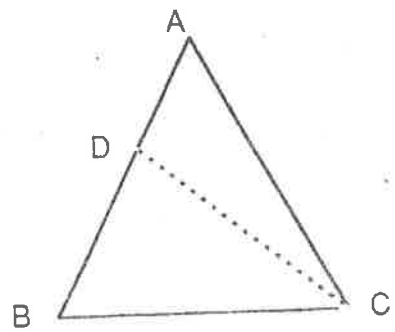
بما ان $A-B-F$ و $A-C-G$ ، ومن تعريف ١٧ ومبرهنة ٤٥،

فان $\overrightarrow{BC}$ يقع في داخل $\angle ABG$ و ان CB يقع في داخل $\angle ACF$.

لذلك، من مبرهنة طرح الزوايا، فان $\angle ACB \cong \angle ABC$.

مبرهنة ٦٧

اذا كانت زاويتهان في مثلث متطابقتين، فانه يتطابق كذلك الضلعان المقابلان لهما.



شكل ٥٠

البرهان

نفرض ان العبارة خطأ. فان $\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ او $\overrightarrow{AC}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ (يقع AD في خارج الزاوية CAB) او $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

وتقع D في داخل المثلث ABC ، او في خارجه او على خط احد اضلاعه. (برهن على ان المثلث يقسم مجموعة كل النقاط الى مجموعتين جزئيتين غير خاليتين هي داخل المثلث وخارجه ، واللتين تكونان مع المثلث تجزئة لمجموعة كل النقاط.)

الحالة (١)

اذا وقعت D على AC ، فانه من بديهية ١١، C = D ، وهذا يناقض فرضيتنا، وكذلك اذا وقعت D على BC. لذا، فانه لايمكن ان تقع D على المثلث ABC او على امتداد احد اضلاعه.

الحالة (٢)

اذا وقعت D في خارج المثلث ABC ، بما ان C و D هما في نفس الجهة من الخط AB، فاما $\overrightarrow{AD}$ بين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ ، او $\overrightarrow{AC}$ بين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}$

(أ) نفرض ان AD يقع بين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$.

بما ان $A-C \cong A-D$ ، فانه من مبرهنة ٦٦، $\angle ACD \cong \angle ADC$.

لكن تقع D في خارج المثلث ACB ، $\overrightarrow{CB}$ يقع بين $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CD}$ ، لذلك، من التعريف، يكون $\angle ACD < \angle DCB$ ومن مبرهنة ٦٤، يكون $\angle ADC < \angle DCB$.

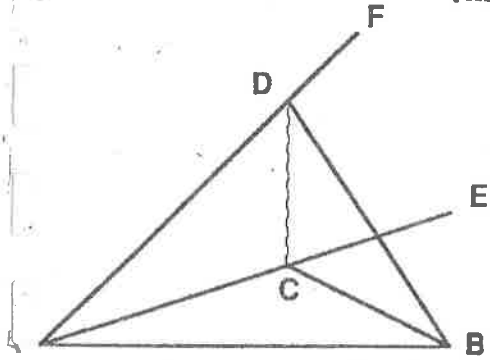
بما ان $\overrightarrow{AD}$ يقع في داخل $\angle CAB$ فانه يقطع $B-C$ في نقطة E التي هي في داخل $\angle CDB$ ولذلك يقع DA في داخل $\angle CDB$ و $\angle ADC < \angle CDB$.

من مبرهنة ٦٥ نستنتج ان $\angle CDB < \angle DCB$.

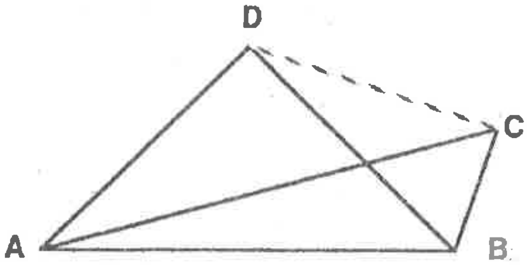
لكن بما ان $B-C \cong B-C$ ، فان $\angle DCB \cong \angle CDB$

وهذا يناقض مبرهنة ٦٢.

(ب) نفرض ان $\overrightarrow{AC}$ يقع بين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}$.



(ب)



(أ)

اما يقع $\overrightarrow{BD}$ بين $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ ، ونستمر في هذه الحالة

كما في فرع (أ)، او يقع $\overrightarrow{BC}$ بين $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BD}$.

نفرض ان $\overrightarrow{BC}$ يقع بين BA و BD. نمد AD الى F و AC الى E. بما ان $A-C \cong A-D$ ، يكون من مبرهنة ٦٦، $\angle ECD \cong \angle FDC$.

بما ان $\overrightarrow{AC}$ يقع بين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}$ ويقع $\overrightarrow{BC}$ بين $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BD}$ ، فان C تقع في داخل المثلث ADB. وعليه، تقع C في داخل $\angle ADB$.

بما ان A-D-F، فان F و C في الجهتين المعاكستين للخط BD ولذلك تقطع $F-C$ $D-B$.

وبهذا، فان $\overrightarrow{DB}$ يقع بين $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{DF}$ وان

$\angle BDC < \angle \overrightarrow{ECD}$. لكن من السهولة ان نبين ان $\overrightarrow{CE}$ يقع في داخل $\angle BCD$ ولذلك $\angle ECD < \angle BCD$ لذلك، من مبرهنة ٦٥، يكون $\angle BDC < \angle BCD$. لكن بما ان $B\text{-}C \doteq B\text{-}D$ فان $\angle BDC \doteq \angle BCD$ وهذا يناقض مبرهنة ٦٢.

الحالة (٣)

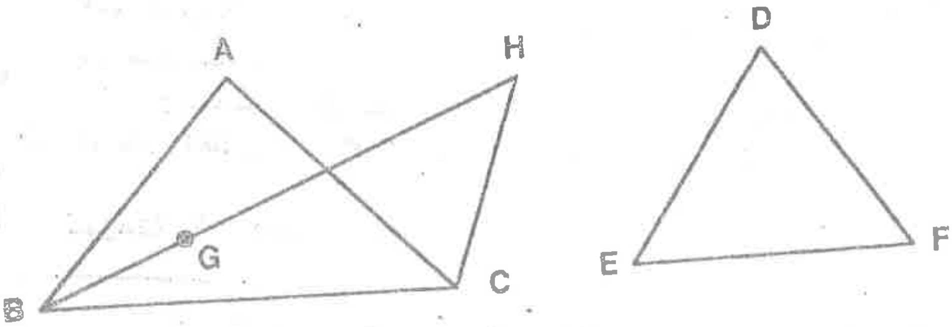
اذا وقعت D في داخل المثلث ABC، فان البرهان يكون مشابها لما اكملناه توا.

لقد توصلنا الى تناقض في كل الحالات اعلاه حينما فرضنا ان $D \neq C$. لذا فاننا نستنتج ان $C = D$ وبهذا يكمل البرهان.

٦٨: لتكن A - B قطعة و D, C نقطتين في نفس الجهة من A - B بحيث ان A - D ≅ A - C و B - C ≅ B - D فان C = D

مبرهنة ٦٩ (SSS)

اذا كانت ثلاثة اضلاع من مثلث تطابق على التوالي ثلاثة اضلاع من مثلث آخر، فان المثلثين يتطابقان.



شكل ٥٣

البرهان

ليكن ABC و DEF مثلثين، وفيهما الاضلاع الثلاثة

من احدهما تطابق الاضلاع الثلاثة، على التوالي، من المثلث الاخر. لكي نبرهن ان المثلثين يتطابقان من مبرهنة (SAS)، يجب ان نبين ان زوجا واحدا من الزوايا تكون متطابقة، وليكن $\angle ABC \cong \angle DEF$.

نفرض ان العبارة خطأ.

من مبرهنة ٦٢، اما $\angle DEF < \angle ABC$

او $\angle ABC < \angle DEF$

نفرض ان $\angle ABC < \angle DEF$

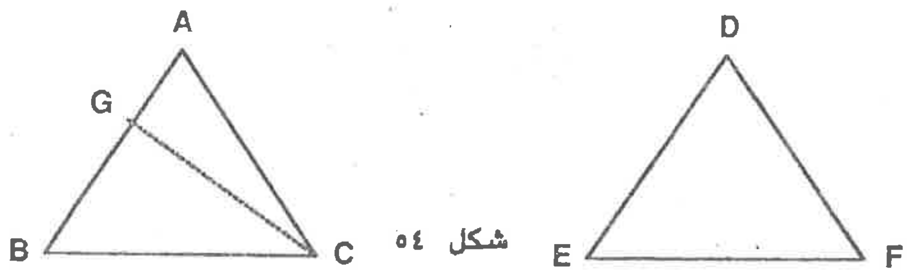
من تعريف $\angle$ على الزوايا، يوجد شعاع $\overrightarrow{BG}$ في داخل $\angle ABC$ بحيث ان $\angle GBC \cong \angle DEF$. من بديهية ١١، توجد نقطة H على $\overrightarrow{BG}$ بحيث ان $B-H \cong E-D$. وبما ان $B-C \cong E-F$ فانه من SAS ، $\Delta HBC \cong \Delta DEF$ ولذلك $H-C \cong D-F$ وبما ان $A-C \cong D-F$ ، فان $A-C \cong H-C$ وبالمثل $A-B \cong H-B$ ، وبما ان A و H في نفس الجهة من BC، فانه من مبرهنة ٦٨، $A = H$ ، وهذا تناقض (لماذا؟).

وبنفس الطريقة اذا كان $\angle DEF < \angle ABC$.

لذلك $\angle ABC \cong \angle DEF$ وان $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

مبرهنة ٧٠ (ASA)

اذا كانت زاويتان وضلع مشترك بينهما في مثلث تطابق على التوالي زاويتين وضلع مشترك بينهما من مثلث آخر، فان المثلثين يتطابقان.



شكل ٥٤

البرهان

ليكن ABC و DEF مثلثين وفيهما :

$\angle ABC \doteq \angle DEF$ و $\angle ACB \doteq \angle DFE$ و $B\text{-}C \doteq E\text{-}F$.

يجب ان نبرهن ان $\Delta ABC = \Delta DEF$

نفرض ان $A\text{-}B < D\text{-}E$ ، فانه توجد نقطة G بحيث ان $A\text{-}G\text{-}B$ وان $B\text{-}G \doteq D\text{-}E$ وبما ان $B\text{-}C \doteq E\text{-}F$ ، و $\angle GBC \doteq \angle DEF$ ، فانه من SAS ، $\Delta GBC = \Delta DEF$.

لذا فان $\angle GCB \doteq \angle DFE$ ، لكن $\angle DFE \doteq \angle ACB$ ، فان $\angle GCB \doteq \angle ACB$. لكن بما ان $A\text{-}G\text{-}B$ ، فان $\angle GCB < \angle ACB$ وهذا يناقض مبرهنة ٦٢.

وبنفس الطريقة، اذا كان $D\text{-}E < A\text{-}B$.

لذلك، فان $D\text{-}E \doteq A\text{-}B$، ومن SAS، فان $\Delta ABC \doteq \Delta DEF$

تمارين ٦-١

١- برهن مبرهنة SSS على ان لاتستخدم مبرهنة ٦٨.

٢- برهن ان كل مثلث تكون زواياه متطابقة، فان اضلاعه تكون متطابقة.

٣- برهن ان كل مثلث تكون اضلاعه متطابقة، فان زواياه تكون متطابقة.

٤- اختصر البرهان في مبرهنة ٦٦، باستخدام مبرهنة ٥٨.

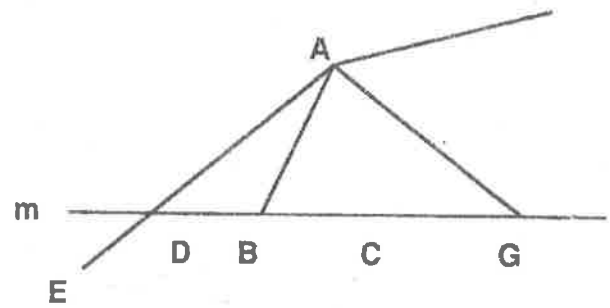
٥- برهن مبرهنة ٦٧ مباشرة من مبرهنة ASA.

٦-٢ مبرهنة الزوايا الخارجية

مبرهنة ٧١

ليكن m مستقيما وA نقطة لاتقع على m، فانه يوجد على الاقل مستقيم واحد يمر من A ولايقطع m.

شكل ٥٥



البرهان

نأخذ اي نقطتين B و C على m ونصل A و B. من بديهية انشاء زاوية، في جهة A-B التي لاتحتوي على C، توجدزاوية $\angle EAB$ تطابق $\angle ABC$. ان المستقيم EA هو المستقيم المطلوب الذي لايقطع m، حيث نفرض انه يقطع m في نقطة ولتكن D. فاما تقع D في جهة B التي تحتوي C او لاتقع.

نفرض ان D لاتقع في جهة B التي تحتوي C، فانه من بديهية ١١، توجد نقطة G بحيث ان D-B-G وان A-D ≅ B-G.

بما ان $\angle BAD \cong \angle ABG$ و B-A ≅ B-A ، فان Δ ADB ≅ Δ BGA . لذلك، يكون $\angle ABD \cong \angle BAG$ ، وبما ان $\angle ABG$ و $\angle ABD$ تكونان زوجا خطيا، فانه في هذه الحالة، تكون الزاويتان $\angle BAG$ و $\angle BAD$ متكاملتين، لذلك، من نتيجة ٣ مبرهنة ~~٦٣~~ ٥٨ تكونان زوجا خطيا.

بهذا تكون النقاط G ,A ,D على خط واحد. لكن AD و AG يقطعان m. وهذا يناقض مبرهنة ٢.

يتحقق البرهان سواء كانت D في اي جهة من B.

حيث ان الفرض بان المستقيم EA يقطع m يؤدى الى تناقض وبهذا فان EA لايقطع m.

تعريف ٢٩

اذا قطع مستقيمين بقاطع في نقطتين مختلفتينAوB، فالزوايا التي تكون القطعة A-B كجزء من ضلع، تدعى زوايا داخلية. تدعى الزوايا الاخرى خارجية. الزوايتان اللتان يكون رأسيهما النقطتين A, B وفي نفس الجهة من القاطع احداهما داخلية والاخرى خارجية تدعيان زاويتين متناظرين. زاويتان غير متجاورتان على جهتي القاطع المتعاكستين وكلا منهما داخلية تدعيان زاويتين داخليتين متبادليتين.

مبرهنة ٧٢

اذا قطع مستقيمين بقاطع وكانت الزاويتان الداخليتان المتبادلتان متطابقتين، فان المستقيمين لايتقاطعان.

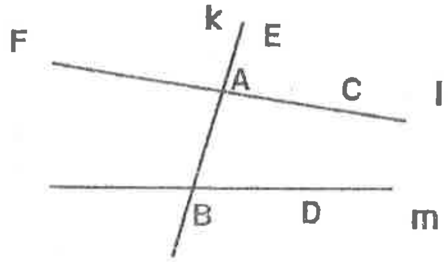
البرهان

تبرهن بنفس طريقة المبرهنة ٧١ وبالاعتماد على تعريف ٢٩.

مبرهنة ٧٣

اذا قطع مستقيمين بقاطع وكانت الزاويتان

المتناظرتان متطابقتين، فان المستقيمين لايتقاطعان.



شكل ٥٦

البرهان

ليكن l و m مستقيمين و k مستقيما اخر يقطع l و m في النقطتين B,A، على التوالي.

لتكن C نقطة اخرى على l، و D نقطة اخرى على m و E نقطة على k بحيث ان E-A-B .

فتكون الزاويتان ∠ EAC و ∠ ABD متناظرتين ومتطابقتين.

لتكن F نقطة على l بحيث ان F-A-C فتكون الزاويتان ∠ FAB و ∠ ABD متبادلتين وان الزاويتين ∠ EAC و ∠ FAB رأسيتان.

من نتيجة ٢ ومبرهنة ٥٨، $\angle FAB \doteq \angle EAC$

وبما ان $\angle EAC \doteq \angle ABD$ ،

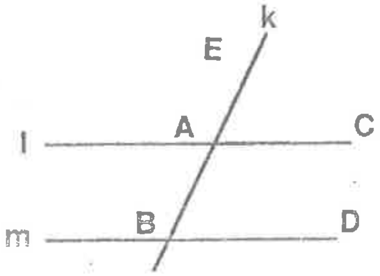
فانه من بديهية ١٥، $\angle FAB \doteq \angle ABD$

ومن مبرهنة ٧٢ ،فان المستقيمين l و m لايتقاطعان.

مبرهنة ٧٤

اذا قطع مستقيمين بقاطع وكانت الزاويتان الداخليتان في نفس الجهة من القاطع متكاملتين، فان المستقيمين لايتقاطعان.

(شكل ٥٧) ص ١٤٥



شكل ٥٧

البرهان

ليكن l و m مستقيمين قطعا بقاطع K في النقطتين A و B على التوالي. لتكن C نقطة اخرى على l و D نقطة اخرى على m. وتكون الزاويتان ∠ CAB و ∠ ABD متكاملتين.

لتكن E نقطة على k بحيث ان E-A-B ، اي ان الزاويتين ∠ EAC و ∠ CAB تكونان زوجا خطيا.

لذلك من مبرهنة ٥٧، تكون الزاويتان ∠ EAC و ∠ CAB متكاملتين. وبما ان ∠ ABD و ∠ CAB متكاملتان،

ومن بديهية ١٥ ، ∠ CAB ≅ ∠ CAB

ومن نتيجة ١ مبرهنة ٥٨، يكون ∠ EAC ≅ ∠ ABD

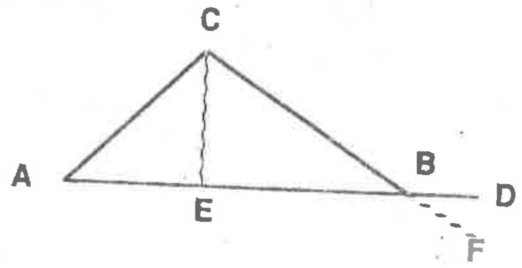
اي ان الزاويتين المتناظرتين متطابقتان، ومن مبرهنة ٧٣، فان l لايقطع m.

تعريف ٣٠

الزاوية التي تكون مجاورة ومكملة لزاوية من مثلث تدعى زاوية خارجية للمثلث. زوايا المثلث غير المجاورة لزاوية خارجية تدعى زوايا داخلية مقابلة للزاوية الخارجية. زاوية خارجية لمثلث غير مجاورة لزاوية، مثل ∠ A في المثلث تدعى زاوية خارجية مقابلة الى ∠ A .

مبرهنة ٧٥ ﺑﺮﻻﻃﺎﻉ

اي زاوية داخلية لمثلث تكون اصغر من اي زاوية خارجية مقابلة لها.



شكل ٥٨

البرهان

ليكن ABC مثلثا، و D نقطة بحيث ان A-B-D ، فان $\angle CBD$ تكون زاوية خارجية للمثلث ABC. يجب ان نبرهن ان $\angle CBD > \angle BCA$ و $\angle CBD > \angle BAC$.

اذا لم تكن $\angle CBD > \angle BCA$ ، فمن مبرهنة ٦٢،

اما $\angle CBD \doteq \angle BCA$ او $\angle BCA > \angle CBD$

(أ) اذا كانت $\angle CBD \doteq \angle BCA$ ، ولكن هذا يناقض مبرهنة ٧٢.

(ب) نفرض ان $\angle BCA > \angle CBD$.

من تعريف ٢٨، يوجد شعاع CE في داخل $\angle BCA$ بحيث ان $\angle CBD \doteq \angle ECB$ ، ومن مبرهنة ٤٣، يقطع الشعاع الضلع A-B في نقطة E. فيكون في المثلث

$\angle CBD \doteq \angle BCE$ ، وهذا يناقض الجزء (أ).

لذا فان $\angle CBD < \angle BCA$.

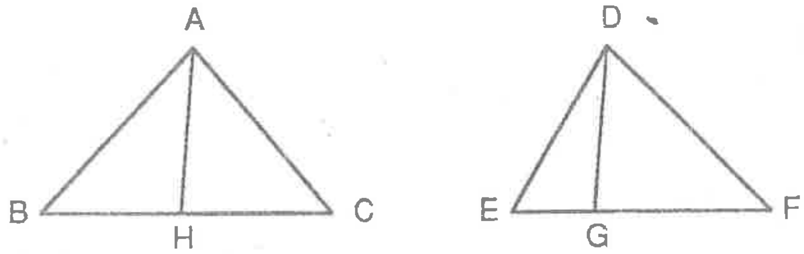
لتكن F نقطة بحيث ان C-B-F، ومن نتيجة٢ مبرهنة ٥٨، يكون $\angle CBD \doteq \angle ABF$.

ومن البرهان اعلاه، يكون $\angle ABF < \angle BAC$ ،

ومن مبرهنة ٦٤، يكون $\angle CBD < \angle BAC$

مبرهنة ٧٦ (SAA)

اذا كانت زاويتان وضلع غير مشترك بينهما من مثلث تطابق على التوالي زاويتين وضلعا غير مشتركا من مثلث آخر، فان المثلثين يتطابقان.



شكل (٥٩)

البرهان

ليكن ABC و DEF مثلثين، وفيهما:

$A\text{-}B \doteq D\text{-}E$ ، $\angle B \doteq \angle E$ و $\angle C \doteq \angle F$. يجب ان نبرهن ان $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

اذا كان $B\text{-}C \doteq E\text{-}F$ ، فانه من ASA او SAS يتطابق المثلثين.

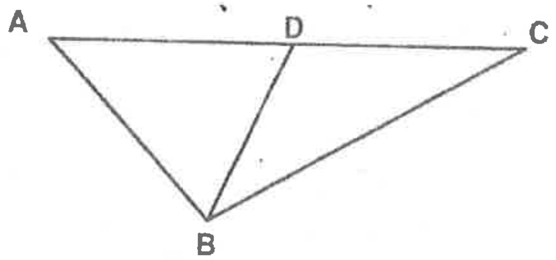
نفرض ان B-C لاتطابق E-F. من مبرهنة ٥٢، اما $B\text{-}C < E\text{-}F$ او $E\text{-}F < B\text{-}C$.

نفرض ان $E\text{-}F < B\text{-}C$ ، فانه توجد نقطة H بحيث ان

B-H-C و B-H ≅ E-F.
من SAS ، Δ ABH ≅ Δ DEF . لذلك، ∠ EFD ≅ ∠ BHA ،
لكن ∠ EFD ≅ ∠ HCA = ∠ BCA وبذلك، في المثلث AHC
الزاوية الخارجية ∠ BHA تطابق الزاوية
الداخلية المقابلة لها ∠ BCA وهذا خلاف مبرهنة ٧٥.
نفرض ان B-C < E-F ، فانه توجد نقطة G بحيث
ان E-G-F و B-C ≅ E-G. ونستمر بنفس الطريقة اعلاه
وعليه، نستنتج ان B-C ≅ E-F
ومن SAS ، Δ ABC = Δ DEF

مبرهنة ٧٧

اذا كان ضلعان في مثلث غير متطابقين، فان الزاويتين المقابلتين لهما غير متطابقتين والزاوية الصغرى تقابل الضلع الاصغر.



شكل ٦٠

البرهان

ليكن ABC مثلثا، وفيه A-B < A-C ،
يجب ان نبرهن ان ∠ ABC < ∠ ACB .
لتكن D نقطة بحيث ان A-D-C و A-B ≅ A-D، فان
∠ ADB هي زاوية خارجية للمثلث BDC ، ولذلك من مبرهنة

٧٥، $\angle ADB \;>\; \angle DCB$. لكن من مبرهنة ٦٦، يكون $\angle ABD \cong \angle ADB$ ، لذلك من مبرهنة ٦٤، $\angle ABD \;>\; \angle DCB$
او بما ان $\angle DCB = \angle ACB$ ، فان $\angle ABD \;>\; \angle ACB$.
لكن A-D-C ، من مبرهنة ٤٥ وتعريف ١٧، BD في داخل $\angle ABC$ ، ومن الخاصية الانعكاسية $\angle ABD \cong \angle ABD$ ،
فانه من تعريف > ؛ $\angle ABC \;>\; \angle ABD$.
لذلك، من مبرهنة ٦٥، يكون $\angle ABC \;>\; \angle ACB$.

مبرهنة ٧٨

اذا كانت زاويتان في مثلث غير متطابقتين، فان الضلعين المقابلين لهما غير متطابقين والضلع الاصغر يقابل الزاوية الصغرى.

البرهان

ليكن ABC مثلثا، وفيه $\angle ABC \;<\; \angle BCA$
يجب ان نبرهن ان $A\text{-}C > A\text{-}B$
نفرض ان العبارة خطأ. فانه من مبرهنة ٥٢،
$A\text{-}C \cong A\text{-}B$ او $A\text{-}B < A\text{-}C$
اذا كان $A\text{-}C \cong A\text{-}B$ فانه من مبرهنة ٦٦ يكون
$\angle BCA \cong \angle ABC$ وهذا يناقض الفرض.
اذا كان $A\text{-}B > A\text{-}C$ ، فانه من مبرهنة ٧٧،
يكون $\angle BCA > \angle ABC$ وهذا يناقض الفرض ومبرهنة ٦٢.
لذلك، فان فرضيتنا تؤدي الى تناقض.
وبهذا يكون $A\text{-}C > A\text{-}B$.

تعريف ٣١

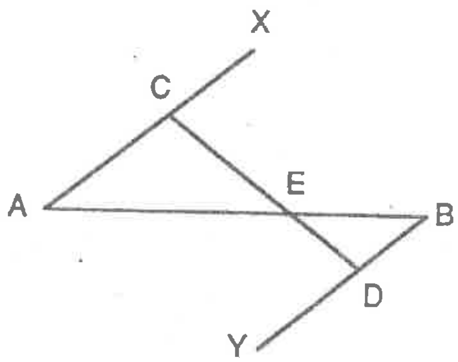
اذا كانت C نقطة بحيث ان A-C-B و $A\text{-}C \cong C\text{-}B$

فانه تدعى C نقطة منتصف القطعة A-B.

تساعد المبرهنة التمهيدية التالية على وجود نقطة منتصف القطعة.

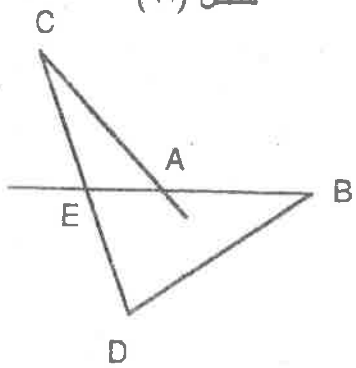
مبرهنة تمهيدية ١

لتكن A-B اية قطعة، و X و Y نقطتين تقعان في الجهتين المتعاكستين للقطعة A-B وان $\angle BAX \cong \angle \overrightarrow{AB}Y$، واذا كانت D اية نقطة على BY و C اية نقطة على AX ، فان C-D يقطع المستقيم AB في نقطة E بحيث ان A-E-B.



شكل (٦١)

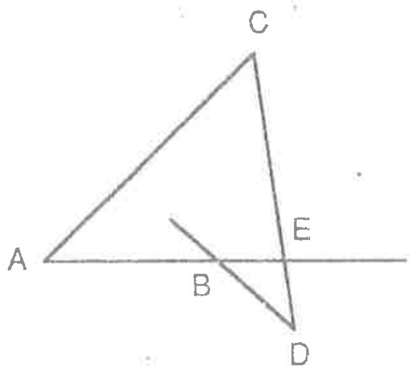
البرهان



شكل (٦٢)

C-D يجب ان تقطع المستقيم AB في نقطة E لان C و D في الجهتين المتعاكستين للخط AB. بهذا يكون A-E-B ، او A-B-E ، او E-A-B. (لماذا لايكون A = E او B = E؟)

نفرض E-A-B. المستقيم CA يقطع B-E التي هي ضلع من المثلث EBD ، ومن بديهية باخ، يجب ان يقطع ضلعا آخرا، لكن هذا غير ممكن، حيث ان المستقيم CA يقطع المستقيم DE في C وبهذا فانه لايمكن ان يقطعه مرة ثانية، ومن مبرهنة ٧٢، المستقيم CA لايقطع المستقيم BD.



شكل (٦٣)

نفرض A-B-E.فان المستقيم DB يقطع A-E، الذي هو ضلع من المثلث AEC ، ومن بديهية باخ، يجب ان يقطع ضلعا اخرا، لكن هذا غير ممكن، حيث ان المستقيم BD يقطع المستقيم CE في D ولايمكن ان يقطعه مرة ثانية. ومن مبرهنة ٧٢، فان المستقيم BD لايقطع المستقيم AC.

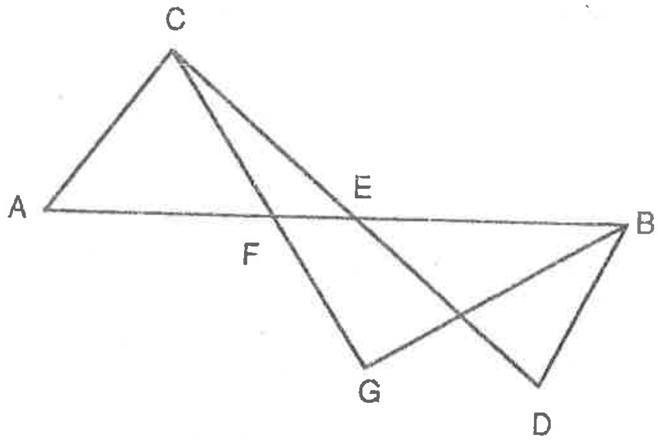
لقد توصلنا الى تناقض في الحالتين اعلاه، لذلك نستنتج ان A-E-B.

مبرهنة ٧٩ للاطلاع

لكل قطعة

(أ) توجد على الاقل نقطة منتصف واحدة

(ب) توجد على الاكثر نقطة منتصف واحدة.



شكل (٦٤)

البرهان

(أ) لتكن A-B اية قطعة، ولتكن ∠ABD و ∠ABC زاويتين في الجهتين المتعاكستين للقطعة A-B بحيث ان ∠BAC ≅ ∠ABD . ليكن B-D ≅ A-C. فانه من المبرهنة التمهيدية (١)، تقطع C-D الخط AB في نقطة E بحيث ان A-E-B. بالفرض، ∠CAE ≅ ∠EBD وان A-C = B-D ، ومن نتيجة ٢ مبرهنة ٥٨، يكون ∠BED ≅ ∠CEA . لذلك من SAA ، Δ ACE ≅ Δ BDE . لذلك، A-E ≅ E-B وان E هي نقطة منتصف القطعة .A-B

(ب) نفرض انه توجد نقطة F بحيث ان A-F-B وان F-B ≅ A-F. على الشعاع CF ، نأخذ F-G ≅ F-C، فانه من SAS، Δ ACF ≅ Δ BGF ومنه نستنتج ان

$\angle FBG \doteq \angle FAC \doteq \angle ABD$ وان $B-D \doteq A-C \doteq B-G$.
لذلك، $G = D$ و $E = F$. (لماذا؟)

تعريف ٣٢

اذا كانت C نقطة منتصف القطعة A-B، فان كلا من A-C, C-B تدعى نصف القطعة A-B.

مبرهنة ٨.

انصاف القطع المتطابقة تكون متطابقة.

شكل (٦٥)

البرهان

لتكن $A-B \doteq C-D$ و A-E-B ، C-F-D ، $A-E \doteq E-B$ ، $C-F \doteq F-D$. يجب ان نبرهن على ان $A-E \doteq C-F$.

بما ان $A-B \doteq C-D$ و A-E-B ، فانه من مبرهنة ٥١ توجد نقطة G بحيث ان C-G-D و $A-E \doteq C-G$.

ومن مبرهنة ٥٠ (طرح القطع)، يكون $E-B \doteq G-D$.
من الفرض $A-E \doteq E-B$ ، لذلك من بديهية ١٢، يكون $C-G \doteq G-D$. وبذلك يكون عندنا C-G-D و $C-G \doteq G-D$ ،
ومن تعريف ٣٢، فان G هي نقطة منتصف C-D. من مبرهنة ٧٩(ب)، $F = G$ ، لذلك بالتعويض، يكون $A-E \doteq C-F$ ، وبالطرح يكون $E-B \doteq F-D$.

تعريف ٣٣

لتكن $\angle AOB$ زاوية، يقال ان الشعاع $\overrightarrow{OD}$ ينصف $\angle AOB$ اذا وفقط اذا

(أ) تقع D في داخل $\angle AOB$

(ب) $\angle AOD \cong \angle DOB$

ان براهين المبرهنات التالية ٨١، ٨٢، و ٨٣ تترك كتمارين.

مبرهنة ٨١

لكل زاوية، يوجد في الاقل منصف واحد.

مبرهنة ٨٢

لكل زاوية، يوجد في الاكثر منصف واحد.

تعريف ٣٤

اذا كان OD منصفا للزاوية $\angle AOB$ فأن $\angle AOD$ و $\angle DOB$ تدعيان نصفي $\angle AOB$.

مبرهنة ٨٣ مطلوب

انصاف الزوايا المتطابقة تكون متطابقة.

تمارين ٦-٢

١- برهن مبرهنة ٨١

٢- برهن مبرهنة ٨٢

٣- برهن مبرهنة ٨٣

٦-٣ الزوايا القوائم و الزوايا غير القوائم

تعريف ٣٥

الزاوية التي تطابق مكملتها تدعى زاوية قائمة.
الزاوية التي تكون اصغر من زاوية قائمة تدعى زاوية حادة.
اي زاوية التي هي ليست قائمة وليست حادة تدعى منفرجة.

مبرهنة ٨٤

اي زاوية حادة تكون اصغر من اي زاوية منفرجة.

البرهان

لتكن $\angle ABC$ زاوية حادة و $\angle DEF$ زاوية منفرجة.
نفرض ان العبارة خطأ، فمن مبرهنة ٦٢، اما $\angle ABC \cong \angle DEF$ او $\angle DEF < \angle ABC$.
اذا كانت $\angle ABC \cong \angle DEF$ فانه من تعريف ٣٥، ومبرهنة ~~٦١~~ ٦٢ تكون $\angle DEF$ زاوية حادة وهذا خلاف الفرض.
نفرض ان $\angle DEF < \angle ABC$.
وبما ان $\angle ABC$ زاوية حادة، اي انها تكون من تعريف ٣٥، اصغر من زاوية قائمة، لذلك من مبرهنة ٦٥، فان $\angle DEF$ تكون اصغر من زاوية قائمة، وبذلك تكون $\angle DEF$ زاوية حادة، وهذا يخالف الفرض.
لذلك، فان $\angle ABC > \angle DEF$.

مبرهنة ٨٥

(أ) تكون الزاوية منفرجة اذا فقط اذا كانت مكملتها زاوية حادة.
(ب) اذا كانت زاويتان متكاملتين وغير متطابقتين، فان احداهما تكون زاوية حادة.

البرهان

يترك كتمرين.

مبرهنة ٨٦

(أ) اي زاوية تطابق زاوية قائمة تكون زاوية قائمة.
(ب) اي زاوية قائمة تكون اصغر من اي زاوية منفرجة.

البرهان

يترك كتمرين.

مبرهنة ٨٧

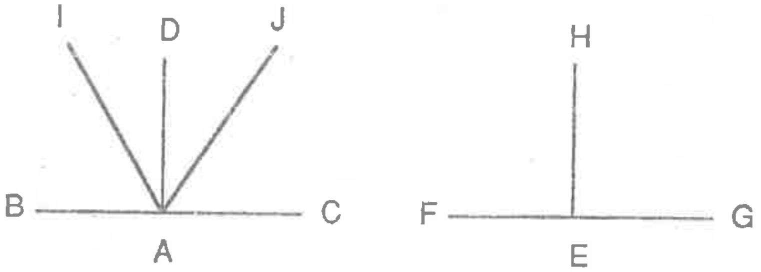
اذا كانت الزوايا القوائم موجودة، فان زاويتين في الاقل من اي مثلث تكون حادة.

البرهان

يترك كتمرين.

مبرهنة ٨٨

كل الزوايا القوائم تكون متطابقة.



شكل (٦٦)

البرهان

لتكن $\angle BAD$ و $\angle CAD$ زاويتين متطابقتين وتكونان زوجا خطيا، لتكن $\angle FEH$ و $\angle GEH$ زاويتين متطابقتين وتكونان زوجا خطيا. يجب ان نبرهن ان $\angle FEH \cong \angle BAD$. نفرض ان العبارة خطأ.

فانه من برهنة ٦٢، اما $\angle BAD < \angle FEH$ او $\angle FEH < \angle BAD$

نفرض ان $\angle BAD < \angle FEH$ فانه يوجد شعاع $\overrightarrow{AI}$ في داخل $\angle BAD$ بحيث ان $\angle FEH \cong \angle BAI$. بما ان $\angle FEH \cong \angle BAI$ فانه من نتيجة ١، مبرهنة ٥٨، يكون $\angle GEH \cong \angle CAI$، وبما انه من الفرض، $\angle GEH \cong \angle FEH$ فانه من بديهية ١٥، يكون $\angle CAI \cong \angle BAI$.

بما ان $\angle CAD \cong \angle BAD$ وان $\overrightarrow{AI}$ شعاع في داخل $\angle BAD$ فانه من مبرهنة ٥٩، يوجد شعاع $\overrightarrow{AJ}$ في داخل $\angle CAD$ بحيث ان $\angle CAJ \cong \angle BAI$. لكن $\angle CAI \cong \angle BAI$ فأنه من بديهية ١٥، يكون $\angle CAJ \cong \angle CAI$. وهذا يخالف بديهية ١٤، لذا فان الفرض بان $\angle BAD < \angle FEH$ يؤدي الى تناقض ويكون الفرض بذلك خاطئا.

وبنفس الطريقة، نتوصل الى تناقض اذا فرضنا

ان

$\angle FEH > \angle BAD$. لذا فان $\angle FEH \doteq \angle BAD$.

تعريف ٣٦

شعاعان مختلفان يدعيان متعامدين اذا وفقط اذا كانت لهما نقطة بداية مشتركة وان الزاوية المتكونة من اتحادهما تكون زاوية قائمة.

يستعمل هذا التعريف في حالة المستقيمات والقطع ايضا. وفي حالة القطع يشترط ان تشتركا بنقطة اولهما نقطة نهاية مشتركة.

رمز

يرمز للشعاعين المتعامدين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ بالرمز:

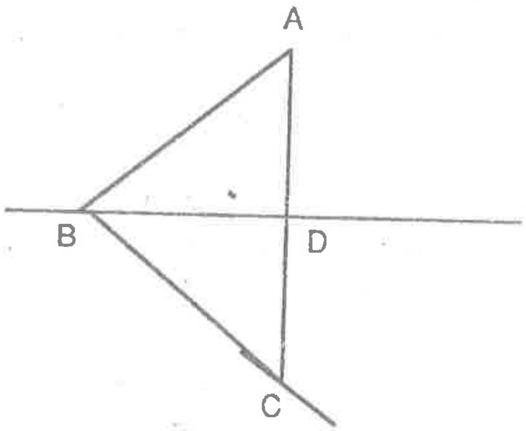
$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$$

يستعمل هذا الرمز كذلك كما يلي:

$$OA \perp OB \quad \text{و} \quad O\text{-}A \perp O\text{-}B$$

مبرهنة ٨٩ للاطلاع

يوجد في الاقل مستقيم واحد عمود على مستقيم معلوم من اية نقطة لاتقع عليه.



شكل (٦٧)

البرهان

ليكن m مستقيما وA نقطة لاتقع على m، و B اية نقطة على m.في جهة المستقيم m التي لاتحتوي علىA،يوجد شعاع $\overrightarrow{BX}$ يصنع مع m زاوية تطابق الزاوية التي يصنعها $\overrightarrow{BA}$ مع m.

توجد نقطة C على $\overrightarrow{BX}$ بحيث ان $B-A \cong B-C$.فان A-C يقطع m في نقطة D. (لماذا؟) اذا كانت B=D، فان الخط AC يجب ان يكون عموديا على m. (لماذا؟) اذا كانت $B \neq D$ ، فانه من SAS ، $\Delta ABD \cong \Delta CBD$.

لذلك، تكون $\angle BDA \cong \angle BDC$ وانهما زاويتان قائمتان. (لماذا؟).في اية حالة، بينا انه اذا كانت A نقطة لاتقع على m، فانه يوجد على الاقل مستقيم واحد يمر من مستقيم A وعمودى على m.

ان براهين المبرهنات التالية تترك كتمارين.

مبرهنة ٩٠

يوجد في الاكثر مستقيم واحد عمود على مستقيم معلوم من اية نقطة لاتقع عليه.

مبرهنة ٩١

يوجد في الاقل مستقيم واحد عمود على مستقيم معلوم من اية نقطة على المستقيم.

مبرهنة ٩٢

يوجد في الاكثر مستقيم واحد عمود على مستقيم معلوم من اية نقطة على المستقيم.

مبرهنة ٩٣

لكل قطعة يوجد عمود واحد فقط من نقطة منتصف القطعة.

تمارين ٦-٣

١ـ عرف مثلث قائم الزاوية.
٢ـ عرف وتر مثلث قائم.

٦-٤ انشاءات

اعطى اقليدس عمليات عن انشاءات معينة، ومنها المبرهنات ٩، ١٠، ١١، ١٢ و ٢٣، والتي هي مفيدة في نظامه. لم يستعملها فقط لانشاء منصف الزاوية

والعمود المنصف للقطعة، لكن استخدمها في محل مبرهنات الوجود.

قدمنا في نظام هلبرت بديهيات عن انشاء قطعة وانشاء زاوية وبرهنا مبرهنات مثل ٨٢، ٨٩، ٩١، و ٩٣، غيران هذه المبرهنات هي مجرد مبرهنات وجود. لناخذ مبرهنة ٨٩، يبدو البرهان من اول نظرة كواسطة فعلية لانشاء عمود على المستقيم من نقطة لاتقع عليه، لكن نلاحظ انه يقال في البرهان ليكن كذا وكذا هو زاوية تطابق زاوية اخرى. اذا لم نستطع انشاء زاوية تطابق زاية معلومة، لانستطيع انشاء العمود باستخدام مبرهنة ٨٩.

لمناقشة موضوع الانشاءات، سنعتبره يقع في نموذج ما من نظامنا. استخدم افليدس المسطرة والفرجال في انشاءاته. بما اننا لم نقدم الدوائر، سنحذف الفرجال. على كل حال، لاجل تقديم بعض الانشاءات الاولية، يتطلب اكثر من استعمال المسطرة، لذلك نقدم الفرضيات التالية:

١- باستخدام المسطرة، نستطيع رسم (اي، انشاء) مستقيم يتعين من اي نقطتين.

٢- اذا تقاطع مستقيمان، فانه يمكن ايجاد نقطة تقاطعهما.

٣- يمكن ايجاد نقاط الوجود المعطاة في بديهية ٩.

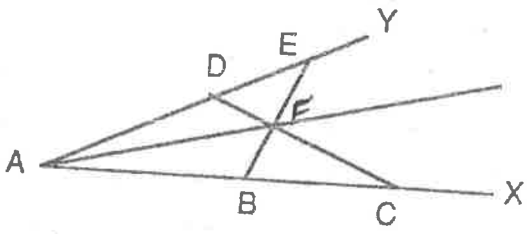
٤- يمكن ايجاد نقطة لاتقع على الخط.

٥- لتكن A اية نقطة على مستقيم، يمكن ايجاد نقطة B في اي جهة من A بحيث ان A-B تطابق قطعة معلومة C-D.

مع هذه الفرضيات نقدم العمليات التالية:

عملية ١

كيفية تنصيف زاوية معلومة.



شكل (٦٨)

العمل

لتكن $\angle XAY$ زاوية معلومة. على اي ضلع، وليكن $\overrightarrow{AX}$ ناخذ نقطتين، ولتكن B و C بحيث ان A-B-C. على الشعاع $\overrightarrow{AY}$، ناخذ نقطتين D و E بحيث ان $A\text{-}D \cong A\text{-}B$ و $A\text{-}C \cong A\text{-}E$. من سؤال ٦ تمرين ٤-٦ B-E تقطع D-C في نقطة F. فان $\overrightarrow{AF}$ هو المنصف.

البرهان

من SAS، $\Delta BAE \cong \Delta DAC$

ومن SAA، $\Delta BFC \cong \Delta DFE$.

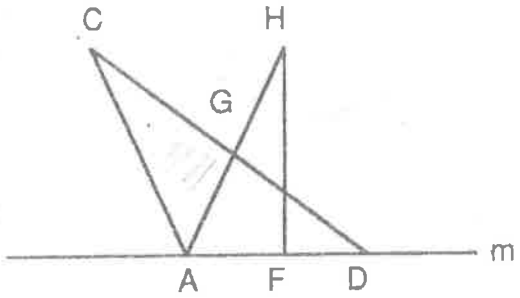
لذلك، $B\text{-}F \cong F\text{-}D$

لهذا من SSS او SAS $= \Delta ABF \cong \Delta ADF$

لذلك، يكون $\overrightarrow{AF}$ هو منصف الزاوية.

عملية ٢ للاطلاع

كيفية انشاء عمود على مستقيم معلوم.



شكل ٦٩

شكل (٦٩)

العمل

ليكن m مستقيما، A نقطة على m، و C نقطة لاتقع على m. نصل A-C، نأخذ نقطة D على m بحيث ان A-C ≅ A-D.

نصل C-D. من عملية ١، ننصف ∠ CAD، يقطع هذا المنصف C-D في نقطة، ولتكن G. نأخذ F على m بحيث ان A-F ≅ A-G. لتكن H نقطة بحيث ان A-G-H و A-H ≅ A-D.

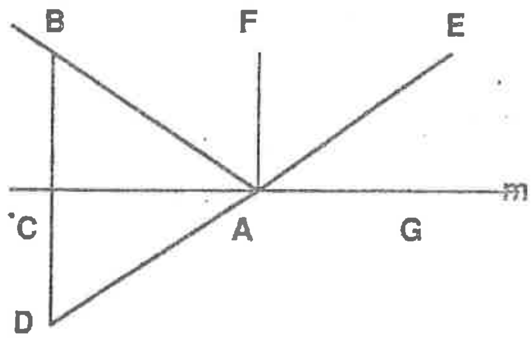
نصل F-H. فيكون المستقيم FH عموديا على m.

البرهان

من SAS، يتطابق المثلثان ACG و ADG،
ومن هذا نستنتج ان AGD ∠ هي زاوية قائمة.
كذلك Δ AGD ≅ Δ AFH ومنه نستنتج AFH ∠ ≅ AGD ∠
وبهذا فان، AFH ∠ هي زاوية قائمة، وبذلك يكون FH عموديا على m.

عملية ٢

كيفية انشاء عمود على مستقيم معلوم من نقطة معلومة على المستقيم.



شكل ٧٠

العمل

لتكن A نقطة معلومة على مستقيم m.من عملية ٢، نرسم BD عموديا على m. اذا مر من A، فيكون هو المطلوب.

نفرض انه لايمر من A، ليكن BD يقطع m في نقطة C بحيث ان B-C-D ، و C-D ≅ B-C. نصل A-B و A-D.

نمد DA من A الى E.

من عملية ١، ننصف ∠ BAE بالشعاع AF.

فان AF يكون عموديا على m من A.

البرهان

من SAS $\Delta ACB \cong \Delta ACD$.

لذا فان، $\angle BAC \cong \angle DAC$.

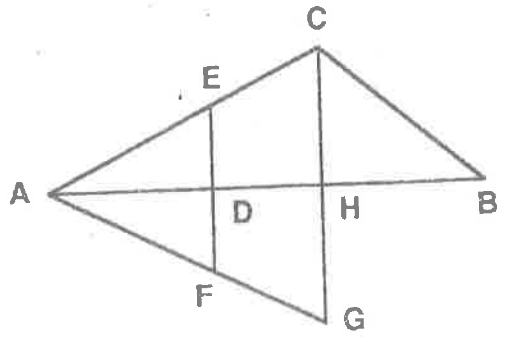
لكن $\angle DAC \cong \angle EAG$ (حيث G نقطة بحيث ان C-A-G).

من العمل، $\angle BAF \cong \angle EAF$

وبجمع الزوايا، يكون $\angle CAF \cong \angle GAF$، وبذلك يكون AF عموديا على m.

عملية ٤

كيفية اقامة عمود على مستقيم معلوم من نقطة معلومة لاتقع على المستقيم.



شكل ٧١

العمل

لتكن A, B نقطتين على مستقيم معلوم و C نقطة

لاتقع على المستقيم. نصل A-C و B-C. نأخذ اي نقطة D على A-B ، ومن عملية ٣، نرسم العمود من D على A-B. من بديهية باخ، هذا المستقيم يقطع اما A-C او B-C. نفرض انه يقطع A-C في نقطة E. لتكن F نقطة بحيث ان E-D-F و D-E ≅ D-F.

نصل AF ، ولتكن G نقطة بحيث ان A-F-G و A-C ≅ A-G. نصل C-G ، فانها تقطع المستقيم AB في H (لماذا؟). فان المستقيم CH هو العمود المطلوب.

البرهان

من SAS $\Delta ADE \cong \Delta ADF$

لذلك فان A-B تنصف $\angle CAG$

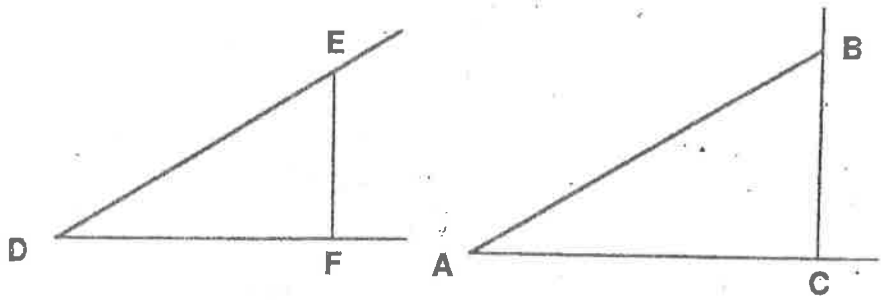
فيكون $\Delta ACH \cong \Delta AGH$

وان $\angle AHC$ تكون زاوية قائمة.

وبذلك يكون CH عموديا على AB.

عملية ٥

كيفية انشاء زاوية من نقطة معلومة على مستقيم معلوم تطابق زاوية (حادة) معلومة.



شكل ٧٢

العمل

لتكن A نقطة على مستقيم معلوم m. لتكن D ∠ الزاوية المعلومة (حادة).

من عملية ٤، ننزل عمودا من نقطة E على احد ضلعي الزاوية الى نقطة من الضلع الاخر، ولتكن F.

نأخذ نقطة C على المستقيم m بحيث ان $D\text{-}F \cong A\text{-}C$.

من C نقيم عمود على m (عملية ٣).

ليكن $E\text{-}F \cong B\text{-}C$، ونصل AB.

فأن BAC ∠ هي الزاوية المطلوب انشاؤها.

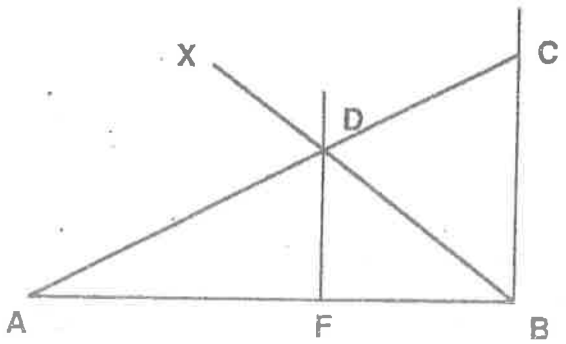
البرهان

$\Delta\ DEF = \Delta\ ABC$ (مبرهنة SAS)

لذا فان $\angle\ BAC \cong \angle\ EDF$.

عملية ٦

كيفية تنصيف قطعة مستقيم معلومة.



شكل ٧٣

العمل

لتكن A-B قطعة معلومة. من عملية ٣، نقيم عمودا

على B.

نأخذ اية نقطة C على هذا العمود ونصل A-C.

من عملية ٥، نكون زاوية من B في جهة AB التي تحتوي C بحيث ان $\angle CAB \cong \angle ABX$. فان BX يجب ان يقطع A-C في نقطة، ولتكن D.

من عملية ١، ننصف $\angle ADB$ ، والمنصف يقطع A-B في نقطة ولتكن F. فان F هي نقطة منتصف القطعة A-B.

البرهان

$\Delta AFD \cong \Delta BFD$ (مبرهنة SAA).

لذلك $A\text{-}F \cong F\text{-}B$

تمارين ٦-٤

١- اعط بالتفصيل العمل والبرهان في كل من العمليات المذكورة.

٢- استعمل عملية ٥ لبناء زاوية تطابق زاوية منفرجة.

الفصل السابع
القياس

٧-١ قياس قطعة مستقيم

اية علاقة تحقق الخواص الانعكاسية، التناظرية والمتعدية تدعى علاقة تكافؤ، ويكون من الضروري ان نشتق بعض الخواص المشتركة لعلاقات التكافؤ.

نجد ان اي علاقة تكافؤ في مجموعة معينة تقسم المجموعة الى مجموعات جزئية منفصلة. اتحاد هذه المجموعات الجزئية هي المجموعة الشاملة واي عنصرين من مجموعة جزيئة واحدة يكونان متكافئين اذاوفقط اذا ينتميان لنفس المجموعة الجزيئية،نأخذ مثالامن الجبر، لتكن S مجموعة الاعداد الصحيحية غير السالبة $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ وعلاقة التكافؤ R، بحيث ان XRY اذا وفقط اذا $X-Y = 4m$ ، حيث $m \in S$.

تقسم هذه العلاقة المجموعة S الى المجموعات التالية، التي تدعى صفوف تكافؤ:

$[0] = \{0, 4, 8, 12, \ldots\}$

$[1] = \{1, 5, 9, 13, \ldots\}$

$[2] = \{2, 6, 10, 14, \ldots\}$

يجب ان نلاحظ ان هذه المجموعات هي منفصلة، واتحادها هو المجموعة الشاملة، ويكون عنصران متكافئين اذا وفقط اذا انتميا لنفس المجموعة. بكلمات اخرى، مجموعة صفوف التكافؤ في S تكون تجزئة للمجموعة S.

يكون معكوس هذه العبارة صحيحا. ذلك، اذا كانت المجموعات $S_1, S_2, \ldots, S_n$ تكون تجزئة لمجموعة S، فانها تعرف علاقة تكافؤ R على S، بحيث ان XRY اذا

وفقط اذا كان X و Y تنتميان لنفس المجموعة S_I.
مما تقدم سيساعدنا لفهم اهمية التعريف التالي:

تعريف ٣٧

قياس (measure) قطعة مستقيم A-B هو مجموعة كل قطع المستقيمات التي تطابق A-B.

رمز

يرمز لقياس قطعة مستقيم A-B بالرمز:

$$m(A-B)$$

من هذا التعريف نستنتج ان $A-B \cong C-D$ اذا وفقط اذا $m(A-B) = m(C-D)$
واذا كان $m(A-B) \neq m(C-D)$ ، فان المجموعتين منفصلتين.
بتعبير آخر، قياس قطعة مستقيم هو علاقة تكافؤ.
ماتبقى ان نبين كيف ان هذا المفهوم يساعدنا لتعريف جمع القطع والزوايا.

٧-٢ جمع قطع المستقيمات

لكي يكون بمقدورنا ان نجمع قطع المستقيمات التي لاتقع على مستقيم واحد وتكون غير متتابعة، سنعرف الجمع بدلالة قياس قطع المستقيمات، وبدلالة صفوف التكافؤ.
نعرف من بديهية انشاء قطعة، اذا كانت A-B وC-D اي قطعتين، فانه توجد نقاط X,Y,Z بحيث ان X-Y-Z و $A-B \cong X-Y$ و $Y-Z \cong C-D$. علاوة على ذلك، يستنتج من

بديهية جمع القطع ان كل تلك القطع X-Z تكون متطابقة. من هذا ومن خواص علاقة التكافؤ ≅ يستنتج ان صف التكافؤ m(X-Z) لايعتمد على اختيار X,Y,Z ويعتمد على m(A-B) و m(C-D) بدلا من القطع A-B و C-D. نقدم فيما يلي التعريف التالي مع التأكيد على أن له معنى.

تعريف ٣٨

m(A-B) + m(C-D) يعني m(X-Z) ، حيث ان X-Z هي قطعة مستقيم بحيث انه توجد نقطة Y، X-Y-Z وان A-B ≅ X-Y و Y-Z ≅ C-D.

نعرف من المبرهنين ٥٣ و ٥٤، اذا كانت A-B < C-D ، فان اي قطعة في m(A-B) تكون اصغر من اية قطعة في m(C-D). لذا سنذكر التعريف التالي:

تعريف ٣٩

m(A-B) < m(C-D) يعني ان اي قطعة تطابق A-B تكون اصغر من اي قطعة تطابق C-D.

من هذه التعاريف، سنذكر ونبرهن المبرهنات التالية:

مبرهنة ٩٤

اذا كان m(C-D) < m(E-F) ،

فان m(A-B) + m(C-D) < m(A-B) + m(E-F)

البرهان:

m(A-B) + m(C-D) يعني m(X-Z) ، حيث ان X-Z هي

قطعة مستقيم بحيث انه توجد نقطة Y و $X-Y-Z$ و $A-B \doteq X-Y$ و $C-D \doteq Y-Z$.

$m(A-B) + m(E-F)$ يعني $m(X-W)$ ، حيث ان $X-W$ هي قطعة مستقيم بحيث ان توجد نقطة V و $X-V-W$ و $A-B \doteq X-V$ و $E-F \doteq V-W$.

من بديهية انشاء قطعة، يكون $V = Y$ ، لذلك $A-B \doteq X-Y$ و $E-F \doteq Y-W$.

لبيان ان $m(A-B) + m(C-D) < m(A-B) + m(E-F)$

يجب ان نبين $m(X-Z) < m(X-W)$

لكن $m(X-Z) < m(X-W)$ اذا وفقط اذا وفقط اذا توجد نقطة M بحيث ان $X-M-W$ و $X-M \cong X-Z$.

من الفرض $m(C-D) < m(E-F)$ ، وبما ان $C-D \cong Y-Z$ و $E-F \doteq Y-W$ ، فان $Y-Z < Y-W$ ، ولذلك توجد نقطة M بحيث ان $Y-M-W$ و $Y-M \doteq Y-Z$. ومن بديهية انشاء قطعة، $Z = M$. لذا، من التعويض يكون $Y-Z-M$.

اذا كانت الحالة $Y-Z-W$ وبما ان $X-Y-Z$ ، فانه من مبرهنة ٤ يكون $X-Z-W$. لذلك من التعريف، يكون $X-Z < X-W$ ، $m(X-Z) < m(X-W)$ ، و

$m(A-B) + m(C-D) < m(A-B) + m(E-F)$

يستنتج حالا بطريقة مشابهة:

مبرهنة ٩٥

اذا كان $m(C-D) < m(E-F)$ ،

فان $m(C-D) + m(A-B) < m(E-F) + m(A-B)$.

مبرهنة ٩٦

اذا كان $m(A-B) < m(C-D)$ ،

و $m(E-F) < m(G-H)$ ، فان

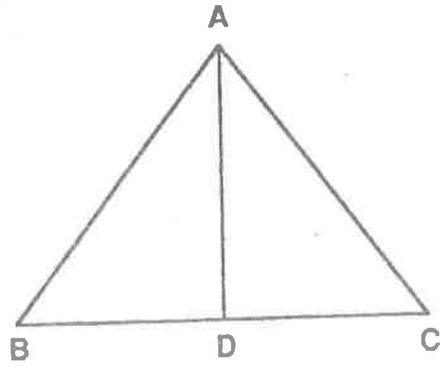
$$m(A-B) + m(E-F) + < m(C-D) + m(G-H)$$

البرهان :

من مبرهنة ٩٥، اذا كان $m(A-B) < m(C-D)$
فأن $m(A-B) + m(E-F) < m(C-D) + m(E-F)$
من مبرهنة ٩٤، اذا كان $m(E-F) < m(G-H)$ فأنه
يستنتج $m(C-D) + m(E-F) < m(C-D) + m(G-H)$.
لذلك، من التعويض ومن الخاصية المتعدية يكون
$m(A-B) + m(E-F) < m(C-D) + m(G-H)$.
نبرهن الان مبرهنة ٢٠ لاقليدس.

مبرهنة ٩٧

في اي مثلث، يكون اي ضلعين معا اكبر من الضلع الثالث.



شكل ٧٤

البرهان :

ليكن ABC مثلثا، يجب ان نبرهن:

$$m(B-C) < m(A-B) + m(A-C)$$
$$m(A-C) < m(A-B) + m(B-C)$$

$$m(A-B) < m(B-C) + m(A-C)$$

سنبرهن الحالة الاولى، وبنفس الطريقة نبرهن البقية.

ليكن $\overrightarrow{AD}$ منصف $\angle BAC$ ، يقطع B-C في نقطة D، اي ان B-D-C. لذلك تكون $\angle ADB$ زاوية خارجية للمثلث ADC.

لذا، من مبرهنة ٧٥، $\angle DAC < \angle ADB$.

لكن $\angle DAC \cong \angle BAD$.

لذلك، من مبرهنة ٦٣، $\angle BAD < \angle ADB$.

ومن مبرهنة ٧٨، B-D < A-B.

وبنفس الطريقة نستطيع ان نبين ان C-D < A-C.

لذلك، من مبرهنة ٩٦ وتعاريف عن القياس يستنتج ان:

$$m(B-D) + m(C-D) < m(A-B) + m(A-C)$$

او

$$m(B-C) < m(A-B) < m(A-C)$$

٧-٣ جمع الزوايا

سنعطي فيما يلي تعريف قياس زاوية.

تعريف ٤٠.

قياس زاوية $\angle AOB$ هو مجموعة كل الزوايا التي تطابق $\angle AOB$.

رمز

قياس زاوية $\angle AOB$ يرمز له:

$$m(\angle AOB)$$

كما في حالة القطع، يستنتج ان قياس زاوية هو علاقة تكافؤ.

من اجل ان تكون التعاريف والمبرهنات التي تليها لها معنى يكون من الضروري ان نعرف ماذا يعني وجود جمع.

تعريف ٤١

$m(\angle AOB) + m(\angle CO'D)$ (اذا وجد)، يعني $m(\angle EO''F)$ ، حيث ان $\angle EO''F$ هي زاوية بحيث ان توجد نقطة G في داخل $\angle EO''F$ وان $\angle AOB \cong \angle EO''G$ و $\angle CO'D \cong \angle GO''F$.

تعريف ٤٢

الجمع المعرف في تعريف ٤١، يقال انه موجود اذا وفقط اذا توجد زاويتان متجاورتان $\angle EO''G$ و $\angle GO''F$ وتتحقق الخاصية التالية:
اذا كانت $\overrightarrow{O''G}$ هو الضلع المشترك للزاويتين المتجاورتين، فان $\overrightarrow{O''G}$ و $\overrightarrow{O''F}$ هما في نفس الجهة (نصف مستوي) من المستقيم $O''E$ ، و $\overrightarrow{O''G}$ و $\overrightarrow{O''E}$ هما في نفس الجهة من المستقيم $O''F$.

تعريف ٤٣

$m(\angle AOB) < m(\angle CO'D)$ يعني ان اي زاوية تطابق $\angle AOB$ تكون اصغر من اي زاوية تطابق $\angle CO'D$.

ان المبرهنات ٦٠، ٦٣، ٦٤ تؤدي الى ان هذه التعاريف لها معنى. باستعمال التعاريف، نستطيع ان نبرهن المبرهنات التالية بطرق مشابهة لبراهين المبرهنات ٩٤، ٩٥، ٩٦، على التوالي.

مبرهنة ٩٨

اذا كان $m(\angle DEF) < m(\angle GHI)$ ،
فان اذا كان الجمع موجود،
$$m(\angle ABC) + m(\angle DEF) < m(\angle ABC) + m(\angle GHI)$$

البرهان

يترك كتمرين.

مبرهنة ٩٩

اذا كان $m(\angle DEF) < m(\angle GHI)$ ،
فاذا كان الجمع موجود،
$$m(\angle DEF) + m(\angle ABC) < m(\angle GHI) + m(\angle ABC)$$

البرهان:

يترك كتمرين.

مبرهنة ١٠٠

اذا كان $m(\angle ABC) < m(\angle DEF)$
و $m(\angle GHI) < m(\angle JKL)$ ، فان اذا كان الجمع موجود،
$$m(\angle ABC) + m(\angle GHI) < m(\angle DEF) + m(\angle JKL)$$

البرهان

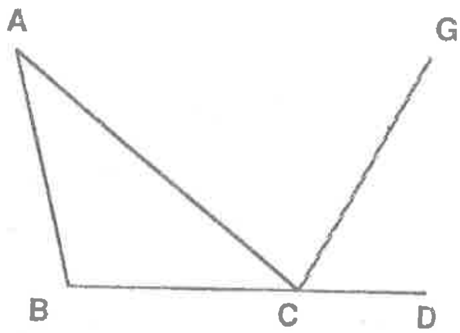
يترك كتمرين.

قاعدة لغوية

اذا كان الجمع لزاويتين موجود، فان الزاويتين يقال انهما يؤخذان معا اصغر من زاويتين قائمتين.

مبرهنة ١.١

في اي مثلث اي زاويتين تؤخذان معا تكونان اصغر من زاويتين قائمتين.



شكل ٧٥

البرهان:

ليكن ABC مثلثا، وفيه B-C-D.فان $\angle ACD$ هي زاوية خارجية للمثلث، وبذلك يكون $\angle ACD > \angle ABC$.
فان $\angle ABC$ و $\angle BCA$ تؤخذان معا تكونان اصغر من زاويتين قائمتين، بما ان $\angle ACD > \angle ABC$ ، يؤدي الى وجود نقطة G في داخل $\angle ACD$ بحيث ان $\angle ABC \doteq \angle ACG$.
في هذه الحالة ان $\angle BCA$ و $\angle ACG$ تحقق الشروط في تعريف ٤٢.
لذا، فان عندما تذكر بلغة التعريفين ٤١ و ٤٢، والقاعدة اللغوية التي تتبعهما، نحصل على النتيجة.
وبنفس الطريقة تتبع لاي زاويتين.

الجزء الثالث

الهندسة اللاقليدية

تبدأ دراسة هذا الجزء من الفصل الثامن وتنتهي بالفصل العاشر. سنقدم في الفصل الثامن البديهية الخامسة (بديهية التوازي) لاقليدس التي كانت السبب في اكتشاف الهندسة اللاقليدية، سنقدم بعض مكافئاتها ومحاولات برهنتها.

من الحقيقة بان بديهية التوازي مستقلة ينشأ السؤال: (اي نوع من الهندسة سنحصل لو حلت محل بديهية التوازي بديهية مختلفة؟) هل هندسة الفضاء الفيزيائي توصف بصورة احسن بالهندسة الاقليدية، او هندسة لاأقليدية اخرى منطقية والتي تطبق بصورة ادق الفضاء الفيزيائي؟

كمثال، بمعرفة ان الارض ليست مستوية، بل الاحرى كروية، نرى ان الخط يكون مثل دائرة كبيرة على سطح كرة. فان اي خطين، اي انه، دائرتين عظميين على سطح كرة. ستتقاطع في نقطتين، لذلك بديهية التوازي سوف لاتتحقق.

لقد ادرك بعد قرون من العمل على بديهية التوازي، ان الهندسة التي تناقض بديهية التوازي الاقليدية تكون اكثر مناسبة لوصف

خواص الفضاء الفيزيائي. الهندسة التي ترفض بديهية التوازي الاقليدية عادة تعتبر كهندسة لااقليدية.

نذكر نوعين مختلفين لهندسات لااقليدية، هندسة هذلولية التي سنقدمها في الفصل التاسع والتي تحقق بديهيات المستوي الاقليدي عدا بديهية التوازي التي تحل محلها: (من نقطة لاتقع على مستقيم معلوم، يوجد اكثر من موازي واحد للمستقيم).

والنوع الاخر هو الهندسة الاهليليجية التي سنقدمها في الفصل العاشر والتي تحل محل بديهية التوازي بديهية ريمان: اي مستقيمين يتقاطعان (اي انه لاتوجد خطوط متوازية).

الفصل الثامن

البديهية الخامسة لاقليدس

ان البديهية الخامسة لاقليدس كانت هدفا لنقد علماء الرياضيات. فقد برهن اقليدس مبرهناته الثمان والعشرين بدون ان يستخدم البديهية الخامسة وقد استند اليها لاول مرة في برهان مبرهنة ٢٩، مما اثار انتباه العلماء، حيث اعتقد بعض منهم بانها مبرهنة وبهذا يجب ان تبرهن. لقد حاول بعض العلماء برهنة هذه البديهية لفترة تزيد عن الفي سنة، ولكن هذه المحاولات كانت فاشلة لان البراهين كانت تعتمد على عبارات تكافيء البديهية الخامسة.

البديهية الخامسة (بديهية التوازي)

اذا قطع مستقيمان بمستقيم ثالث وكان مجموع الزاويتين الداخلتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع اقل من قائمتين، فان المستقيمين يتلاقيان في تلك الجهة من القاطع اذا مدا بغير حد.

٨-١ بعض مكافئات البديهية الخامسة

سنذكر فيما يلي بعض مكافئات البديهية الخامسة:

١- بديهية بليفير: من نقطة لاتقع على مستقيم معلوم يمكن رسم موازي واحد فقط للمستقيم المعلوم.

٢- اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين، فان الزاويتين الداخلتين المتبادلتين متساويتان والزاوية الخارجية تساوي الزاوية الداخلية

المقابلـــة لها، ومجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتيـــن في نفس الجهة من القاطع يساوي زاويتين قائمتين. (مبرهنة ٢٩).

٣ـ مجموع زوايا المثلث يساوي زاويتين قائمتين.
٤ـ الزاوية الخارجية في المثلث تساوي مجموع الزاويتين الداخليتين المقابلتين لها.
٥ـ يوجد زوج من المثلثات المتشابهة.
٦ـ اذا قطع مستقيم احد مستقيمين متوازيين، فانه يقطع الاخر.
٧ـ المسافة العمودية بين مستقيمين متوازيتين تكون ثابتة.
٨ـ يوجد زوج من المستقيمات التي تكون المسافة بينهما ثابتة.
٩ـ اذا كان مجموع زوايا اي مثلث مقدارا ثابتا، فان هذا المجموع يساوي زاويتين قائمتين.
١٠ـ اذا كانت ثلاث زوايا من شكل رباعي قوائم فالزاوية الرابعة تكون قائمة ايضا.
١١ـ المستقيمان الموازيان لمستقيم معلوم يكونان متوازيين.
١٢ـ لاي ثلاث نقاط لاتقع على مستقيم واحد، توجد دائرة تمر من هذه النقاط.

والآن سنبين تكافؤ بديهية بليفير مع البديهية الخامسة. نفرض اولا بديهية بليفير صحيحة، يجب ان نبرهن البديهية الخامسة صحيحة.

البرهان :

ليكن AB ,CD مستقيمين وقد قطعهما القاطع ST بطريقة بحيث ان مجموع الزاويتين BST و DTS اصغر من زاويتين قائمتين.

زاويتين قائمتين".

هذه هي نتيجة لبديهية بليفير، ومن ثم للبديهية الخامسة كما هو معروف. لاجل ان تستنتج بديهية بليفير من هذه الفرضية، نحتاج لمبرهنتين تمهيديتين اللتين هما نتيجة للفرضية.

مبرهنة تمهيدية ١

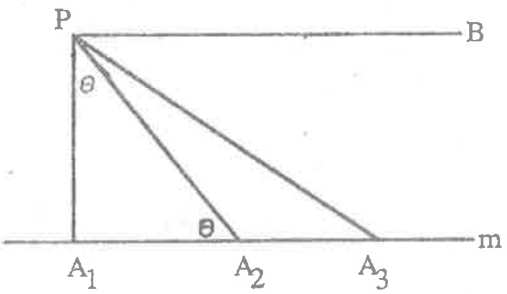
زاوية خارجية لمثلث تساوي مجموع الزاويتين الداخليتين المقابلتين لها.

يترك البرهان للطالب كتمرين.

مبرهنة تمهيدية ٢

من نقطة معلومة P، يمكن رسم مستقيم يصنع مع مستقيم معلوم m زاوية اصغر من اي زاوية معلومة α.

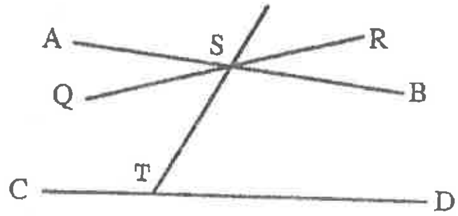
البرهان:



شكل (٧٨)

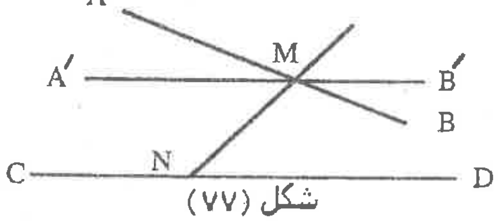
من P نرسم PA_1 عموديا على m. نقيس A_1A_2 بقدر PA_1 في اي جهة على m ثم نرسم PA_2. لتكن θ الزاويتين المتساويتين A_1PA_2 و A_1A_2P. فان

$$\theta = \frac{\pi}{2^2}$$



شكل (٧٦)

ليكن QSR خطا يمر من النقطة S بحيث ان مجموع الزاويتين RST و DTS يساوي زاويتين قائمتين.
من مبرهنة ٢٨، هذان المستقيمان QSR و CD متوازيان.
بما ان المستقيمين QSR و ASB مختلفان، ومن بديهية بليفير، يوجد موازي واحد فقط للمستقيم CD من S، فان AB يقطع CD. يتقاطع هذان المستقيمان في جهة B و D، حيث اذا تقاطعا في الجهة المقابلة، سيتكون مثلث مجموع زواياه اكبر من زاويتين قائمتين وهذا يناقض مبرهنة ٣٢.
من اجل اثبات العكس، اي برهنة بديهية بليفير من البديهية الخامسة، نفترض ان AB و A'B' موازيان لمستقيم CD من نقطة M (لاحظ الشكل). اي مستقيم MN يمر من M ويقطع CD يصنع زاويتين مجموعهما قائمتين، لذلك يكون كل من $\angle MNC + \angle AMN$، $\angle A'MN + \angle MNC$ قائمتين، وهذا تناقض فيجب ان ينطبق المستقيم AB على المستقيم A'B' وهذا هو المطلوب.



شكل (٧٧)

عبارة اخرى مكافئة للبديهية الخامسة:
هي العبارة: "مجموع زوايا مثلث تساوي دائما

حيث π ترمز لزاويتين قائمتين. تكرار هذا البناء يقودنا الى مثلث $PA_{n-1}A_n$ الذي فيه:

$$\angle A_n PA_{n-1} = \angle A_{n-1} A_n P = \frac{\pi}{2^n}$$

حيث ان n هو اي عدد صحيح اكبر من ١.
من بديهية ارخميدس، يوجد عدد K بحيث ان

$$K \alpha > \pi$$

فان، اذا اختير n عددا صحيحا موجبا اكبر من 1، بحيث ان

$$2^n > K$$

ومنه نستنتج

$$\frac{\pi}{2^n} < \alpha$$

وبهذا تبرهن المبرهنة التمهيدية.
والآن نـ... بديهية بليفير من العبارة: مجموع زوايا المثلث تساوي زاويتين قائمتين.

البرهان:

لتكن P نقطة لاتقع على مستقيم معلوم m. نرسم PA_1 عموديا على m ومن P نرسم PB عموديا على PA_1. من مبرهنة ٢٨، PB يكون موازيا الى m.
نأخذ اي مستقيم من P ويقطع m في نقطة A_3.
بما ان

$$\angle PA_3A_1 + \angle A_1PA_3 = \angle BPA_3 + \angle A_1PA_3 = \frac{\pi}{2}$$

نستنتج ان

$$\angle BPA_3 = \angle PA_3A_1$$

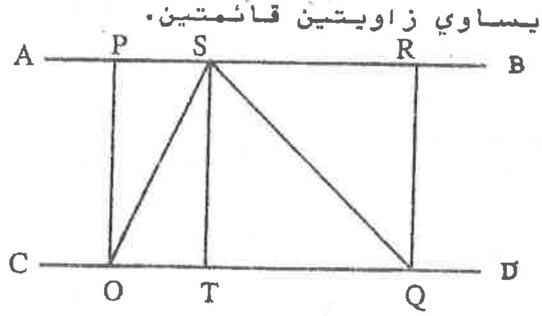
فان PB هو المستقيم الوحيد من P الذي لايقطع m، حيث مهما يكن صغر الزاوية التي يصنعها الخط الذي يمر من P مع PB، فانه توجد، من المبرهنة التمهيدية ٢، خطوط اخرى من P تصنع زوايا اصغر مع PB وتقطع m، لذا فان الخط الاول يجب ان يقطع m ايضا من بديهية باخ.

عبارة اخرى مكافئة للبديهية الخامسة

((يوجد زوج من المستقيمات التي تكون المسافة بينهما ثابتة)).

اولا، اذا فرضنا البديهية الخامسة، فان هذه العبارة تستنتج، حيث كل المستقيمات المتوازية تكون المسافة بينهما في اي مكان متساوية.

لنبرهن العكس، اي يجب ان نبرهن البديهية الخامسة. يجب ان نبرهن اولا على انه يوجد مثلث مجموع زواياه يساوي زاويتين قائمتين.



شكل (٧٩)

ليكن AB و CD مستقيمين تكون المسافة بينهما في اي مكان متساوية. من اي نقطتين O و Q على CD، نرسم OP و QR عمودين على AB، ومن اي نقطة S على AB نرسم ST عموديا على CD. بالفرض OP, QR, ST متساوية. بما ان المثلثين القائمين OPS و OTS

متطابقين،

$$\angle PSO = \angle TOS$$

وبالمثل

$$\angle RSQ = \angle TQS$$

يستنتج ان مجموع زوايا المثلث OSQ يساوي زاويتين قائمتين.

٨-٢ محاولات لبرهنة البديهية الخامسة او احدى مكافئاتها

لقد جرت محاولات لبرهنة البديهية الخامسة، غير ان هذه المحاولات قد باءت بالفشل لانها كانت تعتمد على مكافئاتها.

وفيما يلي سنذكر بعضا من هذه المحاولات:

محاولة بطليموس

لقد برهن بطليموس مبرهنة ٢٩ بدون استخدام البديهية الخامسة.

مبرهنة ٢٩

اذا قطع مستقيمان متوازيان بقاطع، فان الزاويتين الداخليتين المتبادلتين متساويتان والزاوية الخارجية تساوي الزاوية الداخلية المقابلة لها وكذلك مجموع الزاويتين الداخليتين على جهة واحدة من القاطع يساوي قائمتين.

البرهان :

ناخذ مستقيمين متوازيتين وقاطع. ان امتداد المتوازيين في جهة واحدة من القاطع لايختلف عن امتدادهما في الجهة الاخرى من القاطع. فاذا كان مجموع الزاويتين الداخليتين في جهة واحدة اكبر من زاويتين قائمتين، فانه يكون ايضا مجموع الزاويتين في الجهة الاخرى اكبر من قائمتين لكن هذا غير ممكن، لان مجموع الزوايا الاربع يساوي اربع زوايا قوائم. وبنفس الطريقة لايمكن ان يكون مجموع الزاويتين الداخليتين على جهة واحدة من القاطع اصغر من قائمتين. ولذا يجب ان يكون المجموع قائمتين.

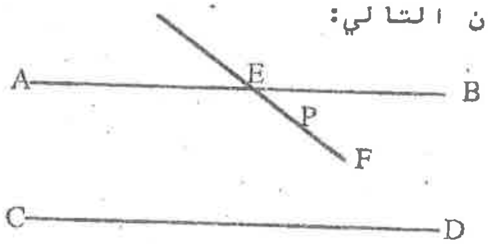
ان هذا البرهان قد استند على بديهية بليفير (يمكن رسم موازي واحد فقط لمستقيم معلوم من نقطة خارجية عنه) بسبب بناؤه على التناظر بين الامتدادين الى الجهتين.

محاولة بروكلس

لقد اشار بروكلس في برهانه خطأ بطليموس باستناده على بديهية بليفير المكافئة للبديهية الخامسة.

حاول بروكلس ان يبرهن ان الخط المستقيم الذي يقطع احد مستقيمين متوازيين، فانه يقطع الاخر.

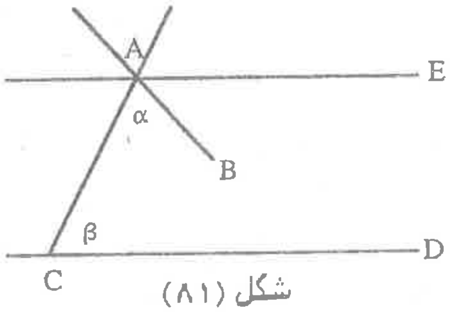
لكن هذه العبارة تكافىء البديهية الخامسة. لقد اعطى البرهان التالي:



شكل (٨٠)

ليكن AB و CD مستقيمين متوازيين و EF مستقيما يقطع AB في E. نفرض ان P نقطة تتحرك على المستقيم EF في اتجاه F. فان طول العمود من P على AB سوف يصبح اكبر من اي طول محدود ولذلك تكون اكبر من المسافة العمودية بين المستقيمين المتوازيين، ولذلك فان EF يجب ان يقطع CD.

يقع الخطأ في هذا البرهان هو ان المسافة العمودية، بين مستقيمين متوازيين تبقى ثابتة مهما امتدا وكذلك مد المستقيم بدون تحديد. لقد اعتمد بروكلس على هذه النتيجة في برهنة البديهية الخامسة كمايلي:



شكل (٨١)

ليكن AB و CD مستقيمين وقد قطعهما القاطع AC وكانت الزاويتان الداخليتان $\alpha + B$ اقل من قائمتين.

نرسم AE بحيث ان

$$\angle CAE + \angle \beta = \pi$$

من مبرهنة ٢٨، يكون $CD \parallel AE$.

لكن $\angle \alpha + \angle \beta$ اقل من قائمتين (من الفرض)

وبذلك تكون $\angle CAE$ اكبر من $\angle \alpha$.

اي ان AE لاينطبق على AB.

لذا فان AB يقطع احد المتوازيين AE ، فيجب ان يقطع الموازي الاخر CD ، وبذلك يتلاقى AB و CD.

ان هذا البرهان قد استند على ان "المسافة بين المستقيمين المتوازيين ثابتة" وهي مكافئة للبديهية

الخامسة.

لقد صاغ بروكلس برهانه في شرحه المذكور بعد ان بين النقص في برهان بطليموس، ولكن محاولة بروكلس هذه لم تكن الاخيرة من نوعها، فقد ادرك الرياضياتون اللاحقون من العرب من العيوب في برهان بروكلس مثل ما ادركه هو في براهين السابقين.

وكان لابد ان يحاولوا من جديد ماحاوله هو من قبل واستمرت المحاولات على هذا المنوال في العالم القديم. ثم انتقلت العدوى الى العالم الاسلامي بعد ترجمة كتاب الاصول الى العربية في نهاية القرن الثاني الهجري، وقد ساهم في هذه المحاولات العلماء الحسن بن الهيثم وعمر الخيام واثير الدين الابهري.

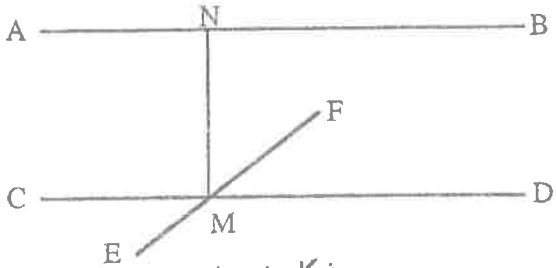
محاولة الحسن ابن الهيثم البصري

يتناول ابن الهيثم هذه البديهية من ناحية اخرى، ويبرز فيها مفاهيم جديدة تتناول الحركة والحس والتمييز ويرى استبدال منطوقها الى منطوق آخر هو: "كل مستقيمين متقاطعين لايوازيان خطا واحدا" وتفسير ابن الهيثم يذكر في اقامة عمود على النقطة M التي هي نقطة تقاطع المستقيمين CD و EF، والمستقيم NM عمود على CD من نقطة N على المستقيم AB الذي يوازي CD. ويثبت فيها ان:

$$\angle NMF < \angle NMD$$

وبما ان $\angle BNM = \angle NMD =$ قائمة

والمستقيمان AB و CD متوازيان، ثم ان EF و CD متقاطعان، فعلى ذلك فالمستقيمان AB و EF متقاطعان.



شكل (٨٢)

ويقول: اذا كان احد الخطين المتقاطعين موازيا للخط الواحد اي CD و AB، فهو محاط مع العمود الخارج من نقطة التقاطع القائم على الخط AB بزاويتين قائمتين.

فيكون الخط الاخير EF يحيط مع العمود بزاويتين اقل من قائمتين، فهما يلتقيان، حيث يفسر ابن الهيثم ذلك بان الخطين المتوازيين AB و CD يكون البعد بينهما دائما متساويا، فتساوي البعد بين الخطين المتوازيين يشهدها الحس. واذا فرض ان الخطين لايلتقيان، فالحس يشهد ان الابعاد التي بينهما متساوية ، وكذلك ان الخطوط التي ابعاد ما بينها متساوية لاتلتقي.

واذا كانت الابعاد التي بين احد الخطين المتقاطعين وبين الخط المعلوم متساوية، فان الابعاد التي بين الخط الآخر والخط المعلوم يشهد الحس والتمييز بانها مختلفة لان هذا الخط الآخر يكون فيما بين الخطين المتوازيين وتكون الاعمدة منه على الخط AB مختلفة، اي ان الخط NM اذا تحرك باتجاه A, C فان طوله يكبر كلما مد على استقامته، اي حركته الى اليسار تسبب زيادة في طوله، وحركته الى اليمين تسبب قصر طوله والطول هنا ما بين AB و EF ولهذا السبب، فان الخطين المتقاطعين لايوازيان خطا واحدا.

ان تفكير ابن الهيثم هذا لم يعجب عمر ابن الخيام فتناوله بالنقد في مخطوطه ((مصادرات

اقليدس)) حيث يقول ان ابن الهيثم قد غير حدود المتوازيات وفعل اشياء خارجة عن نفس الصناعة منها انه قال اذا تحرك مستقيم قائم على مستقيم آخر، ويكون قيامه محفوظا على ذلك الخط في حركته، فانه يفعل بطرفه الاخر خطا مستقيما، فان الخط الحادث مواز للخط الساكن، وهذا كلام لانسبة له الى الهندسة اصلا من وجوه، منها انه كيف يتحرك الخط على الخطين مع انحفاظ القيام، واي برهان على ان هذا يمكن، ومنها انه اية نسبة بين الهندسة والحركة، وما معنى الحركة؟

شكل (٨٣)

محاولة عمر الخيام (١٠٤٤م-١١٢٣م)

لقد حاول الخيام اثبات: "اذا احتوى شكل رباعي على ثلاث زوايا قوائم، فان الزاوية الرابعة تكون قائمة ايضا" (وهي احدى مكافئات البديهية الخامسة).

فرض ان AB قطعة مستقيم وان AC و BD عمودان على AB بحيث ان AC = BD ووصل CD. فيتكون شكل رباعي فيه $\angle A$ و $\angle B$ زاويتين متجاورتين وقائمتين وضلعين متساويين، لقد سمى الضلع الذي يصل الزاويتين القائمين بالقاعدة، والضلع الذي يقابل القاعدة بالسمت (Summit). يدعى هذا الشكل رباعي الخيام ولو ان (الغربيين اطلقوا عليه اسم ساكيري باسم الرياضي الايطالي ساكيري، غير ان الخيام احق بهذه التسمية لانه سبق ساكيري بما يزيد عن ٦٠٠ سنة.

في المثلثين ABC و ADB ، وفيهما:

AC = BD ، AB مشترك، و $\angle A = \angle B$ (زاوية قائمة)، فان المثلثين يتطابقان لتساوي ضلعين وزاوية محددة بهما من مثلث مع ضلعين وزاوية محددة

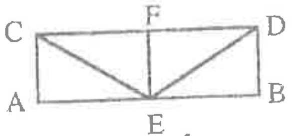
بهما من آخر على التناظر.

وبذلك، فان AD = BC

ثم نطبق المثلثين ACD و BDC ، حيث ان AC = BD و CD = CD (مشترك)، AD = BC. لذا فان المثلثين يتطابقان لتساوي ثلاثة اضلاع من مثلث ثلاثة اضلاع من مثلث آخر على التناظر.

ومن التطابق ينتج ان $\angle ACD = \angle BDC$

ثم برهن الخيام ان "المستقيم الواصل بين منتصفي القاعدة والسمت يكون عموديا على السمت والقاعدة" كما يلي:



شكل (٨٤)

لتكن E منتصف القاعدة،

لتكن F منتصف السمت

نصل ED, EC, FE

في المثلثين القائمي الزاوية BDE و ACE

$\angle A = \angle B$ ، AE = BE (بالتنصيف)، وبما ان AC = BD ، فان المثلثين يتطابقان (تساوي ضلعان وزاوية محددة بهما من مثلث ضلعين وزاوية محددة بهما من مثلث آخر على التناظر).

ومن التطابق، ينتج ان $\angle BED = \angle AEC$ و CE = DE.

ثم نطبق المثلثين CFE و DFE ، حيث فيهما:

FE = FE (مشترك)، CF = FD (بالتنصيف)، و CE = DE ، فان المثلثين يتطابقان (ثلاثة اضلاع من مثلث تساوي ثلاثة اضلاع من مثلث آخر، على التناظر).

. ومن التطابق ينتج $\angle DEF = \angle CFE$ وبما ان مجموعهما يساوي زاوية مستقيمة، فتكون كل منهما زاوية قائمة.

لذلك، فان EF عمودي على CD.

وكذلك من هذا التطابق، ينتج ان $\angle CEF = \angle DEF$ ، وبما ان $\angle AEC = \angle BED$. (من تطابق المثلثين ACE و BDE)، ومن الجمع ينتج $\angle AEF = \angle BEF$ وبما ان

مجموعهما زاوية مستقيمة، لذا فان كلا منهما زاوية قائمة، اي ان FE عمودي على AB. وبذلك تكون ∠ EFD و ∠ FEB قائمتين، ومن مبرهنة ٢٨، CD يوازي AB.

في الشكل الرباعي BEFD: ∠ EBD = ∠ FEB (قوائم) و BD = EF (المسافة العمودية بين مستقيمين متوازيين ثابتة). لذا فان ∠ BDF = ∠ EFD (زاويتا السمت متساويتان).

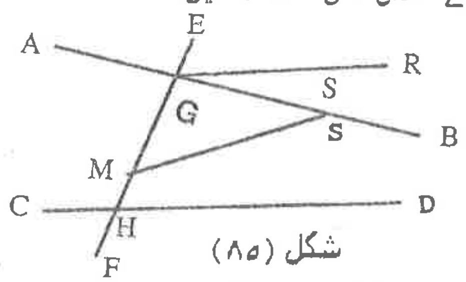
اي ان ∠ BDF زاوية قائمة، حيث في الشكل الرباعي BEFD ثلاث زوايا قوائم، فان الزاوية الرابعة قائمة ايضا.

الخطأ في هذا البرهان هو اعتماده على العبارة التالية (المسافة العمودية بين مستقيمين متوازيين ثابتة) وهي احدى مكافئات البديهية الخامسة.

محاولة والاس

لقد فرض جون والاس (١٦١٦م ـ١٧٠٦م) بالامكان رسم مثلث مهما يكن قياسه يشابه مثلثا معلوما، ثم برهن البديهية الخامسة كما يلي:

ليكن AB و CD مستقيمين. وقد قطعا بالقاطع EF في النقطتين H, G على التوالي، بحيث ان ∠ BGH + ∠ GHD اقل من قائمتين.



شكل (٨٥)

يجب ان نبرهن ان AB يقطع CD.

∠ BGH + ∠ EGB = قائمتين (لان EF خط مستقيم)،

$\angle BGH$ و $\angle GHD$ اصغر من قائمتين (بالفرض)
لذا $\angle BGH + \angle EGB > \angle BGH + \angle GHD$
وبطرح $\angle BGH$ من طرفي المتباينة ينتج:
$\angle EGB > \angle GHD$

وقد فرض والاس أن قطعة المستقيم HG تتحرك على القاطع EF بحيث ان قطعة المستقيم HG مشبثة بها حتى تنطبق H على موقع G الاول، حينئذ يأخذ HD الوضع GR الواقع فوق AB (لان $\angle EGB > \angle GHD$). في هذه الحركة يجب ان يقطع HD المستقيم GB في وضع مثل MS. والان نرسم مثلثا على الضلع GH بحيث يشابه المثلث GMS. في هذه الحالة ينطبق الضلعان الاخران لهذا المثلث على HD ، GB ،

اي ان المستقيمين AB و CD يتقاطعان.

ان الخلل في هذا البرهان هو انشاء مثلث يشابه مثلثا آخر، ولكن هذه العملية هي من مكافئات البديهية الخامسة.

محاولة ساكيري Sacceri (١٦٦٧م-١٧٣٣)

لقد كان جيرو لامو ساكيري مدرسا للقواعد والفلسفة في مدينة ميلانو وقد ولع بكتاب الاصول لاقليدس فقد حاول برهان بديهية اقليدس الخامسة باثبات مجموع زوايا المثلث يساوي زاويتين قائمتين، وذلك ببرهنة ان مجموع زوايا السمت لرباعي الخيام يساوي قائمتين. لقد كان برهانه طويلا ومعقدا وغير واضحا وقد اعطى بعض الحقائق الصحيحة منها.

١- اذا كان مجموع زاويتي السمت في شكل رباعي خيام واحد قائمتين، فان اي شكل رباعي آخر مثل هذا يكون مجموع زاويتي السمت له قائمتين ايضا.

٢ـ اذا كان مجموع زاويتي السمت لرباعي الخيام اقل او اكثر من قائمتين او يساوي قائمتين، فان مجموع زوايا المثلث يكون اقل او اكثر او يساوي لزاويتين قائمتين.

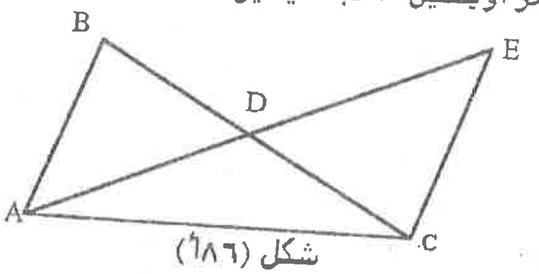
٣ـ اذا وجد مثلث واحد مجموع زواياه يساوي قائمتين او اقل او اكثر من قائمتين، فان مجموع زاويتي السمت في رباعي الخيام يساوي قائمتين او اقل او اكثر من قائمتين، على التوالي.

٤ـ كل مستقيمين في المستوي اما ان يكون لهما عمود مشترك او يتقاطعان (اذا مدا) او يتقاربان باستمرار.

محاولة ليجندر Legendre (١٧٥٢م-١٨٣٣م)

لقد حاول ليجندر اثبات بديهية اقليدس الخامسة وذلك بان برهن مكافئتها:
((مجموع زوايا المثلث يساوي قائمتين)) فقد افترض العكس. فهناك احتمالين:

(ا) اذا كان مجموع زوايا المثلث اكثر من قائمتين. فقد فرض ان مجموع زوايا مثلث ABC هو $180 + \alpha^{\circ}$ حيث α موجبة وان الزواية CAB ليست اكبر من اي من الزاويتين الباقيتين للمثلث.



شكل (٦٨٦)

ننصف الضلع BC بالنقطة D ونصل A و D ونمده الى E بحيث ان AD = DE ، نرسم CE. يتطابق المثلثان

BDA و CDE. يستنتج ببساطة ان مجموع زوايا المثلث AEC

يساوي مجموع زوايا المثلث ABC ، اي $180° + \alpha$ ،
وان احدى الزاويتين CAE و CEA تساوي او اصغر من

$$\frac{1}{2}\angle CAB \cdot$$

بتطبيق نفس الطريقة على المثلث AEC ، نحصل على مثلث ثالث مجموع زواياه يساوي $180° + \alpha$ واحدى زواياه تساوي او اصغر من $\frac{1}{2^2}\angle CAB$. وهكذا

عندما تكرر هذه العملية n من المرات، نحصل على مثلث مجموع زواياه يساوي $180° + \alpha$ واحدى زواياه

تساوي او اصغر من $\frac{1}{2^n}\angle CAB \cdot$

من بديهية ارخميدس، يوجد n بحيث ان

$$\frac{1}{2^n}\angle CAB < \alpha$$

ومجموع زاويتين من المثلث الأخير الذي نحصل عليه اكبر من زاويتين قائمتين، وهذا يخالف مبرهنة ١٧ لاقليدس:

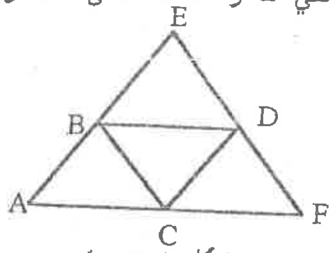
((مجموع اي زاويتين في مثلث اقل من قائمتين)).

الخلل في هذا البرهان هو مد المستقيم الى مالا نهاية وهذا غير صحيح.

(٢) اذا كان مجموع زوايا المثلث اقل من قائمتين.

ليكن ABC مثلثا مجموع زواياه يساوي $180° - \alpha$ (حيث α موجب) وان الزاوية BAC لاتكون اكبر من

اي من الزاويتين الباقيتين للمثلث. ننشيء المثلث BCD على الضلع BC
يطابق المثلث ABC ، و $\angle BCA = \angle DBC$
و $\angle CBA = \angle DCB$. ثم نرسم من D مستقيما يقطع امتداد AB و AC في E و F ، على التوالي.



شكل (٨٦ب)

مجموع زوايا المثلث BCD يساوي كذلك $180° - \alpha$ كما برهنا في اعلاه، بما ان مجموع زوايا المثلث لايمكن ان يكون اكبر من زاويتين قائمتين، فان مجموع زوايا المثلث BDE وكذلك المثلث CDF لايمكن ان يكون اكبر من $180°$. فأن مجموع كل زوايا المثلثات الاربعة لايمكن ان يكون اكبر من $720°-2\alpha$ يستنتج ان مجموع الزوايا الثلاثة للمثلث AEF لايمكن ان يكون اكبر من $180° - 2\alpha$ ، لان هناك ثلاث زوايا مستقيمة في هذا الجمع، فيكون مجموع زوايا المثلث AEF ليس اكثر من:

$$(720° - 2\alpha) - 3 \times 180° = 180° - 2\alpha$$

وهكذا عندما تكرر هذه العملية n من المرات سوف نحصل على مثلث، مجموع زواياه ليس اكثر من $180° - 2^n\alpha$ من بديهية ارخميدس، لما كان مضاعف محدود الى α (مهما كان α صغيرا موجبا) يمكن ان يكون اكثر من $180°$. يمكن اختيار n بدرجة بحيث يجعل مجموع الزوايا $180° - 2^n\alpha$ سالبا.

وهذا غير ممكن، لان مجموع زوايا المثلث موجب. لذا فانه لايمكن ان يكون مجموع زوايا المثلث اقل من

قائمتين.

الخلل في هذا البرهان هو انه ليس بالامكان دائما رسم مستقيم يقطع ضلعي زاوية من نقطة في داخلها وهي احدى مكافئات البديهية الخامسة لاقليدس.

وبعد هذه المحاولات من جهود العلماء بداوا يشكون في امكانية برهان بديهية اقليدس ، فقد تلبسهم الشك والغموض حولها الى ان تمكن كل من العلماء جون بوليا الهنغاري (١٨٠٢ـ١٨٦٠م) ولو باجفسكي الروسي (١٧٩٣م-١٨٥٦م) وريمان (١٨٢٦ـ١٨٦٦م)، من اخذ نقيض بديهية التوازي لكي يتوصلوا الى تناقض ولكن لم يجدوا اي تناقص وانما ظهرت افكار صحيحة من الوجهة المنطقية وادى ذلك الى ظهور هندسة جديدة سميت بالهندسة اللااقليدية.

نلاحظ ان علماء الرياضيات قد رحبوا بفرضيات اقليدس عدا فرضية التوازي، حيث اعتقد قسم منهم انها في عداد المبرهنات لامع البديهيات وقد حاولوا ان يبرهنوا على صحتها باستخدام الفرضيات التسعة الباقية بطرق البرهان المباشر او غير المباشر. وكذلك برهان مبرهنة ٢٩ بدون استخدام بديهية التوازي او اشتقاق احدى العبارات المكافئة للبديهية الخامسة من بقية الفرضيات.

نتيجة لهذه المحاولات فقد ولدت الهندسة اللااقليدية. وعندما اثبت عدم امكان اشتقاق بديهية التوازي من فرضيات اقليدس، فقد بنيت الهندسة اللااقليدية على فرضيات اقليدس عدا بديهية التوازي، فقد حل محلها نقيضها في الحالة:

وجود اكثر من مواز واحد لمستقيم من نقطة خارجة عنه، تدعى هذه الهندسة بالهندسة الهذلولية (Hyperbolic Geometry).

ثم ولدت هندسة اخرى استندت على نقيض بديهية التوازي في الحالة عدم وجود مواز للخط من نقطة خارجة عنه، وتسمى هذه بالهندسة الاهليليجية (Elliptic Geometry).

وبذلك انتهت مشكلة التوازي وثبت عدم امكان استنتاج هذه البديهية من فرضيات اقليدس .

ان الاسس التي وضعها اقليدس، وزاد في حفرها بروكلس وابن الهيثم والخيام والابهري، ملأها بالحجارة الصلبة ساكيري ولامبرت وليجندر، ثم شيد عليها كاوس وبوليا لوباجفسكي وريمان وكلاين وهلبرت بناء الهندسة بطوابقها الثلاثة.

الفصل التاسع
الهندسة الهذلولية
(HyperbdicGeormeny)

لقد تمكن العالمان جون بوليا ولوباجفسكي في حدود(١٨٢٠م - ١٨٢٠م)من بناء الهندسة الهذلولية، وذلك بأخذ نقيض البديهية الخامسة لاقليدس في شكل ما. بما ان بديهية بليفير هي احدى مكافئات البديهية الخامسة، فان النقيض يكون بالشكل التالي:

((من نقطة لاتقع على مستقيم معلوم، يمكن رسم اكثر من مواز واحد لايقطع المستقيم المعلوم)).

بالحقيقة، استعملت هذه الصيغة من قبل كاوس، بوليا، ولوباجفسكي في بداية دراستهم لهذه الهندسة.

لقد قدم في الفصول السابقة نظام هلبرت للهندسة الاقليدس بدون ان يشار الى مفهوم التوازي او اي شيء يكافئه، ان هذا يكون ضروريا لاننا نريد ان نستعمل هذه المبرهنات في الهندسة الهذلولية، لذا يجب ان لايغيب عن بالنا بان كل المبرهنات التي برهنت في الفصول ٤، ٥، ٦، و ٧ ستستعمل في هذه الهندسة. وسنضيف البديهية التالية وهي البديهية المميزة للهندسة الهذلولية:

٩-١ بديهية التوازي الهذلولية، HPP

بديهية ١٧

اذا كانت P نقطة لاتقع على مستقيم معلوم m، فانه يوجد شعاعان فقط، وليكن $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$، بحيث ان:

(١) $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ شعاعين غير متعاكسين.
(٢) $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ لايقطعان m.
(٣) اي شعاع $\overrightarrow{PQ}$ يقطع m اذا وفقط اذا يقع $\overrightarrow{PQ}$ بين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$.

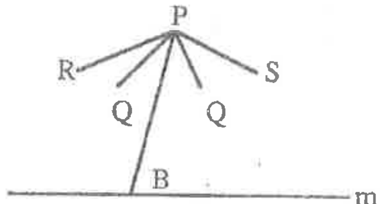
تعريف ٤٣

كل من الشعاعين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ المذكورين في HPP، يدعى موازي الى m من P.

مبرهنة ١٠٢

اذا كان شعاع يقع بين شعاع موازي لمستقيم معلوم وشعاع يتطع المستقيم المعلوم، فانه يقطع المستقيم المعلوم.

البرهان:



شكل (٨٧)

ليكن $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ شعاعين يوازيان خط m من نقطة P.
وان B اية نقطة على m، و $\overrightarrow{PQ}$ اي شعاع يقع بين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PB}$
يجب ان نبرهن ان $\overrightarrow{PQ}$ يقطع m.
بما ان $\overrightarrow{PB}$ يقطع m، فانه من HPP، $\overrightarrow{PB}$ يقع بين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$. وبما ان $\overrightarrow{PQ}$ يقع بين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PB}$، فانه من مبرهنة

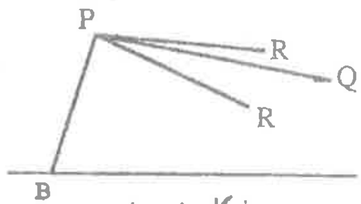
٤٦ (أ) $\overrightarrow{PQ}$ يقع بين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$. ومن HPP ، $\overrightarrow{PQ}$ يقطع m.
وبالمثل. اذا كان $\overrightarrow{PQ}$ يقع بين $\overrightarrow{PS}$ و $\overrightarrow{PB}$.

من الواضح انه توجد مستقيمات عديدة لاتقطع المستقيم والتي هي ليست موازيات للمستقيم. المبرهنة التالية تبين على ان الموازي هو اول المستقيمات التي لاتقطع.

مبرهنة ١.٣

اذا كان $\overrightarrow{PQ}$ لايقطع مستقيم m، لكن اي شعاع يقع بين $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PB}$ ، حيث ان B نقطة على m، يقطع m، فان $\overrightarrow{PQ}$ يوازي المستقيم m.

البرهان:



شكل (٨٨)

ليكن m مستقيما ، P نقطة لاتقع على m، و $\overrightarrow{PQ}$ شعاع لايقطع m.

من HPP ← يوجد شعاعان $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$

من P ويوازيان m. لتكن B اية نقطة على m.

من الفرض ← P, B, Q لاتقع على مستقيم واحد

← Q لاتقع على المستقيم PB.

← تقع Q في احدى جهتي PB.

من HPP ← $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ في الجهتين المتعاكسين للمستقيم PB

← اما تقع Q في جهة $\overrightarrow{PB}$ التي تحتوي R او

في جهة $\overrightarrow{PB}$ التي تحتوي S.

نفرض ان Q تقع في جهة $\overrightarrow{PB}$ التي تحتوي R.

اما $\overrightarrow{PR}$ يقع بين $\overrightarrow{PB}$ و $\overrightarrow{PQ}$، $\overrightarrow{PQ}$ يقع بين $\overrightarrow{PB}$ و $\overrightarrow{PR}$، او $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ}$.

اذا كان $\overrightarrow{PR}$ يقع بين $\overrightarrow{PB}$ و $\overrightarrow{PQ}$، فمن الفرض، $\overrightarrow{PR}$ يقطع m و هذا يخالف HPP.

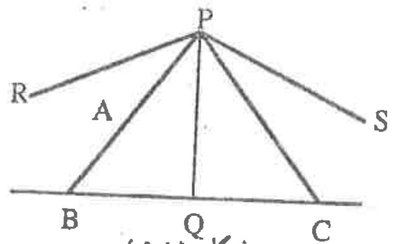
اما اذا كان $\overrightarrow{PQ}$ يقع بين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PB}$، فمن مبرهنة ١٠٢، $\overrightarrow{PQ}$ يقطع m وهذا يخالف الفرض.

لذا فان $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$. وبنفس الطريقة، اذا كانت Q في جهة $\overrightarrow{PB}$ التي تحتوي S.

مبرهنة ١٠٤

اذا كانت نقطة Q هي اثر العمود النازل من نقطة معلومة P لمستقيم m، و $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ الموازيان من P الى m، فان $\angle SPQ \cong \angle RPQ$.

البرهان



شكل (٨٩)

نفرض ان العبارة خطأ.

من مبرهنة ٦٢ ⟵ اما $\angle RPQ < \angle SPQ$

او $\angle SPQ < \angle RPQ$.

نفرض ان $\angle RPQ < \angle SPQ$ ⟵ توجد نقطة A في داخل $\angle RPQ$ بحيث ان $\angle SPQ \cong \angle APQ$.

من مبرهنة ١٠٢ $\longleftarrow$ $\overrightarrow{PA}$ يقطع m في نقطة B.
من بديهية ١١ $\longleftarrow$ توجد نقطة C على m بحيث ان B-Q-C
و $B-Q \cong C-Q$

من SAS $\longleftarrow$ $\Delta BQP \cong \Delta CQP$

$\longleftarrow$ $\angle CPQ \cong \angle BPQ$

ولكن $\angle APQ = \angle BPQ \cong \angle SPQ$

لذا من الخاصية المتعدية $\longleftarrow$ $\angle CPQ \cong \angle SPQ$

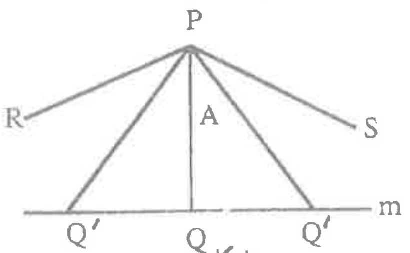
من بديهية ١٤ $\longleftarrow$ $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PS}$

لكن هذا غير ممكن، لان $\overrightarrow{PC}$ يقطع m و $\overrightarrow{PS}$ لايقطع m.
لذلك فان فرضيتنا تؤدي الى تناقض. وبنفس الطريقة،
نتوصل الى تناقض
اذا كان $\angle RPQ < \angle SPQ$
وعليه فان $\angle RPQ \cong \angle SPQ$.
ان معكوس مبرهنة ١٠٤ يكون صحيحا ايضا.

مبرهنة ١٠٥:

اذا كان $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ هما الشعاعين الموازيين من نقطة P لمستقيم معلوم m، فان المنصف للزاوية $\angle RPS$ يكون عموديا على المستقيم m.

البرهان



شكل (٩٠)

ليكن $\overrightarrow{PA}$ هو الشعاع المنصف للزاوية $\angle RPS$.
من مبرهنة ٤٠ وتعريف ٣٣ ⟵ $\overrightarrow{PA}$ يقع بين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$
من HPP ⟵ $\overrightarrow{PA}$ يقطع m في نقطة، ولتكن Q.
نفرض ان $\overrightarrow{PQ}$ لايكون عموديا على m.
من المبرهنة ٨٩ ⟵ يوجد مستقيم 'PQ يمر من P ويكون عموديا على m.

من مبرهنة ١٠٤ ⟵ $\angle RPQ' \doteq \angle SPQ'$
⟵ $\overrightarrow{PQ'}$ هو منصف آخر للزاوية $\angle RPS$ وهذا يناقض مبرهنة ٨٢.
يستنتج من هذا، اذا كان $\overrightarrow{PA}$ منصفا للزاوية، فانه يكون عموديا على m.

مبرهنة ١.٦

اذا كانت نقطة Q هي اثر العمود النازل من نقطة P على مستقيم معلوم m، و $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ هما الشعاعان الموازيان للمستقيم m من P، فان $\angle RPQ$ و $\angle SPQ$ زاويتان حادتان.

البرهان

نفرض ان العبارة خطأ.
من مبرهنة ١٠٤ ⟵ $\angle SPQ \doteq \angle RPQ$
نفرض انهما زاويتان قائمتان، فان $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ شعاعان متعاكسان وهذا يناقض HPP.
اذا كانتا زاويتين منفرجتين، فانه يوجد شعاع $\overrightarrow{PE}$ في داخل $\angle SPQ$ او $\angle RPQ$ يصنع زاوية قائمة مع $\overrightarrow{PQ}$.

من مبرهنة ١٠٢ ⟵ $\overrightarrow{PE}$ يقطع m وهذا يناقض مبرهنة ٧٤

لذلك، فان الزاويتين يجب ان تكونا حادتين.

مبرهنة ١٠٧

اذا كان الشعاع PS موازيا الى مستقيم m من نقطة P، و X هي نقطة على الخط PS بحيث ان X-P-S

(أ) من الخطأ ان يكون $\overrightarrow{PX}$ موازيا الى m.

(ب) من الخطأ ان يكون $\overrightarrow{PX}$ قاطعا الى m.

(جـ) المستقيم PS لايقطع m.

البرهان :

يترك كتمرين.

تعريف ٤٤

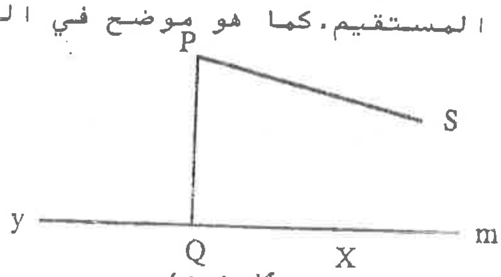
ليكن $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{QS}$ شعاعين لايقعان على مستقيم واحد، وان P و Q نقطتان مختلفتان، يقال ان $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{QS}$ في نفس الاتجاه اذا وفقط اذا كانا في نفس الجهة من الخط PQ.

تعريف ٤٥

اذا كان $\overrightarrow{PS}$ شعاعا يوازي خط m من نقطة P، واذا كان $\overrightarrow{QX}$ اي شعاع على m، في نفس اتجاه $\overrightarrow{PS}$، فانه يقال ان $\overrightarrow{PS}$ يوازي $\overrightarrow{QX}$.

دعنا نلاحظ بدقة اهمية تعريف ٤٥، بينما HPP وتعريف ٤٣ يذكران متى شعاع يوازي مستقيما، فان تعريف ٤٥ يعلمنا متى شعاع يوازي شعاعا. يخبرنا

كمثال عندما شعاع يوازي مستقيما، فانه لايوازي اي شعاع ذلك المستقيم. كما هو موضح في الشكل التالي:



شكل (٩١)

$\overrightarrow{PS}$ يوازي m، و $\overrightarrow{QX}$ ، لكن $\overrightarrow{PS}$ لايوازي $\overrightarrow{QY}$ لانهما ليسا في نفس الاتجاه.

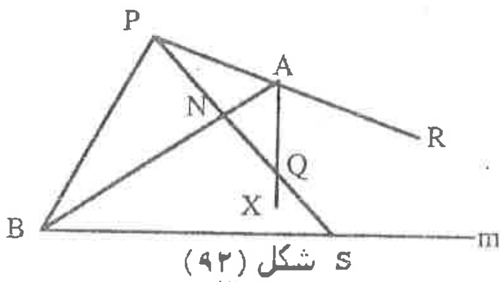
لحد الان لايمكن ان نتكلم عن مستقيمين احدهما يوازي الآخر. بسبب الطريقة التي قدم فيها التوازي، نسأل السؤال التالي: اذا كان شعاع يوازي مستقيم m من نقطة P، هل يؤدى ذلك من اي نقطة اخرى على المستقيم الذي يحتوي الشعاع يوجد شعاع آخر على المستقيم يوازي m؟

يعطى الجواب على هذا السؤال من المبرهنة التالية.

مبرهنة ١.٨

ليكن m مستقيما و P نقطة لاتقع على m، $\overrightarrow{PR}$ شعاعا يوازي m من P اذا كانت A اي نقطة على المستقيم الذي يحتوي $\overrightarrow{PR}$، اي ان، اذا كان اما P-A-R او A-P-R ، فان $\overrightarrow{AR}$ يوازي m.

البرهان :

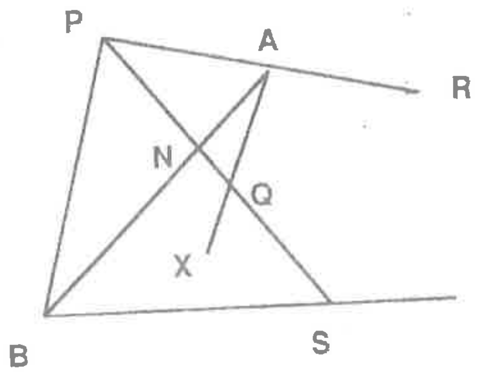


شكل (٩٢)

الحالة (١)   شكل (٩٢)

لتكن A اية نقطة بحيث ان P-A-R ،
لتكن B اية نقطة على m،
لتكن X اية نقطة في داخل $\angle$ BAR، ولتكن Q اية نقطة على $\overrightarrow{AX}$ في جهة m التي تحتوي R.
من مبرهنة ٤٠ $\longleftarrow$ تقع Q في داخل $\angle$ BAR
وتقع ايضا في داخل $\angle$ BPR . (لماذا؟)
ومن مبرهنة ١٠٢ وتعريف ١٧ $\longleftarrow$ $\overrightarrow{PQ}$ يقطع m في نقطة ولتكن S.
من مبرهنة ٤٣ . $\longleftarrow$ $\overrightarrow{PQ}$ يقطع A-B في نقطة N.
لذلك بتطبيق بديهية باخ على ΔBNS نستنتج ان $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AQ}$ يقطع B-S (لماذا؟).
بما ان $\overrightarrow{AR}$ هو مجموعة جزئية من $\overrightarrow{PR}$ ، فان $\overrightarrow{AR}$ لايقطع m.
وكذلك بينا ان اي شعاع $\overrightarrow{AX}$ يقع بين $\overrightarrow{AR}$ و $\overrightarrow{AB}$ يقطع m، فانه من مبرهنة ١٠٣، $\overrightarrow{AR}$ يوازي m من A.

الحالة (٢)   شكل (٩٣)



(شكل ٩٣)

نفرض ان A هي نقطة بحيث ان A-P-R ، و B اية نقطة على m، و X اية نقطة في داخل $\angle BAR$.فانه توجد نقطة Q على $\overrightarrow{AX}$ بحيث ان Q في جهة m التي تحتوي A، وفي جهة الخط PB التي تحتوي A. (لماذا؟)

لتكن M نقطة بحيث ان Q-A-M.فان MP يقطع المستقيم m في نقطة، ولتكن S. (لماذا؟).

في $\triangle BAP$ ، $\overrightarrow{AQ}$ يقطع B-P في نقطة N،

في $\triangle BPS$ ، $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AX}$ يقطع B-S. (لماذا؟)

من مبرهنة ١١٣ ـــ $\overline{AR}$ كمجموعة جزئية من المستقيم AR لايقطع المستقيم m.وقد بينا ان اي شعاع $\overrightarrow{AX}$ يقع بين $\overrightarrow{AR}$ و $\overrightarrow{AB}$ يقطع m، لذلك من مبرهنة ١٠٢، $\overrightarrow{AR}$ يوازي m من A.

بعد ان برهنا المبرهنتين ١٠٧ و ١٠٨ من الممكن تقديم التعريف التالي:

تعريف ٤٦ من هنا ساو

ليكن $\overrightarrow{PS}$ شعاعا يوازي خطا m ولتكن X, Y نقطتين على المستقيم PS،فان $\overrightarrow{XY}$ يقال انه يوازي m بنفس مفهوم $\overrightarrow{PS}$ اذا وفقط اذا كان $\overrightarrow{XY}$ شعاعا غير معاكس للشعاع $\overrightarrow{XS}$.

قاعدة لغوية

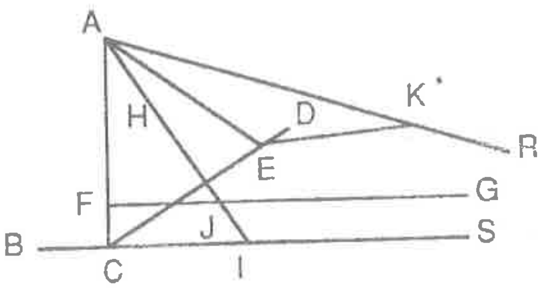
اذا كان PS شعاعا يوازي مستقيما m، فانه من الممكن ان نتكلم عن المستقيم PS بانه يوازي المستقيم m بنفس المفهوم، وفي هذه الحالة، اذا استعملت هذه اللغة، يجب ان نميز بين مفهوم الخط PS ومفهوم المستقيم SP.

سننهي هذا البند ببرهنة مبرهنتين تبينان كيف ان المتوازيات في هذه الهندسة مثل تلك في الهندسة الاقليدية وبرهنة مبرهنة واحدة تبين كيف تختلف عنها.

مبرهنة ١.٩ للاطلاع

اذا كان $\overrightarrow{AR}$ يوازي $\overrightarrow{BS}$، فان $\overrightarrow{BS}$ يوازي $\overrightarrow{AR}$.

البرهان



شكل (٩٤)

ننزل من A عمودا على $\overrightarrow{BS}$ يقطعه في نقطة C.
نعرف ان $\overrightarrow{CS}$ لايقطع $\overrightarrow{AR}$، يجب ان نبرهن ان اي شعاع مثل $\overrightarrow{CD}$ يقع بين $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CS}$، و D في جهة $\overleftrightarrow{AR}$ التي تحتوي D يجب ان يقطع $\overrightarrow{AR}$. ليكن AE عمودا على المستقيم CD من A.
بما ان $\angle DCS$ و $\angle ACD$ زاويتان حادتان، فانه تقع E على $\overrightarrow{CD}$، ولذلك لايمكن E تساوي C او تقع في الجهة المعاكسة من AC بدون نقض مبرهنة الزاوية الخارجية.
لذلك تقع E داخل $\angle ACS$.
لذلك، تكون $\angle ACE$ زاوية حادة و $\angle AEC$ زاوية قائمة في ΔAEC

لذا من مبرهنة ٧٨ ⟵ $A\text{-}E < A\text{-}C$

⟵ توجد نقطة F في A-C بحيث ان $A\text{-}F \doteq A\text{-}E$،
ليكن FG عموديا على A-C وفي جهة A-C التي تحتوي R و S.

تقع E ايضا في داخل $\angle CAR$ (والا، $\overrightarrow{CE}$ يقطع $\overrightarrow{AR}$)
لذلك $\angle FAR < \angle EAR$. ليكن $\angle FAH \doteq \angle EAR$، فانه من مبرهنة ١٠٢، $\overrightarrow{AH}$ يقطع $\overrightarrow{BS}$ في نقطة I. لذا في ΔACI

المستقيم FG يجب ان يقطع A-I في نقطة J.
لتكن K نقطة على $\overrightarrow{AR}$ بحيث ان A-J ≅ A-K.فانه من SAS ، ΔAFJ≅ΔAEK . لذلك الزاويتان المتناظرتان ∠ AFJ و ∠ AEK متطابقتين. لكن ∠ AFJ زاوية قائمة، لذلك ∠ AEK هي زاوية قائمة. من العمل، ∠ AED هي زاوية قائمة، لذلك $\overrightarrow{EK}$ = $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{CE}$ يقطع $\overrightarrow{AR}$ في K.
من مبرهنة ١٠٣ ⟵ $\overrightarrow{CS}$ يوازي $\overrightarrow{AR}$ ، ولذلك
من مبرهنة ١٠٨ ⟵ $\overrightarrow{BS}$ يوازي $\overrightarrow{AR}$.
تؤكد هذه المبرهنة على ان خاصية التوازي هي خاصية تناظرية. ماذا عن الخاصية المتعدية؟ نلاحظ من HPP ان كل من $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ يوازي المستقيم m لكنهما غير متوازيين.
بهذا وجود الخاصية المتعدية يحدد بالمبرهنة ١١٠.

مبرهنة ١١٠. للطلاع

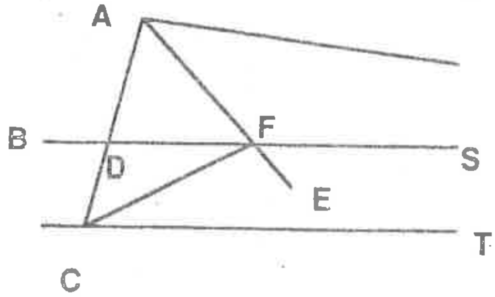
اذا كان شعاعان في نفس الاتجاه ويوازيان شعاعا ثالثا، فان احدهما يوازي الآخر.

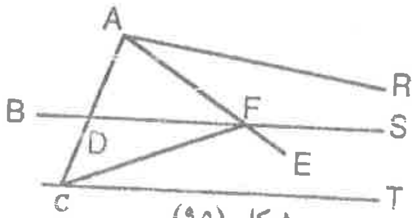
البرهان

توجد حالتان تؤخذ بنظر الاعتبار: الحالة التي فيها الشعاعان في جهتين متعاكستين من الشعاع الثالث والحالة التي يكون الشعاعان في نفس الجهة من الشعاع.

الحالة (١)

شكل ٩٥





شكل (٩٥)

ليكن $\overrightarrow{AR}$ ، $\overrightarrow{CT}$ شعاعين يوازيان $\overrightarrow{BS}$ وفي جهتين متعاكستين من $\overrightarrow{BS}$. فان من مبرهنة ٢٠ وتعريف ١١ $\overleftrightarrow{A-C}$ تقطع BS في نقطة D.

ليكن $\overrightarrow{AE}$ اي شعاع من A يقع بين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AR}$.

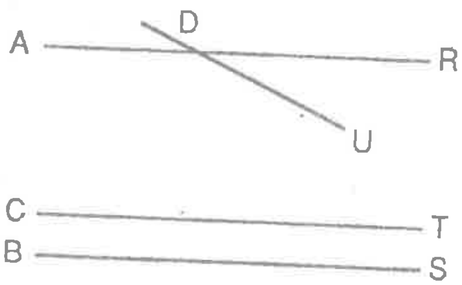
فانه من مبرهنة ١٠٢، $\overrightarrow{AE}$ يقطع $\overrightarrow{BS}$ في نقطة، ولتكن F. نصل C-F. بما ان $\overrightarrow{CT}$ يوازي $\overrightarrow{BS}$، فانه من مبرهنة ١٠٩، $\overrightarrow{BS}$ يوازي $\overrightarrow{CT}$، ومن مبرهنة ١٠٨، $\overrightarrow{FS}$ يوازي $\overrightarrow{CT}$.

يقع $\overrightarrow{FE}$ في داخل $\angle$ CFS (لماذا؟)،

لذا $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AE}$ يقطع $\overrightarrow{CT}$.

بما ان $\overrightarrow{AR}$ لايقطع $\overrightarrow{CT}$ (لماذا؟). لكن اي مستقيم يمر من A وفي داخل $\angle$ CAR يقطع CT ، فانه من مبرهنة ١٠٣، $\overrightarrow{AR}$ يوازي $\overrightarrow{CT}$.

الحالة (٢) (شكل ٩٦)



شكل (٩٦)

نفرض ان $\overrightarrow{AR}$ و $\overrightarrow{CT}$ في نفس الجهة من $\overrightarrow{BS}$ ويوازيانه.
فان $\overrightarrow{AR}$ و $\overrightarrow{CT}$ لايتقاطعان، حيث اذا تقاطعا في نقطة، ولتكن X، فانه يوجد شعاعان يوازيان شعاعا ثالثا وفي نفس الاتجاه، لكن هذا غير ممكن (لماذا؟). بهذا فانهما لايتقاطعان، واما $\overrightarrow{AR}$ و $\overrightarrow{BS}$ في جهتين متعاكستين من $\overrightarrow{CT}$ او $\overrightarrow{CT}$ و $\overrightarrow{BS}$ في جهتين متعاكستين من $\overrightarrow{AR}$.

نفرض ان $\overrightarrow{AR}$ و BS في جهتين متعاكستين من $\overrightarrow{CT}$.

نفرض ان $\overrightarrow{AR}$ لايوازي $\overrightarrow{CT}$. فان من اية نقطة D على $\overrightarrow{AR}$ يوجد شعاع $\overrightarrow{DU}$ يوازي $\overrightarrow{CT}$. نستنتج من الحالة١، ان $\overrightarrow{AR}$ يوازي BS. لذلك من مبرهنة ١٠٨، $\overrightarrow{DR}$ يوازي BS.

لكن من HPP، من نقطة D يوجد موازي واحد فقط في نفس الاتجاه للخط BS. لذلك، $\overrightarrow{DU}$ يساوي $\overrightarrow{DR}$ وبهذا يكون $\overrightarrow{AR}$ موازيا الى $\overrightarrow{CT}$.

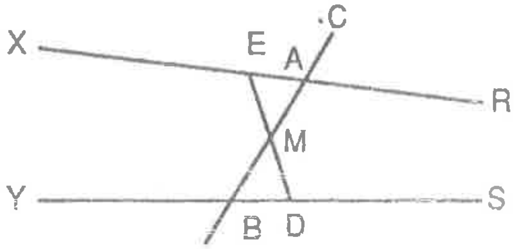
البرهان للحالة الاخرى يتم بنفس الطريقة.

تتميز هذه الهندسة عن الهندسة الاقليدية حيث يوجد اختلاف بين المستقيمات غير المتقاطعة والمستقيمات المتوازية، حيث ان المستقيمات المتوازية هي غير متقاطعة، لكن ليست المستقيمات غير المتقاطعة تكون متوازية. لقد بينت مبرهنة ١٠٣ ان الموازيات هي اولى المستقيمات غير المتقاطعة. المبرهنة التالية تبين مع مبرهنة ٧٣ اختلاف اساسي في خواص هاتين الهندستين.

مبرهنة ١١١

الزاويتان المتناظرتان المتكونتان من موازيين واي قاطع غير متطابقتين.

البرهان



شكل (٩٧)

ليكن $\overrightarrow{XR}$ و$\overrightarrow{YS}$ شعاعين متوازيين و AB مستقيما يقطع $\overrightarrow{XR}$ في A و $\overrightarrow{YS}$ في B، لتكن C نقطة بحيث ان B-A-C.
فتكون الزاويتان $\angle CAR$ و $\angle CBS$ متناظرتين.
يجب ان نبرهن ان $\angle CAR$ لاتطابق $\angle CBS$.
من مبرهنة ١٠٨ وتعريف ٤٥ ⟵ $\overrightarrow{AR}$ يوازي $\overrightarrow{BS}$.
نفرض ان $\angle CBS \cong \angle CAR$.
لايمكن ان تكونا زاويتين قائمتين، حيث في هذه الحالة يكون $\angle ABS \cong \angle BAR$، ولكن هذا يناقض مبرهنة ١٠٦، لانه يجب ان تكون احداهما حادة، عندما احداهما تكون قائمة.

لتكن M نقطة منتصف القطعة A-B، ننزل العمود من M على AR ويقطعه في نقطة E.
من العبارة السابقة، E تختلف عن A.
في اي جهة من AB تقع E، نأخذ نقطة D على $\overrightarrow{BS}$ في جهة AB التي لاتحتوي E بحيث ان $B\text{-}D \cong A\text{-}E$
من SAS ⟵ $\Delta MEA \cong \Delta MDB$
⟵ $\angle EMA \cong \angle DMB$
من الخاصية الانعكاسية ⟵ $\angle DMC \cong \angle DMC$
وبما ان $\angle DMC$ و $\angle DMB$ تكونان زوجا خطيا، فمن تعريف ٢٥، تكون $\angle DMC$ و $\angle EMA$ زاويتين متكاملتين.
وبما انهما زاويتان متكاملتان ومتجاورتان، فمن نتيجة ٣ مبرهنة ٥٨، الزاويتان $\angle DMC$ و $\angle EMA$ تكونان

زوجا خطيا.

من تعريف ٢٥ ⟵ $\overrightarrow{MD}$ و $\overrightarrow{ME}$ شعاعين متعاكسين

من تعريف ١٢ ⟵ EMD هو خط مستقيم

وكذلك من تطابق ΔBDM و ΔAEM ، نستنتج ان

$\angle BDM \cong \angle AEM$ ، وبما ان $\angle AEM$ قائمة،

لذلك من مبرهنة ٨٦(أ) ⟵ $\angle MDB$ هي زاوية قائمة

ومن تعريف ٣٥ ⟵ $\angle MDS$ هي زاوية قائمة

بهذا قد بينا على انه يوجد قاطع ED للموازيين $\overrightarrow{ER}$ و $\overrightarrow{DS}$ (مبرهنة ١٠٨)، بحيث ان $\angle RED$ و $\angle SDE$ زاويتان قائمتان.

وهذا يناقض مبرهنة ١٠٦.

بهذا يكون الفرض خاطئا، لذلك فان $\angle CAR$ و $\angle CBS$ غير متطابقتين.

نتيجة

الزاويتان الداخليتان المتبادلتان المتكونتان من مستقيمين متوازيين واي قاطع غير متطابقتين.

البرهان

تستنتج حالا من المبرهنة ١١١ ونتيجة ٢ من المبرهنة ٥٨.

٢-٩ المثلث المحاذي *(Asymptotic Triangle)*

عندما يقطع مستقيمين متوازيين بقاطع، فان الشكل الناتج يدعى مثلث محاذي او مثلث ذو راسين (Two-vertices-triangle) يرمز له (T − V − T)، وسندرس خواصه في التعريف التالي:

تعريف ٤٧

ليكن $\overrightarrow{XR}$ و $\overrightarrow{YS}$ اي شعاعين متوازيين وقد قطعا بقاطع m في نقطتين A و B، حيث ان X-A-R و Y-B-S:

(أ) اتحاد $\overrightarrow{AR}$ ، $\overrightarrow{BS}$ ، A, B و A-B يدعى مثلث (T - V -T).

(ب) القطعة A-B تدعى ضلع المثلث المحاذي.

(جـ) تدعى ABS ∠ و BAR ∠ زاويتي المثلث المحاذي، وكذلك تدعيان الزاويتين الداخليتين

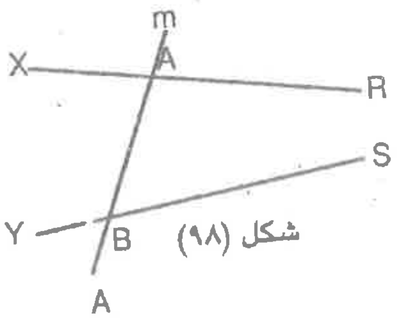
(د) A, B تدعيان الراسين

(هـ) تدعى الزاويتان XAB ∠ ، YBA ∠ وزاويتاهما الرأسيتان زوايا خارجية للمثلث (T - V - T).

(و) زاوية داخلية وزاوية خارجية لمثلث (T - V - T) غير متجاورتان تدعيان زاوية داخلية مقابلة وزاوية خارجية مقابلة نسبة احداهما للاخرى.

(ز) داخل مثلث (T - V - T) هو تقاطع:

(١) جهة الخط AB التي تحتوي R.
(٢) جهة الخط AR التي تحتوي B.
(٣) جهة الخط BS التي تحتوي A.



شكل (٩٨)

(ح) خارج مثلث محاذي هو مجموعة كل النقاط التي لاتقع على المثلث ولاتقع في داخله.

رمز
يرمز لمثلث (T − V − T) المتكون من الشعاعين $\overrightarrow{AR}$ و $\overrightarrow{BS}$ والقطعة A-B بالرمز: RABS

ان هذا المثلث له خواص المثلث الاعتيادي كما تبين المبرهنات التالية.

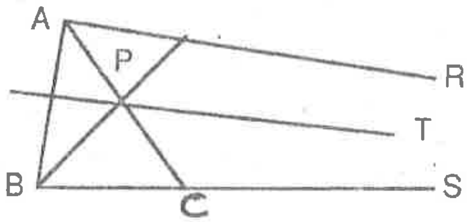
مبرهنة ١١٢ من هنا ـــ طاو

لتكن P نقطة في داخل مثلث محاذي RABS فان

(أ) الخط الذي يمر من P واي رأس من المثلث، يقطع الشعاع الآخر.

(ب) الخط الذي يمر من P ويوازي اي من الشعاعين، يقطع الضلع.

البرهان



شكل (٩٩)

(أ) نفرض ان P تقع في داخل RABS

⟵ تقع P في داخل RAB ∠

من مبرهنة ١٠٢ ⟵ $\overrightarrow{AP}$ يقطع $\overrightarrow{BS}$ في نقطة، ولتكن C.

وبنفس الطريقة، $\overrightarrow{BP}$ يقطع $\overrightarrow{AR}$.

(ب) نفرض ان P تقع في داخل RABS و $\overrightarrow{PT}$ شعاع يوازي احد الشعاعين، وليكن $\overrightarrow{AR}$ ، ومن مبرهنة

١١٠، يوازي $\overrightarrow{BS}$

من فرع (أ) ⟵ $\overrightarrow{AP}$ يقطع $\overrightarrow{BS}$ في نقطة C

من مبرهنة ٤١ ⟵ A-P-C

⟵ $\overrightarrow{PT}$ يقطع A-C في P

وبما ان $\overrightarrow{PT}$ يوازي $\overrightarrow{BS}$ ، فانه من مبرهنة ١٠٧، $\overrightarrow{PT}$ لايقطع $\overrightarrow{BS}$ وبما ان C على $\overrightarrow{BS}$ ⟵ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BS}$

اي ان $\overrightarrow{PT}$ لايقطع B-C

بتطبيق بديهية باخ على ΔABC ، فان $\overrightarrow{PT}$ يقطع A-B

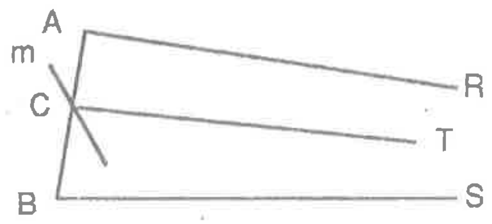
مبرهنة ١١٣

اذا كان مستقيم لايمر باي رأس من مثلث محاذي:

(أ) يقطع احد الشعاعين، فانه يقطع الشعاع الاخر او الضلع.

(ب) يقطع الضلع ولايوازي اي شعاع، فانه يقطع شعاعا واحدا فقط من الشعاعين.

البرهان



شكل (١٠٠)

(أ) ليكن m مستقيا لايمر باي رأس، ويقطع شعاعا وليكن $\overrightarrow{AR}$ من مثلث محاذي RABS في نقطة C. من هذا نستنتج ان m لايساوي BC. لذلك، توجد نقطة X في

داخل RABS وتقع على m. من مبرهنة ٢، X لاتقع على .BC

اي اما X في جهة BC التي تحتوي A او في جهة BC التي تحتوي R.

اذا كانت X في جهة BC التي تحتوي R، فانها تقع في داخل BCR ∠ ولذلك من مبرهنة ١٠٢ ومبرهنة ١٠٨، m يقطع $\overrightarrow{BS}$. اما اذا كانت في جهة BC التي تحتوي A، فمن مبرهنة ٣٤ يقطع m الضلع A-B من ΔACB .

(ب) اذا كان m يقطع A-B في نقطة، ولتكن C، ولايوازي اي شعاع،

ليكن $\overrightarrow{CT}$ شعاعا يوازي شعاعا، وليكن $\overrightarrow{AR}$.

ومن مبرهنة ١١٠، $\overrightarrow{CT}$ يوازي $\overrightarrow{BS}$. فان RACT و TCBS مثلثان محاذيان. المستقيم m يحتوي على نقطة X اما في داخل ACT ∠ او BCT ∠ (لاتقع في كلتيهما). لذا، فانه من مبرهنة ١١٢، اما المستقيم m يقطع $\overrightarrow{AR}$ هو $\overrightarrow{BS}$.

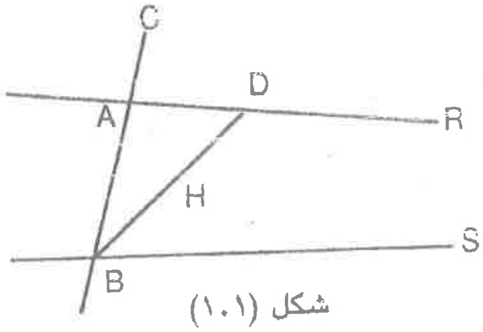
من زمن اكتشاف هذه الهندسة الى وقتنا الحاضر كانت الفكرة بان المستقيمات المتوازية تلتقي في نقطة تدعى نقطة محاذية. لو توقفنا لحظة لنضع المبرهنتين السابقتين في هذا الاطار، يمكن ان نبين ان المبرهنة الاولى هي تعميم لمبرهنة ٣٤، والثانية لبديهية باخ، حيث ان النقطة المحاذية تعتبر كراس ثالث للمثلث.

المبرهنتين التاليتين تشابه كذلك في المثلثات الاعتيادية.

مبرهنة ١١٤

الزاوية الداخلية لمثلث محاذي تكون اصغر من الزاوية الخارجية المقابلة لها.

البرهان



شكل (١٠١)

ليكن RABS مثلثا محاذيا، و C نقطة بحيث ان B-A-C لذلك ∠ CAR زاوية خارجية. يجب ان نبرهن:

$\angle CBS < \angle CAR$

وبنفس الطريقة بالنسبة للزاوية الداخلية الاخرى.

نفرض ان العبارة خطأ.

من مبرهنة ٦٢ ـــــ اما $\angle CBS \doteq \angle CAR$

او $\angle CAR < \angle CBS$

من مبرهنة ١١١ ـــــ $\angle CAR$ لاتطابق $\angle CBS$

لذا نفرض ان $\angle CBS < \angle CAR$ ، فانه يوجد شعاع $\overrightarrow{BH}$ في داخل $\angle CBS$ بحيث ان $\angle CBH \doteq \angle CAR$

من مبرهنة ١٠٢ ـــــ $\overrightarrow{BH}$ يقطع $\overrightarrow{AR}$ في نقطة D.

ـــــ $\angle CAD = \angle CAR$ و $\angle CBH = \angle CBD$

ـــــ $\angle CBD \doteq \angle CAD$

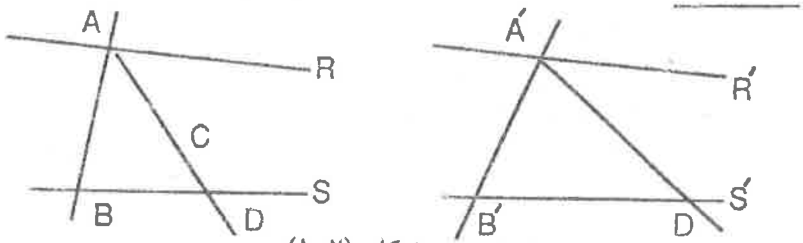
ـــــ الزاوية الداخلية $\angle CBD$ للمثلث ABD تطابق الزاوية الخارجية المقابلة لها $\angle CAD$ ، وهذا يناقض مبرهنة ٠٧٥

لذلك،فان فرضيتنا تؤدي الى تناقض وعليه، فان $\angle CAR < \angle CBS$.

مبرهنة ١١٥ راك هنا

اذا كانت زاوية في مثلث محاذي تطابق زاوية في مثلث محاذي آخر، والضلعين متطابقين، فان الزاويتين الباقيتين متطابقتان.

البرهان



شكل (١٠٢)

ليكن RABS و R'A'B'S' مثلثين محاذيين، وفيهما $\angle B \cong \angle B'$ و $A-B \cong A'-B'$ يجب ان نبرهن ان $\angle A \cong \angle A'$.

نفرض ان العبارة خطأ. من مبرهنة ٦٢ ⟵ اما $\angle A < \angle A'$ او $\angle A' < \angle A$

نفرض ان $\angle A' < \angle A$ ⟵ يوجد شعاع $\overrightarrow{AC}$ في داخل $\angle A$ بحيث ان $\angle BAC \cong \angle B'A'R'$.

من مبرهنة ١٠٢ ⟵ $\overrightarrow{AC}$ يقطع $\overrightarrow{BS}$ في نقطة ولتكن D.

من بديهية انشاء قطعة، توجد D' على $\overrightarrow{B'S'}$ بحيث ان $B-D \cong B'-D'$ ومن SAS ⟵ $\Delta ABD \cong \Delta A'B'D$

⟵ $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$ ولكن $\angle BAD \cong \angle B'A'R'$

من الخاصية المتعدية ⟵ $\angle B'A'D' \cong \angle B'A'R'$

ومن بديهية انشاء زاوية ⟵ $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'R'}$

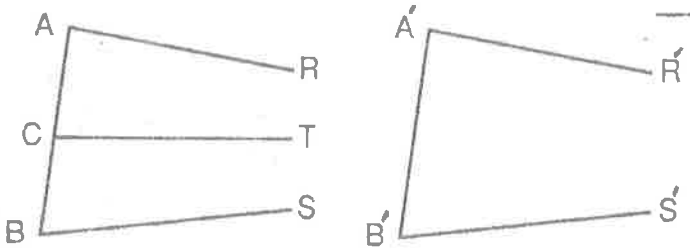
وهذا تناقض، لان $\overrightarrow{A'R'}$ يوازي $\overrightarrow{B'S'}$ و $\overrightarrow{A'D'}$ يقطع $\overrightarrow{B'S'}$.

وبنفس الطريقة، اذا كان $\angle A' > \angle A$.
لذلك، فان $\angle A' \cong \angle A$.

مبرهنة ١١٦

اذا كانت الزاويتان في مثلث محاذي تطابقان، على التوالي الزاويتين في مثلث محاذي آخر، فان الضلعين متطابقان.

البرهان



شكل (١.٣)

ليكن RABS و R'A'B'S' مثلثين محاذيين،
وفيهما $\angle A' \cong \angle A$ و $\angle B' \cong \angle B$
يجب ان نبرهن ان $A'-B' \cong A-B$.
نفرض ان العبارة خطأ.
من مبرهنة ٥٢ ⟵ اما $A-B < A'-B'$ او $A'-B' < A-B$
نفرض ان $A-B < A'-B'$ ⟵ توجد نقطة C في A-B بحيث ان $A'-B' \cong B-C$.

من HPP ⟵ يوجد شعاع $\overrightarrow{CT}$ يمر من C ويوازي $\overrightarrow{AR}$
من مبرهنة ١١٠ ⟵ $\overrightarrow{CT}$ يوازي $\overrightarrow{BS}$
⟵ RACT و TCBS مثلثين محاذيين
في المثلثين المحاذيين TCBS و: R'A'B'S'
$B-C = B'-A'$ و $\angle B \cong \angle B'$
من مبرهنة ١١٥ ⟵ $\angle BCT \cong \angle A'$ ، لكن $\angle A \cong \angle A'$
من الخاصية المتعدية ⟵ $\angle BCT \cong \angle A$
⟵ الزاوية الداخلية لمثلث محاذي تطابق الزاوية الخارجية المقابلة لها وهذا يناقض مبرهنة ١١٤.
لذلك، فان الفرض يؤدي الى تناقض. وبنفس الطريقة، نتوصل الى تناقض ، اذا كان $A'-B' < A-B$.
لذلك، فان $A-B \cong A'-B'$

٩-٢ تمارين

(١) برهن على انه في مثلث محاذي RABS ، المنصفين للزاويتين يتقاطعان في نقطة في داخل RABS.
(٢) ليكن RABS و R'A'B'S' مثلثين محاذين وفيهما $\angle A \cong \angle B$ و $\angle A' \cong \angle B'$
فان $A-B = A'-B'$ فان $\angle A \cong \angle A'$ و $\angle B \cong \angle B'$ (جميع الزوايا تكون متطابقة).
(٣) ليكن RABS مثلثا محاذيا، وفيه $\angle A \cong \angle B$ برهن على ان العمود المنصف للضلع A-B يوازي الشعاعين $\overrightarrow{AR}$ و $\overrightarrow{BS}$.
(٤) ليكن RABS مثلثا محاذيا، وفيه $\angle A \cong \angle B$ ، وان $\overrightarrow{CT}$ هو العمود المنصف للضلع A-B ، برهن على ان الاعمدة النازلة من اي نقطة على $\overrightarrow{CT}$ الى الشعاعين $\overrightarrow{AR}$ و $\overrightarrow{BS}$ متطابقة.
(٥) برهن على انه اذا كان العمود المنصف $\overrightarrow{CT}$ للضلع A-B في مثلث محاذي RABS يكون موازيا الى $\overrightarrow{AR}$ و $\overrightarrow{BS}$ ،

فان $\angle B \doteq \angle A$.

٩-٣ اتساق المستوى الهذلولي

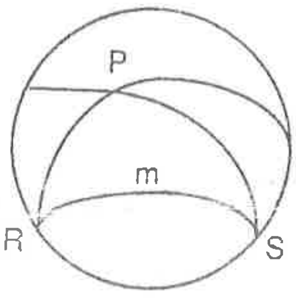
نناقش الان نموذجا للمستوى الهذلولي قدم من قبل بوفكاريه (١٨٥٣-١٩٠٠)

نأخذ دائرة في المستوى الاقليدي، نسميها بالدائرة الاساسية. نقطة في هذا النموذج اذا وفقط اذا كانت في داخل الدائرة الاساسية. نقاط على الدائرة تكون ((نقاط في اللانهاية)).

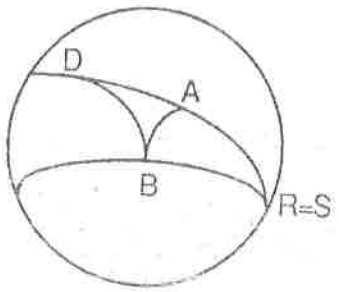
نأخذ دائرة تقطع الدائرة الاساسية عموديا، بحيث ان المماسات لكل دائرة في نقاط التقاطع تكون متعامدة. ((بالخط المستقيم)) سنعني جزء الدائرة الذي يقع في داخل الدائرة الاساسية.

نستطيع اشتقاق كثير من خواص "المستقيمات"، فمثلا، نستطيع ان نبين انه لكل نقطتين في داخل الدائرة الاساسية، توجد دائرة واحدة عمودية على الدائرة الاساسية، دائرتان عموديتان على الدائرة الاساسية يمكن ان تتقاطعا في نقطة واحدة في الاكثر في داخل الدائرة الاساسية.

في هذا النموذج، من السهولة ان نلاحظ بعض الخواص التي تبدو غريبة وغير ممكنة في الاطار الاقليدي.



شكل (١٠٤)



شكل (١٠٥)

الشكل ١٠٤ يبين على انه يوجد موازيان فقط PR و PS للمستقيم m، ويحققان بديهية التوازي الهذلولية، حيث ان PR و PS لايقعان على m ولايقطعان m.

الشكل ١٠٥ يبين ان RABS هو مثلث محاذي، والذي فيه R = S (نقطة في المالانهاية). يبين ايضا ان ABD هو مثلث اعتيادي الذي فيه من الواضح ان مجموع زواياه اقل من قائمتين.

ان هذا النموذج يبين اتساق الهندسة الهذلولية.

كتاب العناصر / أقليدس.

النظرية العشرون: الخط المستقيم هو أقصر مسار يصل بين نقطتين.

الدائرة العظمى: هي أقصر مسار يصل بين نقطتين مختلفتين على سطح الكرة.

الدائرة العظمى: هي أكبر دائرة يمكن رسمها على سطح الكرة وهي تشترك مع الكرة في نفس المركز وطول نصف القطر. على سبيل المثال لجميع خطوط الطول فوق سطح الكرة الأرضية هي دوائر عظمى وخط الإستواء فقط دون غيره باقي خطوط العرض الأخرى هو دائرة عظمى

هندسة ريمان / هندسة ناقصية

هندسة بيضوية

الفصل العاشر
الهندسة الاهليجية
(Elliptic geometry)

١٠-١ البديهية المميزة للهندسة الاهليجية

البديهية المميزة للهندسة الاقليدية تنص على انه من نقطة معلومة، يمكن رسم موازي واحد فقط لمستقيم معلوم. من الناحية الاخرى، المظهر المميز للهندسة المستوية الهذلولية هو الفرض بوجود اكثر من موازي واحد للمستقيم من نقطة معلومة. من هنا تأتينا فرضية ثالثة، هي لايمكن رسم خط من نقطة معلومة ويوازي خطا معلوما. هذه هي البديهية المميزة للهندسة الاهليجية. ان اول من اشار الى هذه البديهية التي هي تناقض بديهية التوازي لاقليدس هو العالم الالماني برنهارد ريمان (١٨٢٦-١٨٦٦) في عام ١٨٥٤.

لقد ميز بين فكرة المستقيم غير منته والمستقيم غير محدود.

نفرض اننا اخذنا خطا مرسوما حول كرة، اي انه، دائرة. ان طوله منته، حيث له محيط معلوم. لكنه غير محدود في المفهوم الذي فيه نستمر حول الكرة بدون توقف. ان هذا لايناقض بديهية التوازي فقط لكن يناقض الفرضية بان المستقيمات غير منتهية في الطول. وبهذا تكون الكرة هي نموذج لهذه الهندسة، حيث نقاط الكرة ودوائرها العظمى تمثل نقاط ومستقيمات هذه الهندسة.

بما ان الدوائر العظمى تتقاطع دائما، فان المستقيمين يتقاطعان دائما، ولذلك لاتوجد مستقيمات

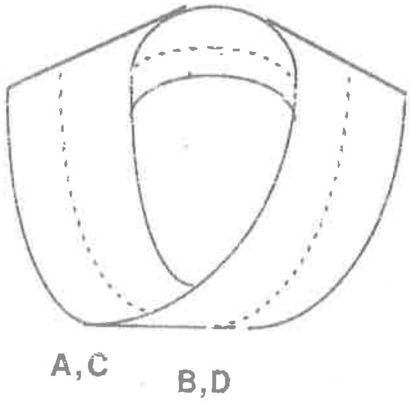
موازية للمستقيم. على كل حال، الحقيقة بان الدوائر العظمى تتقاطع في نقطتين مختلفتين فان المستقيمين يتقاطعان في نقطتين. وكذلك بما ان توجد عدد غير منتهه من دوائر عظمى تمر بنقطتين متقابلتين بالقطر، فان النقطتين لاتعينان دائما مستقيما واحدا فقط. هذا يعني، حتى لو ان بديهية التوازي متحققة، فان بديهيات الوقوع غير متحققة، والتحول من الهندسة الاقليدية الى الهندسة الاهليليجية لايمكن ان يتم بسهولة كما يتم من الهندسة الاقليدية الى الهندسة الهذلولية.

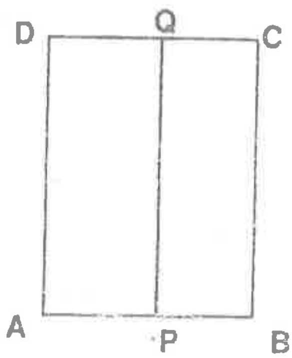
يوجد نوعان من الهندسة الاهليليجية، الاولى هي الهندسة الاهليليجية الاحادية (single elliptic geometry) والهندسة الاهليليجية المزدوجة (double elliptic geometry).

جاءت التسمية احادية ومزدوجة من الحقيقة بان اي مستقيمين يتقاطعان بنقطتين في الهندسة الاهليليجية المزدوجة وفي نقطة واحدة فقط في الهندسة الاهليليجية الاحادية.

نلاحظ حقيقة اخرى، ان المستوي الاهليليجي في الهندسة الاهليليجية المزدوجة يتميز بان سطحه له جهتين، مثلا كرة التي فيها جهتين تميز عادة بتسميتها واحدة الداخل والاخرى الخارج. في الهندسة الاهليليجية الاحادية، يتميز المستوي بان سطحه له جهة واحدة، كمثال بسيط على هذا ورقة موفيس (Mobius leaf).

نأخذ قطعة مستطيلة طويلة وضيقة من الورق ABCD، نكون سطحا بربط الجهتين المتقابلتين AB و CD بعد تدويرنا اولا احداهما، ولتكن CD، حول منتصفها في زاوية 180°. الزوايا C و D ستنطبق مع الزوايا A و B، على التوالي.





شكل ١.٦

ان جهتـــي السطـح ستكون غير قابلة للتمييز. بكلمات اخرى، السطح له جهة واحدة.

طريقــة واحـــدة للتمييز بين السطح الذي له جهة واحـدة والسـطح الذي لـه جهتيـــن هو بتثبيت نقطة على السطح واتجاه الدوران حوله.

اذا كانت النقطة تصف مســارا مغلقا، فان السطح يكون له جهتين، عندما النقطة ترجع الى موقعها الاولي، الاتجاه النهائي للـدوران ينطبـق مع الاتجـاه الاول. في السطح الذي له جهة واحدة، يوجد مسار مغلق الذي فـيه الاتجاهين الاصلي والنهائي للدوران متعاكسين. يمكن ان يبين هذا برسم مستقيم PQ في منتصف المستطيل ABCD وملاحظـــة المسار على السطح الناتج للورقة. التقدم على PQ سيرجع الى موقعه الاصلي راسا على عقب.

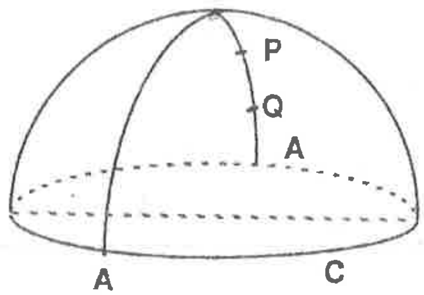
١-٢. *النماذج*

نحصــل على نمـوذج للهندسة الاهليليجية الاحادية وذلك بأخذ نصف الكرة فقط، محددة بالدائرة C، وتمثيل نقاطها واقواس الدوائر العظمـى بنقــاط ومستقيمات

المستوي.

بما ان المستقيمات الاهليليجية مغلقة، كل نقطة A على الدائرة C يجب تنطبق مع النقطة 'A المقابلة قطريا، لذلك قوس دائرة عظمى مع نهايتيه A و 'A تمثل مستقيما مغلقا.

كذلك، اذا كانت PQ تمثل اي قطعة على المستقيم، فانه من غير المعروف اي من القطعتين المتعينتين من P و Q نقصد. ذلك، في الشكل التالي، القطعة PQ يمكن ان تكون القطعة المنقطة او القطعة غير المنقطة التي تحتوي النقطة A، التي تنطبق مع النقطة 'A التي تقابلها قطريا.



شكل ١٠٧

الزاوية θ بين المستقيمين في المستوي الاهليليجي تؤخذ لتكون الزاوية بين القوسين المناظرين للمستقيمين،وتكون الزاوية دائما اصغر من 180° هذا الاتفاق ضروري لكي يكون الضلعان و الزاوية المحددة بهما يعينون مثلثا واحدا على السطح.

تكون الكرة كنموذج للهندسة الاهليليجية المزدوجة حيث النقاط و الدوائر العظمى تمثل نقاط وخطوط هذه الهندسة.

مبرهنة ١

اي مستقيمين في الهندسة الاهليليجية

المزدوجة يتقاطعان في نقطتين ويحيطان منطقة لمساحة منتهية A، حيث $A \neq 0$.

عدد من المبرهنات المشتركة للهندسة الاحادية والمزدوجة سنوضحها فيما يلي.

مبرهنة ٢

العمودان على نفس المستقيم يتقاطعان في نقطة.

نستنتج هذه المبرهنة من البديهية المميزة لهذه الهندسة، حيث ان الخطين في المستوي يتقاطعان دائما.

من المناسب ان نفكر بان سطح الارض هو كرة تامة. خطوط الطول هي نماذج للخطوط العمودية على خط الاستواء وبما ان كل هذه الخطوط تتقاطع في القطبين الشمالي والجنوبي، نوضحها في المبرهنة التالية.

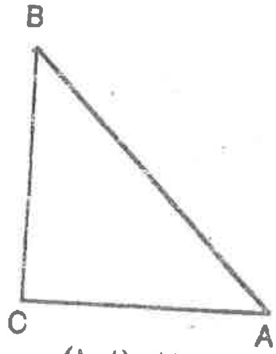
مبرهنة ٣

الاعمدة على كل النقاط لمستقيم تلتقي في نقطة تدعى قطب الخط، وبالعكس كل مستقيم يمر بالقطب يكون عموديا على المستقيم.

المسافة q من قطب مستقيم للمستقيم، هي المسافة القطبية للمستقيم.

مبرهنة ٤

في اي مثلث ABC ، الذي فيه $\angle C = 90^\circ$ ، $\angle A$ و $\angle B$ تكون اصغر من، تساوي او اكبر من 90 نسبة الى ان القطعة BC اصغر من، تساوي، او اكبر من المسافة القطبية q.



الشكل (١٠٨)

توضح المبرهنة بالشكل، حيث
$\angle B = \angle C = 90$ ، $\angle A < 90$ ، و $BC < q$.
فان $\angle A + \angle B + \angle C > 180$
ونفس الشكل يوضح المبرهنة التالية:

مبرهنة ٥

مجموع زوايا مثلث هو اكبر من $180°$.

البرهان

لتكن C ,B نقطتين مختلفتين على مستقيم l. نرسم مستقيميين عموديين على l من C ,B. يتقاطع هذان المستقيمان في نقطة A.
و لذلك مجموع زوايا المثلث ABC هو اكبر من 180.

١٠–٣ جدول لمقارنة الهندسة الاقليدية والهندسة اللااقليدية

	الاقليدية	الهذلولية	الاهليليجية
يتقاطع المستقيمان في	نقطة واحدة في الاكثر	نقطة واحدة على الاكثر	نقطةواحدة (الاحادية) نقطتان (المزدوجة)
ليكن l مستقيما و P نقطة لا تقع علىl فانه.	يوجد موازي واحد وواحد فقط للمستقيم l من P	يوجد موازيان للمستقيم l من P	لايوجد موازي الى l من P.
يفصل المستقيم الى نصفين	بواسطة نقطة	بواسطة نقطة	كلا
اذا قطع مستقيم احد مستقيمين متوازيين فانه،	يقطع الآخر	قد يقطع او لايقطع	——
عمودان على نفس المستقيم يكونان	متوازيين	غير متوازيين	متقاطعان
مجموع زوايا مثلث	يساوي زاويتان قائمتان	اقل من زاويتين قائمتين	اكثر من زاويتين قائمتين

الجزء الرابع

الهندسة الاسقاطية

يتكون الجزء الرابع من الفصول الحادي عشر الى الثالث عشر. سنقدم في الفصل الحادي عشر دراسة عن المستوى الاسقاطي بطريقة تركيبية.

ان دور كل بديهية يكون ضروريا لوصف المستوي الاسقاطي ليعطي للطالب فهما جيدا عن النظام البدهي.

تحتوي بداية الفصل الثاني عشر على وسائل جبرية ضرورية لبناء نموذج تحليلي عن المستوى الاسقاطي.

مواضيع مختارة عن المستوي الاسقاطي التحليلي التي توازي المواضيع في الفصل الحادي عشر لتؤكد الفرق بين الطريقة التركيبية والتحليلية.

ثم نختتم الجزء بتصنيف هندسات جزئية من الهندسة الاسقاطية باستعمال زمر التحويلات.

سيعطى البناء الفعلي لمختلف الزمر الجزئية من زمرة التحويلات الاسقاطية والخواص التي لاتتغير لكل زمرة جزئية.

الفصل الحادي عشر

الهندسة الاسقاطية التركيبية

Synthetic Projective Geometry

سندرس المستوي الاسقاطي آخذين بنظر الاعتبار الافكار الاساسية لهذه الهندسة بدون التعمق في المواضيع.

يتضمن المستوي الاسقاطي المجموعة π لكلمات اولية تدعى نقاط ومجموعات جزئية من π تدعى مستقيمات والتي هي ايضا غير معرفة. سيرمز لنقاط π بالحروف الكبيرة $A, B, C, \ldots$ ومستقيمات π بالجروف الصغيرة $l, m, n, \ldots$.

والان نعيد ذكر بديهيات π التي ذكرت في الفصل الاول.

١١-١ بديهيات الوجود والوقوع

١- لاي نقطتين مختلفتين A و B في π ، يوجد مستقيم واحد فقط يحتويهما ، ذلك يعني، اذا كان $A, B \in \pi$ بحيث ان $A \neq B$.

$A, B \in L$ و $A, B \in m$ ، فان $l = m$.

٢- كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل.

٣- توجد في الاقل نقطة واحدة A ويوجد في الاقل مستقيم واحد l بحيث ان A لاتنتمي الى l.

٤- اي مستقيمين مختلفين يشتركان في نقطة واحدة في الاقل.

رموز

اذا كان $P \in l$ ، فاننا نقول: "النقطة P تقع على l"، او "P على l"، وكذلك: "l يمر من P"، او "l يحتوي P ".

اذا كان $A \in l$ و $B \in l$ ، فنرمز للمستقيم l بالرمز AB.

نقطة تقاطع المستقيمين l و m هي النقطة التي تنتمي الى المستقيمين l و m، ويرمز لها بالرمز: $l \cap m$.

مبرهنة ١

اي مستقيمين مختلفين l و m في π يتقاطعان بنقطة واحدة وواحدة فقط.

ليكن l و m مستقيمين مختلفين في π ، اي ان $m \neq l$. من البديهية ٤، توجد نقطة A بحيث ان $A \in l$ و $A \in m$.

نفرض وجود نقطة اخرى B، $B \neq A$ بحيث ان $B \in l$ و $B \in m$. فانه من البديهية ١، $l = m$ وهذا تناقض لان $l \neq m$. لذا فان فرضيتنا خاطئة.

وعليه، فان l و m يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.

مبرهنة ٢

اية نقطة في π يمر بها ثلاث مستقيمات في الاقل.

البرهان

لتكن P اية نقطة في π.

من البديهية ٣ ،يوجد مستقيم l بحيث ان P لاتقع على l. كذلك من البديهية ٢، توجد على الاقل ثلاث نقاط على l، ولتكن A_1, A_2, A_3.

من البديهية ١ ،توجد المستقيمات PA_1, PA_2, PA_3 التي تمر من P وتكون مختلفة.

١١-٢ مبدأ الثنائية *(Principle of duality)*

ان نقاط ومستقيمات المستوي الاسقاطي π تتصف بخاصية مميزة وهي ان المستقيم والنقطة هما عناصر ثنائية في المفهوم الذي فيه اية عبارة صحيحة تتضمن عناصر π تبقى صحيحة عند تبديل النقطة والمستقيم احدهما محل الآخر.

تعريف ١

عبارتان تكون احداهما ثنائية (dual) للاخرى اذا امكن حصول واحدة من الاخرى بتبديل الكلمتين "النقطة" و "المستقيم"، احداهما محل الاخرى.

عبارة تدعى ثنائية نفسها (self dual) اذا حصلنا على نفس العبارة بتبديل الكلمتين "النقطة" و "المستقيم".

فمثلاً، تعريف المثلث هو ثنائي نفسه.

لذلك، فان مبدأ الثنائية يكون كما يلي:

مبدأ الثنائية

اية عبارة صحيحة تتعلق بتعيين النقاط والمستقيمات في المستوي الاسقاطي تنتج عبارة ثانية صحيحة نحصل عليها من العبارة الاولى بتبديل الكلمتين "النقطة" و "المستقيم" احداهما محل الاخرى.

ان مبدأ الثنائية يستنتج من الحقيقة بان تبديل الكلمتين "النقطة" و "المستقيم" احداهما محل الاخرى في البديهيات الاربعة، نحصل على عبارات صحيحة.

بعبارة اخرى، يتحقق مبدأ الثنائية على البديهيات.

لذا، فان اية عبارة نحصل عليها من البديهيات تكون صحيحة.

ذلك، مبرهنة ١ هي ثنائية بديهية ١، مبرهنة ٢ هي ثنائية بديهية ٢، بديهية ٣ هي ثنائية نفسها، وثنائية بديهية ٤ لاي نقطتين يوجد على الاقل مستقيم واحد يحتويهما. هذه العبارة تكون صحيحة من بديهية١ . ان مبدأ الثنائية، كما سنرى فيما بعد، يلعب دورا

مهما في برهنة مبرهنات في الهندسة الاسقاطية.

تعريف ٢

بشكل على π نعني اي مجموعة جزئية من π وغير خالية. بصورة خاصة، سنركز اهتمامنا على الاشكال التالية.

تعريف ٣

حزمة مستقيمات (Pencil of Lines) هي مجموعة كل المستقيمات التي تمر بنقطة O. النقطة O تدعى راس الحزمة (vertex).

حزمة نقاط (pencil of points) هي مجموعة كل النقاط التي تقع على مستقيم l. المستقيم l يدعى محور الحزمة. (axis)

١١-٣ التشكيلات وبديهية فانو (Configuration and Fano's Axiom)

تعريف ٤

مجموعة من m من النقاط و n من المستقيمات في π بحيث ان كل نقطة من m من النقاط يمر بها عدد ثابت وهو a من المستقيمات وكل مستقيم من n من المستقيمات يحتوي على عدد ثابت وهو b من النقاط هي تشكيل (m_a, n_b). كمثال يكون تشكيل المثلث $(3_2, 3_2)$.

مبرهنة ٣

اذا كان (m_a, n_b) تشكيلا في المستوي الاسقاطي، فان $ma = nb$.

البرهان

بما ان كل نقطة من m من النقاط يمر بها a من المستقيمات، فانه ينبغي ان يكون ma من المستقيمات. لكن كل مستقيم يحتوي على b من النقاط، اي ان المستقيم يتكرر b من المرات.

لذلك، يكون عدد الخطوط $n = \frac{ma}{b}$

اي ان $ma = nb$

تعريف ٥

يقال عن تشكيل انه ثنائي نفسه (self-dual) اذا احتوى على عدد النقاط كعدد المستقيمات.

$(m_a\ n_b)$ هو ثنائي نفسه اذا كان $m = n$.

في هذه الحالة، $a = b$، لان $am = mb$. اي ان التشكيل ثنائي نفسه يكون (m_b, m_b). سنرمز لهذا التشكيل بالرمز (m_b). كمثال، المثلث هو (3_2) تشكيل ثنائي نفسه.

عندما $b = 1$، التشكيل المحتمل الوحيد هو نقطة وخط يحتويها.

اذا كان $b = 2$، فان (m_2) هو تشكيل يتضمن m من النقاط

و m من المستقيمات. كمثال، النموذج الذي تشكيله (5_2) يعطى بالشكل التالي:

شكل (١٠٩)

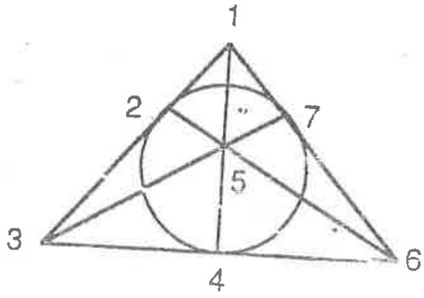
الحالة $b\geq3$ تعطينا تشكيلات عديدة، الطريقة العامة لوضع جدول لتشكيل من نوع (m_b)،

ليكن $1,2,\ldots,m$ ترمز الى m من النقاط و $[1],[2],\ldots,[m]$ ترمز الى m من المستقيمات. نكتب هذه المستقيمات في صف و b من النقاط الموجودة على مستقيم معين تكون في عمود تحت المستقيم. فيكون في هذا الترتيب عمودين مختلفين لايشتركان باكثر من نقطة واحدة وكل رقم يجب ان يقع في b من الاعمدة، لان كل نقطة تكون محتواة في b من المستقيمات. كمثال على ذلك، نأخذ التشكيل (7_3)

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
1	1	1	2	2	3	3
2	4	6	4	5	4	5
3	5	7	7	6	6	7

نلاحظ حقيقتين مهمتين حول هذا التشكيل. اولهما، انه من الممكن تشكيل واحد فقط، طالما كل الاعمدة ترتب بطريقة واحدة وتنتج نموذجا واحدا، حيث اذا بدلنا 4 الى 5 ، كمثال، في عمود، يجب ان نبدل كل 4 الى 5 والعكس بالعكس. ثانيا، نجد من الصعوبة تمثيل هذا التشكيل بمخطط، حيث انه لايوجد تمثيل مالم نعتبر 2,4,7 تقع على مستقيم واحد كما في الشكل

التالي:



شكل (١١٠)

لذلك، لايمكن ان نسمح المستوي الاسقاطي بقبول تشكيل (7_3) لسببين: اولا، لايسمح المستوي الاقليدي بتشكيل (7_3) بسبب المستقيمات المنحنية، وثانيا، سيقتصر المستوي الاسقاطي على سبع نقاط فقط، حيث مع اي سبع نقاط نحصل على تشكيل واحد فقط.

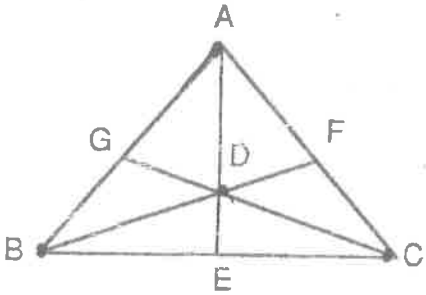
طالما غرضنا توسيع المستوي الاسقاطي، يكون من الضروري ان نضيف بديهية تؤكد على عدم وجود تشكيل (7_3).

من اجل ذلك، يجب ان نناقش رباعيات الزوايا التامة.

تعريف ٦ دالهنا ج مياحي

اربع نقاط في π ، لاتوجد اي ثلاثة منها على مستقيم واحد، وستة مستقيمات تتعين من ازواج من هذه النقاط تكون رباعي زوايا تام (a complete quadrangle).

تدعى هذه النقاط رؤوس والمستقيمات التي تتعين من هذه النقاط اضلاع رباعي الزوايا التام. سنرمز لرباعي الزوايا التام برؤوسه وعادة نطلق عليه رباعي زوايا، ونقول رباعي الزوايا (ABCD) كما في الشكل التالي:



شكل (١١١)

ضلعان في رباعي الزوايا يقال عنهما متقابلين اذا لم يشتركا باي رأس. توجد ثلاثة ازواج من هذه الاضلاع المتقابلة في رباعي الزوايا. نقطة تقاطع زوج من الاضلاع المتقابلة لرباعي الزوايا تدعى نقطة قطرية (a diagonal point) لرباعي الزوايا. رباعي الزوايا له ثلاث نقاط قطرية.

في هذا الشكل، تكون الرؤوس A, B, C, D. فالاضلاع هي BC, BD, CD, DA, AB, AC. الضلع المقابل للضلع AB هو CD ونقطة تقاطعهما G هي نقطة قطرية لرباعي الزوايا (ABCD). وبنفس الطريقة، E و F نقطتان قطريتان.

قد تقع النقاط E, F, G على مستقيم واحد او لاتقع. اذا اخذناها على مستقيم واحد، نحصل على تشكيل (7_3). طالما لانرغب بادخال تشكيل (7_3)، سنأخذ النقاط لاتقع على مستقيم واحد.

يقودنا هذا الى بديهية فانو:

بديهية ٥: النقاط القطرية لرباعي الزوايا التام لاتقع على مستقيم واحد.

لذلك النقاط القطرية لرباعي الزوايا التام تكون مثلثا يدعى المثلث القطري لرباعي الزوايا التام.

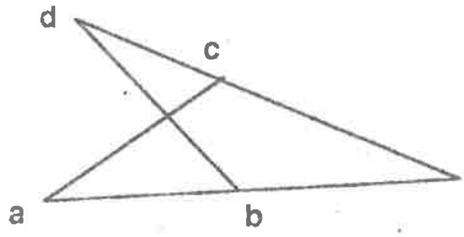
يجب ان نلاحظ، انه في اي وقت نضيف بديهية جديدة الى البديهيات الاربعة الاصلية، يجب ان نبين ان البديهية الجديدة تحقق مبدأ الثنائية. غير ذلك،

لايتحقق مبدأ الثنائية في المنظام الموسع. لبيان ان ثنائية بديهية ٥ هي عبارة صحيحة نأخذ التشكيل $(6_2, 4_3)$ ، ثنائي رباعي زوايا تام.

تعريف ٧

اربعة مستقيمات في π ، لايوجد اي ثلاثة منها تلتقي بنقطة واحدة، وست نقاط تتعين من تقاطع ازواج من هذه المستقيمات، تكون رباعي اضلاع تام (a complete quadrilateral).

المستقيمات التي تكون رباعي اضلاع تام تدعى اضلاعه والنقاط المتعينة من المستقيمات تدعى رؤوسه. نرمز لرباعي الاضلاع التام باضلاعه، فمثلا، رباعي اضلاع تام (abcd) كما في الشكل التالي:



شكل (٢١٧)

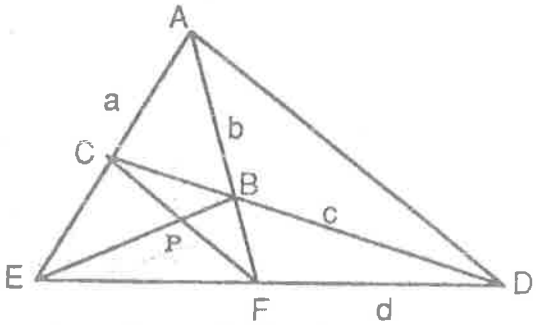
راسان لرباعي اضلاع تام يقال عنهما متقابلين اذا لم يقعا على نفس الضلع. توجد ثلاثة ازواج من هذه الرؤوس المتقابلة في رباعي اضلاع تام. المستقيم الواصل بين زوج من الرؤوس المتقابلة لرباعي اضلاع تام يدعى خطا قطريا (a diagonal line).

والان نبرهن ثنائية بديهية فانو (بديهية ٥) في المبرهنة التالية.

مبرهنة ٤ .(ثنائية بديهية ٥)

الخطوط القطرية لرباعي اضلاع تام لاتلتقي بنقطة واحدة.

البرهان



شكل (١١٣)

ليكن (abcd) رباعي اضلاع تام. فان الرؤوس لهذا الرباعي هي:

$a \cap b = A$, $c \cap d = D$
$b \cap c = B$, $a \cap d = E$
$a \cap c = C$, $b \cap d = F$

الخطوط القطرية تكون: AD, BE, CF

لتكن $CF \cap BE = P$

يجب ان نبرهن ان P لاتقع على AD.

نأخذ رباعي الزوايا التام (BCEF). نقاطه القطرية هي: P, A, D

من بديهية ٥، النقاط القطرية P, A, D لاتقع على مستقيم واحد.

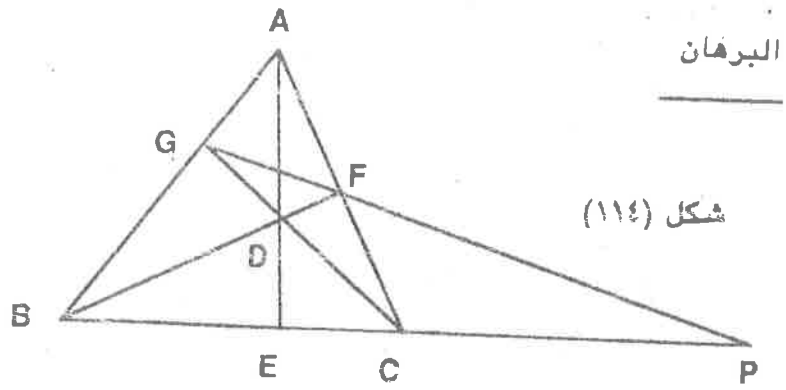
لذلك، فان P لاتقع على المستقيم AD.

المبرهنة التالية نستنتجها من بديهية ٥.

مبرهنة ٥

المستقيم في مستوي اسقاطي يحقق البديهيات الخمس يحتوي على اربع نقاط في الاقل.

البرهان



شكل (١١٤)

نأخذ رباعي زوايا (ABCD) كما في الشكل.

لتكن E, F, G نقاطه القطرية. بما ان النقطتين G و F لاتقعان على المستقيم BC، فان المستقيمين GF و BC مختلفان.

لذلك يجب ان يتقاطعا في نقطة واحدة، ولتكن P.

B ≠ P، لانه اذا كان B = P، فان GF يقطع AB في نقطتين مختلفتين B و G وهذا يناقض مبرهنة ١.

بنفس الطريقة، C ≠ P. وكذلك من بديهية ٥، E ≠ P.

هكذا، P هي النقطة الرابعة على الخط BC، التي تختلف عن B، C، و E.

١١-٣ تمارين

١- برهن على ان رباعي الزوايا التام هو تشكيل $(4_3, 6_2)$ وان رباعي الاضلاع التام هو تشكيل $(6_2, 4_3)$.

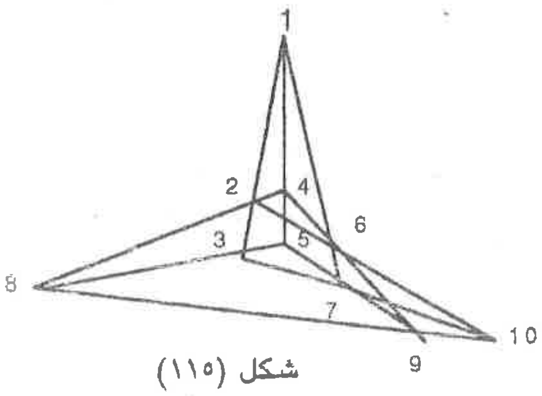
٢- برهن على انه في مستوي اسقاطي يحقق البديهيات الخمس كل نقطة يمر بها على الاقل اربعة خطوط.
٣- برهن على انه توجد في مستوي اسقاطي يحقق البديهيات الخمس ثلاث عشر نقطة على الاقل.
٤- هل تستطيع ان تزرع سبع اشجار في سبعة خطوط بحيث ان على كل خط ثلاث اشجار؟ اعطي الاسباب.
٥- هل تستطيع ان تزرع عشر اشجار في عشرة خطوط بحيث ان كل خط يحتوي على ثلاث اشجار ؟ اعط الاسباب.

١١-٤ بديهية ديزارك (Desarques Axiom)

لناخذ الجدول التالي لتشكيل (10_3)

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]
1	1	1	2	2	3	3	4	5	8
2	4	6	4	6	5	7	6	7	9
3	5	7	8	10	8	10	9	9	10

يجب ان يلاحظ ان بكتابة المستقيمات التي تحتوي النقطة ١، يكون عندنا عدة احتمالات، طالما توجد عشر نقاط، هذه ليست الحالة في تشكيل (7_3) ، حيث من الممكن ان ثلاثة مستقيمات تشترك نقطة واحدة بالاساس في طريقة واحدة. على كل حال، في حالة (10_3)، نحصل على 10 تشكيلات مختلفة. كذلك، من الممكن تمثيل معظم التشكيلات (10_3) بمخطط. التشكيل المذكور اعلاه يدعى تشكيل ديزارك. ويمثل بالشكل التالي:



شكل (١١٥)

تعريف ٨

يكون مثلثان في π منظورين (perspective) من نقطة O اذا وجد تناظر متباين بين رؤوس المثلثين بحيث ان كل المستقيمات الواصلة بين الرؤوس المتناظرة تمر من نقطة O. تدعى O مركز المنظورية.

رمز

يرمز للمثلثين ABC و A'B'C' المنظورين من نقطة O بحيث ان A,B,C تناظر A',B',C' على التوالي، بالرمز

$$\Delta ABC \overset{O}{\overline{\wedge}} \Delta A'B'C'$$

ان ثنائي تعريف ٨ يكون كما يلي:

يكون مثلثان في π منظورين من مستقيم l اذا وجد تناظر متباين بين اضلاع المثلثين بحيث ان كل نقاط تقاطع الاضلاع المتناظرة تقع على المستقيم l. يدعى l محور المنظورية.

رمز

اذا كان ΔABC و $\Delta A'B'C'$ منظورين من l بحيث ان AB, BC, CA تناظر A'B', B'C', C'A' على التوالي، يرمز لهذا:

$$\Delta ABC \overset{l}{\overline{\wedge}} \Delta A'B'C'$$

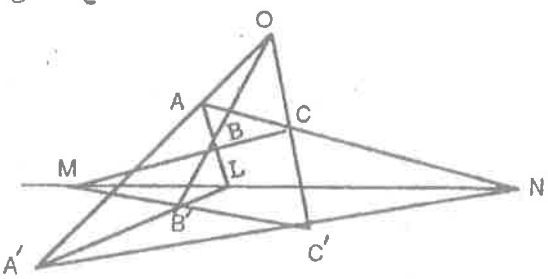
كمثال، في الشكل السابق، تشكيل ديزارك، المثلث المتكون من 6 ,4 ,2 والمثلث المتكون من 3,5,7 منظورين من 1 لانه يوجد تناظر متباين بحيث ان كل المستقيمات التي تمر من الرؤوس المتناظرة تلتقي بالنقطة 1 • كذلك، يكونان منظورين من المستقيم [10] ، لان نقاط تقاطع الاضلاع المتناظرة للمثلثين تقع على المستقيم [10]. ونفس الشيء يبين لاي مثلثين في هذا التشكيل.

بكلمات اخرى، لتقبل تشكيل ديزارك، من الضروري ان يحقق المستوي الخاصية بانه اذا كان مثلثان منظورين من نقطة، فانهما يكونان منظورين من مستقيم. المستوي الأسقاطي الذي عرفناه (الذي يحقق البديهيات من ١ الى ٥) ليس ضروريا ان يحقق هذه الخاصية. لذلك، من الضروري ان ندخل بديهية ديزارك التالية.

بديهية ٦

اذا كان مثلثان في مستوي اسقاطي منظورين من نقطة، فانهما يكونان منظورين من مستقيم.

هذا يعني، اذا كان ΔABC و $\Delta A'B'C'$ مثلثين بحيث ان AA', BB', CC' تلتقي جميعا في نقطة O (اي ان المثلثين منظوران من O)، فان النقاط $L = AB \cap A'B'$ ، $M = BC \cap B'C'$ و $N = CA \cap C'A'$ تقع على مستقيم واحد.



شكل (١١٦)

سنبرهن الان ثنائية بديهية ٦ في المبرهنة التالية.

مبرهنة ٦ (ثنائية بديهية ديزارك)

اذا كان مثلثان في مستوي اسقاطي منظورين من مستقيم، فانهما يكونان منظورين من نقطة.

البرهان

ليكن ABC و A'B'C' مثلثين منظورين من مستقيم l، ليكن $A'B' \cap AB = L$، $B'C' \cap BC = M$ و $A'C' \cap AC = N$ فان L, M, N تقع على المستقيم l. يجب ان نبرهن على ان المستقيمات AA', BB', CC' تلتقي بنقطة.

لتكن $O = BB' \cap CC'$ سنبرهن ان AA' يمر من O. المثلثان LBB' و NCC' منظورين من M، اي ان

$$\Delta LBB' \quad \overset{M}{\overline{\overline{\wedge}}} \quad \Delta NCC'$$

لذلك، من بديهية ٦، النقاط $LB \cap NC = A$، $BB' \cap CC' = O$ و $B'L \cap C'N = A'$ تقع على مستقيم واحد. ان هذا يبين ان AA' يمر من O والمثلثين يكونان منظورين من النقطة O.

١١-٤ تمارين

١- في التشكيل (10_3) المذكور في هذا البند (شكل ١١٥)، جد مثلثين منظورين من النقطة 2 وجد محور المنظورية للمثلثين.

٢- ليكن (ABCD) رباعي زوايا تام. نقاطه القطرية هي النقاط $E = AD \cap BC$ و $F = BD \cap Ac$ و $G = CD \cap AB$. برهن ان $L = EF \cap AB$ ، $M = FG \cap BC$ ؛ و $N = GE \cap AC$ تقع على مستقيم واحد.

٣- اكتب جدولين مختلفين للتشكيل (10_3).

١١-٥ المجموعات التوافقية *(Harmonic Sete)*

سنناقش الان نتيجة اخرى لبديهية فانو، اي، مفهوم المجموعات التوافقية. نحصل على بعض خواص المجموعات التوافقية كذلك من بديهية ديزارك. على كل حال، سنبتدأ بتعاريف اساسية.

تعريف ٩

ليكن F شكلا و P نقطة لاتنتمي الى F، نقاط F والنقطة P تعين حزمة مستقيمات مع P كرأس تدعى قطع نقطي (point section) للشكل F من P.

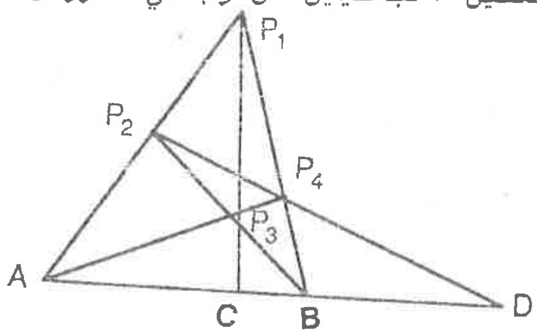
ثنائي تعريف ٩

ليكن F شكلا و l مستقيما لاينتمي الى F، مستقيمات F والمستقيم l تعين حزمة نقاط مع l كمحور تدعى قطع خطي (line section) للشكل F من l.

كمثال، قطع خطي لرباعي زوايا تام يتعين من مستقيم l هو حزمة من ست نقاط على l. كذلك، قطع نقطي لرباعي زوايا تام يتعين من نقطة P ليست على رباعي الزوايا هو حزمة من اربعة مستقيمات.

تعريف ١٠

مجموعة مرتبة من اربع نقاط A, B, C, D على مستقيم l هي مجموعة توافقية من نقاط اذا وجد رباعي زوايا تام فيه A و B نقطتين قطريتين و C و D تقعان على الضلعين الباقيين من رباعي الزوايا التام.



شكل (١١٧)

من التعريف ٩، من الواضح ان A, B, C, D تكون مجموعة توافقية اذا كانت هي القطع الخطي لرباعي الزوايا التام المتعين من خط يحتوي A و B كنقطتين قطريتين لرباعي الزوايا.

الرمز $H(AB, CD)$ يرمز للعبارة "A, B, C, D تكون مجموعة توافقية".

بما ان A و B تلعبان نفس الدور، فانه يمكن ان تستبدلا، اي ان:

$$H(AB, CD) \longleftrightarrow H(BA, CD)$$

بنفس الطريقة، يمكن ان تستبدل النقطتين C و D الواقعتين على الضلعين الباقيين:

$$H(AB, CD) \longleftrightarrow H(AB, DC)$$

بهذا، يكون عندنا المبرهنة التالية.

مبرهنة ٧

$$H(BA, CD) \longleftrightarrow H(BA, DC) \longleftrightarrow H(AB, DC)$$

$H(AB, CD) \longleftrightarrow$

قاعدة لغوية

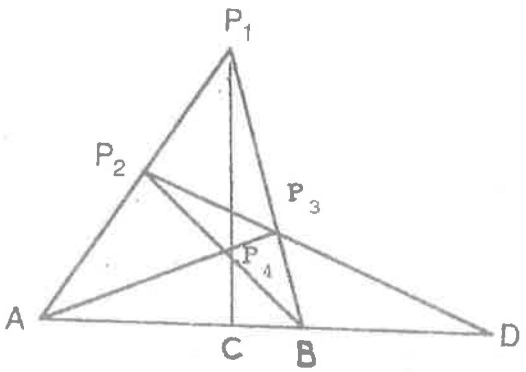
اذا كان $H(AB, CD)$ ، فانه يقال ان D النقطة التوافقية الرابعة للنقاط A, B, C ، او هي المرافق التوافقي للنقطة C بالنسبة الى A و B.

من مبرهنة ٧، يستنتج اذا كانت D مرافق توافقي الى C بالنسبة الى A و B، فان C هي مرافق توافقي الى D بالنسبة الى A و B.

مبرهنة ٨

ليكن A, B, C ثلاث نقاط مختلفة على مستقيم l. فانه من الممكن ايجاد مرافق توافقي الى C بالنسبة الى A و B.

البرهان



شكل (١١٨)

لتكن P_1 نقطة لاتقع على l، نصل AP_1 ، ولتكن P_2 نقطة على AP_1 بحيث ان $A \neq P2$ و $P_1 \neq P_2$. نصل CP_1 ، BP_2 ، و BP1. لتكن

$$P_4 = CP_1 \cap BP_2$$
$$P_3 = AP_4 \cap BP_1$$

فان $(P_1 P_2 P_3 P_4)$ هو رباعي الزوايا المطلوب، وفيه A و B نقطتين قطريتين و C نقطة على الضلع P_1P_4.

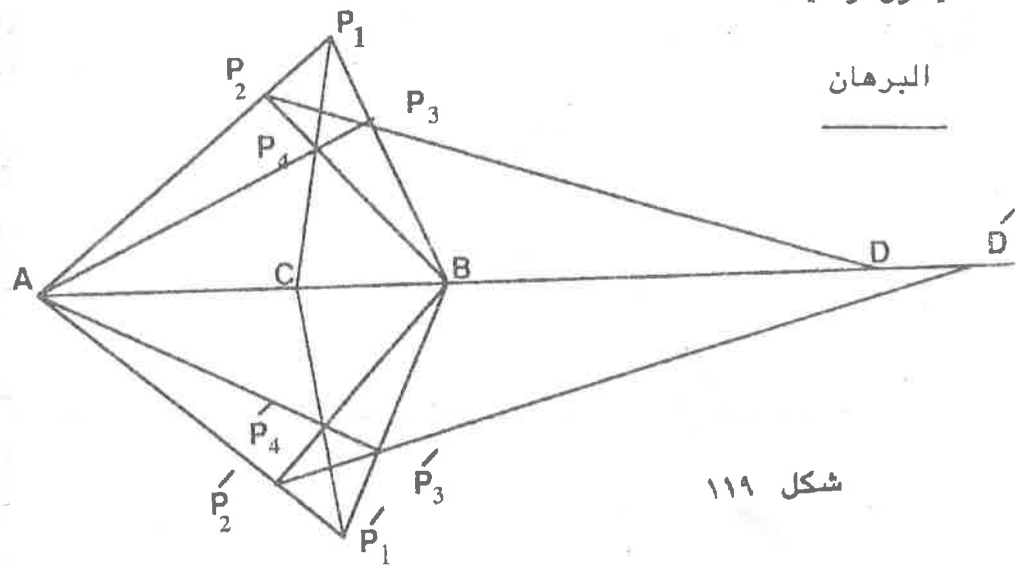
لتكن $D = P_2P_3 \cap l$

فتكون D هي المرافق التوافقي الى C بالنسبة الى A و B.

مبرهنة ٩ للطلاب

لتكن A, B, C ثلاث نقاط على مستقيم l، فان المرافق التوافقي للنقطة C بالنسبة الى A و B يكون وحيدا.

البرهان



شكل ١١٩

من مبرهنة ٨، لتكن D مرافق توافقي الى C بالنسبة الى A و B فيوجد رباعي زوايا تام $(P_1P_2P_3P_4)$.

لتكن 'D مرافق توافقي الى C بالنسبة الى A و B، فيوجد رباعي زوايا تام آخر $(P'_1P'_2P'_3P'_4)$ حيث ان

$$A = P_1P_2 \cap P_3P_4 = P'_1P'_2 \cap P'_3P'_4$$
$$B = P_1P_3 \cap P_2P_4 = P'_1P'_3 \cap P'_2P'_4$$
$$C = P_1P_4 \cap 1 = P'_1P'_4 \cap 1$$
$$D = P_2P_3 \cap 1, \; D' = P'_2P'_3 \cap 1$$

يجب ان نبرهن ان $D = D'$

من ثنائية بديهية ٦،

بما ان

$$\Delta P_1P_3P_4 \overset{O}{\overline{\overline{\wedge}}} \Delta P'_1P'_3P'_4 \longleftarrow \Delta P_1P_3P_4 \overset{1}{\overline{\overline{\wedge}}} \Delta P'_1P'_3P'_4$$
$$\Delta P_1P_2P_4 \overset{M}{\overline{\overline{\wedge}}} \Delta P'_1P'_2P'_4 \longleftarrow \Delta P_1P_2P_4 \overset{1}{\overline{\overline{\wedge}}} \Delta P'_1P'_2P'_4$$
$$O = P_1P'_1 \cap P_3P'_3 \cap P_4P'_4$$
$$M = P_1P'_1 \cap P_2P'_2 \cap P_4P'_4$$
$$\Longleftarrow O = M$$

لذلك،

$$\Delta P_2P_3P_4 \overset{O}{\overline{\overline{\wedge}}} \Delta P'_2P'_3P'_4$$

ومن بديهية ٦، النقطة $P_2P_3 \cap P'_2P'_3$ تقع على خط واحد مع النقطتين A و B، حيث ان

$$A = P_3P_4 \cap P_3'P_4'$$

و

$$B = P_2P_4 \cap P_2'P_4'$$

لكن $AB = l$ ، لذلك

$$P_2P_3 \cap P_2'P_3' \in l$$

$$l \cap P_2P_3 = D$$

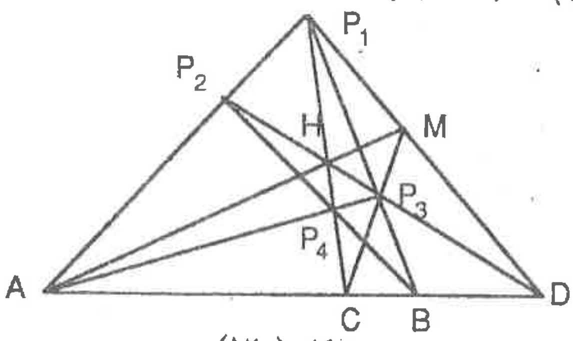
، $l \cap P_2'P_3' = D'$

$\longleftarrow$ $D = D'$

مبرهنة ١٠

$$H(AB,\ CD) \longleftrightarrow H(CD,\ AB)$$

البرهان



شكل (١٢٠)

يمكن ان تبرهن هذه المبرهنة بايجاد رباعي زوايا تام الذي فيه C, D نقطتين قطريتين.

$H\ (AB,\ CD)$ $\longleftarrow$ يوجد رباعي زوايا تام $(P_1\ P_2\ P_3\ P_4)$ بحيث ان :

$$A = P_1P_2 \cap P_3P_4$$
$$B = P_1P_3 \cap P_2P_4$$
$$C = P_1P_4 \cap l$$
$$D = P_2P_3 \cap l$$

حيث ان A, B, C, D تقع على المستقيم l. نصل P_3C و P_1D.

لتكن
$$M = P_3C \cap P_1D$$
$$H = P_1P_4 \cap P_2P_3$$

من الواضح ان
$$\Delta P_2P_4H \overset{l}{\underset{\wedge}{=}} \Delta P_1P_3M$$

لان
$$B = P_2P_4 \cap P_1P_3$$
$$C = P_4H \cap P_3M$$
$$D = P_2H \cap P_1M$$

وان B, C, D على l.

من ثنائية بديهية ٦ ، يكون ΔP_1P_3M و ΔP_2P_4H منظورين من نقطة. بما ان $A = P_1P_2 \cap P_3P_4$ ، فان MH يمر من A. بهذا يكون عندنا رباعيٌ زوايا تام (P_1HP_3M) ، وفيه $D = P_1M \cap P_3H$, $C = P_1H \cap P_3M$ و $A = MH \cap l$ و $B = P_1P_3 \cap l$

ومن هذا نستنتج ان $H(CD, AB)$ وبنفس الطريقة نبرهن الاتجاه الآخر.

نتيجة

$$H(AB, CD) \longleftrightarrow H(CD, AB) \longleftrightarrow H(CD, BA)$$
$$\longleftrightarrow H(DC, BA) \longleftrightarrow H(DC, AB) \longleftrightarrow$$
$$H(AB, DC) \longleftrightarrow H(BA, DC) \longleftrightarrow H(BA, CD)$$

١١-٥ تمارين

١- برهن ان النقاط لمجموعة توافقية تكون مختلفة.

٢- من مبدأ الثنائية، عرف مجموعة توافقية من

مستقيمات.

٣- لتكن ثلاثة مستقيمات تمر بنقطة، جد المستقيم الرابع بحيث ينتج مجموعة توافقية من مستقيمات.

٤- برهن ان القطع الخطي لرباعي زوايا تام المتعين من مستقيم يحتوي على نقطة قطرية واحدة فقط هو حزمة من خمس نقاط.

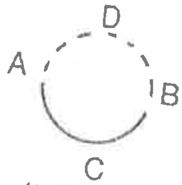
١١-٦ بديهيات الفصل *(Separation Axioms)*

نعرف مما تقدم ان المستقيم في المستوي الاسقاطي يحتوي على اربع نقاط في الاقل. وجود نقاط اكثر على المستقيم يتطلب بديهيات اضافية.

مجموعة جديدة من بديهيات تضمن وجود عدد غير منته من النقاط على المستقيم ترتبط مع المفهوم العام "للفصل" الذي نعرفه في حياتنا اليومية في حالات مثل غرفة في بيت تفصل عن غرفة اخرى بحائط، دولتين تفصل بينهما حدود دولية، قطعة من خيط تفصل الى جزئين بقطع واحد، او سلك دائري يفصل الى قطعتين بقطعين.

على المستقيم الاقليدي، نقطة واحدة C تفصل نقطة A من نقطة B بالمفهوم الذي فيه البداية من اي نقطة والتحرك باستمرار في نفس الاتجاه والمرور بالنقطة C.

هذا الوضع يختلف تماما، اذا كانت النقاط على دائرة



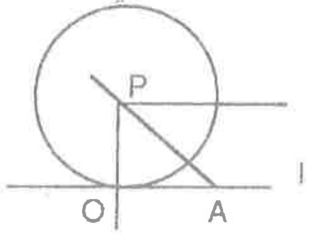
شكل (١٢١)

حيث ان A و B نهايتا قطعتان مختلفتان: واحدة، القطعة

بالخط الغامق، والاخرى، القطعة المنقطة. اذا كانت C في القطعة بالخط الغامق، يمكن التحرك من A الى B على القطعة المنقطة بدون المرور من C. لكن اذا وجدت نقطة D على هذه القطعة المنقطة، لايمكن التحرك من A الى B في اي اتجاه بدون المرور من واحدة او اخرى من النقطتين C او D.

هذا يعني ان نقطتين بدلا من واحدة تتطلب لفصل نقطتين على دائرة من زوج آخر من النقاط على الدائرة.

نفرض ان O نقطة على مستقيم l في المستوي الاقليدي و P مركز دائرة تمس l في O (كما في الشكل). فان اي مستقيم يمر من P يكون زاوية θ، $\theta \neq 90^\circ$ مع PO يقطع l في نقطة A. المستقيم الذي يصنع زاوية θ، $\theta = 90$ مع PO يكون موازيا الى l ومن ثم لايقطع l. ان هذا يفتقر الى تناظر متباين بين المستقيمات التي تمر من P ونقاط المستقيم I مثل عدم وجود جسر من جهة واحدة على نهر الى الجهة الاخرى. لاتوجد طريقة بواسطتها النقطة A تتحرك على المستقيم الاقليدي I الى يمين النقطة O وتستطيع الوصول الى نقطة في يسار O.



شكل (١٢٢)

في المستوي الاسقاطي، يختلف الوضع تماما. حيث يوجد جسر الى الجهة الاخرى، اذ كل مستقيم يمر من نقطة P للمستوي الاسقاطي يقطع l في نقطة A، و A تتحرك باستمرار من نقطة O، مستمرة في نفس الاتجاه، من الممكن ان ترجع A في آخر الامر الى نقطة البداية O

بالضبط كما لو كانت تتحرك على دائرة.

لذلك، المستقيم في المستوي الاسقاطي له خاصية دائرة، حيث يكون مثل منحني مغلق.

ان هذا يقودنا لفهم البديهيات التالية التي تتعلق بعلاقة اولية (غير معرفة) تدعى (الفصل). هذه البديهيات تصف ترتيب النقاط على دائرة، اي ان الفصل يكون لزوج من نقاط بزوج من نقاط.

رمز

الرمز AB / CD يستعمل ليرمز للفصل لزوج من نقاط A, B بزوج من نقاط C, D.

بديهيات الفصل(Separation Axioms)

بديهية ٧

الزوجان A, B و C, D لمجموعة توافقية من النقاط احدهما يفصل الآخر.

بتعبير آخر؛ اذا كان H(AB, CD) ، فان AB / CD.

بديهية ٨

اذا كان الزوجان A, B و C ,D_1 احدهما يفصل الاخر وكذلك الزوجان D_1 ,A و B ,D_2 احدهما يفصل الآخر، فان الزوجين A, B و C, D_2 احدهما يفصل الآخر.

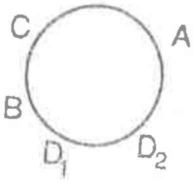
بتعبير آخر: اذا كان $AB / D_1\,C$

و $A\,D_1 / D_2\,B$

فان $AB / C\,D_2$

بديهية ٩

اذا كان الزوجان A, B و C, D احدهما يفصل الآخر، فان A, B, C, D نقاط مختلفة



شكل (١٢٣)

والان يمكن ان نعرف قطعة لمستقيم اسقاطي:

تعريف ١١

لتكن A,B,C ثلاث نقاط معلومة على المستقيم l،فان مجموعة كل النقاط X بحيث ان AB//CX هي قطعة المستقيم التي تكون A و B نهايتيها. الرمز AB//C يستعمل ليرمز لقطعة لاتحتوي النقطة C.

مبرهنة ١١

القطعة AB // C هي مجموعة غير خالية.

البرهان

لتكن A, B, C ثلاث نقاط على مستقيم l.
من مبرهنة ٨، يمكن ايجاد نقطة D التي هي مرافق توافقي الى C بالنسبة الى A و B. هذا يعني، H(AB, CD) ، ومن بديهية ٧، AB / CD

ومن ثم، تقع D على قطعة المستقيم AB//c.

تعريف ١٢

مجموعة من نقاط $D_1, D_2, \ldots, D_n$ على مستقيم l يحتوي على ثلاث نقاط معلومة A, B, C تكون متتابعة توافقية (harmonic seqence) اذا كانت نقطة D_1 هي مرافق توافقي لواحدة من النقاط A, B, C بالنسبة الى النقطتين الاخريتين.
واي نقطة تتبع نقطة D_1 هي مرافق توافقي لاي واحدة من النقاط التي تسبقها من المتتابعة بالنسبة الى نقطتين آخريتين تسبقها في المتتابعة.
ان بديهيات الفصل ستستعمل الان لبيان ان المستقيم في المستوي الاسقاطي يحتوي على عدد غير منته من النقاط $D_1, D_2, \ldots, D_n$ التي تكون متتابعة توافقية بالاعتماد على تعريف ١٢.

مبرهنة ١٢ Veblen

كل مستقيم في المستوي الاسقاطي يحتوي على عدد غير منته من نقاط.

البرهان

لتكن A, B, C ثلاثة نقاط معلومة على مستقيم معلوم l. من مبرهنة ٨، يمكن ايجاد نقطة D_1 بحيث ان
$H_1(AB, CD_1)$
وكذلك توجد نقطة D_2 بحيث ان $H_2(AD_1, CD_2)$ ،
وهكذا نستمر، فتوجد نقاط $D_3, \ldots, D_n$ على l بحيث ان
$H_3(AD_2, D_3D_1), \ldots, H_n\ (AD_{n-1}, D_n\ D_{n-2})$

يجب ان نبين ان كل نقطة D_j من المتتابعة التوافقية $A, B, C, D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$ تختلف عن النقطة التي تسبقها. لعمل ذلك، يكفي ان نبين انه لاي عدد صحيح $1 < j \le n$ ، فان D_j تختلف عن D_r ، حيث $1 \le r < j$.

من بديهية ٧، نستنتج العلاقات التالية:

$(1) \ldots\ AD_j \ /\ D_{j+1} \quad D_{j-1}$

$(2) \ldots\ AD_{j-1} \ /\ D_j \quad D_{j-2}$

$(3) \ldots\ AD_{j-2} / \ D_{j-1} \quad D_{j-3}$

$(K) \ldots\ AD_{j-k+1} \quad /\ D_{j-k+2} \quad D_{j-k} \quad \ldots\ldots (k)$

من (1) وبديهية ٩، $D_j \neq D_{j-1}$

من (1) و (2) وبديهية ٨،

$(K+1) \ldots\ AD_j \ /\ D_{j+1} \quad D_{j-2}$

ومن بديهية ٩، $D_j \neq D_{j-2}$

من (2) و (3) وبديهية ٨،

$(K+2) \ldots\ AD_{j-1} \ /\ D_j \ D_{j-3}$

والتي مع (1) وبديهية ٨، يكون

$(K+3) \ldots\ AD_j \ /\ D_{j+1} \quad D_{j-3}$

ومن بديهية ٩، $D_j \neq D_{j-3}$

بنفس الطريقة، يمكن ان نبين باستعمال k من العلاقات، حيث $k = j-1$ وبديهية ٨، يكون

$AD_j \ /\ D_{j+1} \ D_1$

ومن بديهية ٩، $D_1 \neq D_1$

من هذا نستنتج ان النقاط $D_1, D_2, \dots, D_n$ مختلفة.

وبما ان عدد هذه النقاط غير منته، فان المستقيم l يحتوي على عدد غير منته من النقاط، وبما انه يمكن ايجاد تناظر متباين بين المستقيم l واي مستقيم آخر في المستوي، فان اي مستقيم يحتوي على عدد غير منته من النقاط.

١١-٧ بديهية الاستمرارية (A Continuity Axiom)

مع كل نقطة في الهندسة الاسقاطية يقرن عددا يدعى احداثي النقطة بدون استخدام مفهوم المسافة. سنقدم هذا في الفصل القادم. على كل حال، ملاحظات قليلة عن هذا الربط تحث على اضافة البديهية الاخيرة للبديهيات الحالية.

في برهان المبرهنة ١٢، لقد وجدت النقاط $D_1, D_2, \dots, D_n$ على المستقيم l الذي يحتوي النقاط المعلومة A, B, C. من الممكن ايجاد تناظر متباين بين هذه النقاط ومجموعة الاعداد الصحيحة.

$-r, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$.

اولا، الاحداثيات $0, 1, \infty$ نقرنها على التوالي مع النقاط A, B, C، ومن ثم النقاط المتعاقبة $D_1, D_2, \dots, D_n$ تقرن على التوالي مع الاحداثيات $2, 3, \dots, n+1$ هذا يعني، اذا كانت، النقطة تناظر العدد الصحيح n يرمز لها $P(n)$، $P(1)$ هي مرافق

توافقي الى $P(\infty)$ بالنسبة الى $P(0)$ و $P(2)$، $P(3)$ هي المرافق التوافقي الى $P(\infty)$ بالنسبة الى $P(2)$ و $P(4)$، وهكذا. كذلك $P(0)$ هي المرافق التوافقي الى $P(\infty)$ بالنسبة الى $P(-1)$ و $P(1)$.

$P(-1)$ هي المرافق التوافقي الى $P(\infty)$ بالنسبة الى $P(-2)$ و $P(0)$ والخ.

اذا كان n احداثي $P(n)$، نجد برسم الشكل ان النقاط ..... $P(0), P(1), P(2), P(3)$, ليست متساوية البعد فيما بينهما كما عندما الاحداثي يمثل المسافة من نقطة ثابتة على الخط.

توجد فجوات بين النقاط في الشكل. اذا وجدت نقاط بينهما، كما نرغب مستقبلا، فان وجودها يجب ان يؤكد بديهيا.

سنملأ هذه الفجوات في ولكل عدد نسبي m/n ، حيث m, n عددين صحيحين موجبين، يناظر نقطة $P(m/n)$ على الخط. المجموعة الجديدة من النقاط تدعى الشبكة النسبية المتعينة من النقاط الثابتة $P(0), P(1), P(\infty)$.

ان هذه العملية لاتزود لنقاط $P(x)$ ، حيث ان X عدد غير نسبي، ولذلك سنأخذ البديهية الاخيرة ـ بديهية الاستمرارية ـ التي تخص هذا الموضوع، والتي تتضمن نظام الاعداد الحقيقية الموسع الذي يحتوي مجموعة الاعداد الحقيقية مع ∞ و$-\infty$.

بديهية ١٠ (بديهية الاستمرارية)

يوجد مستقيم اسقاطي l يحتوي على مجموعة من نقاط متشاكلة تقابليا (isomorphic) مع مجموعة اعداد لنظام الاعداد الحقيقية الموسع.

من هذه البديهية من الممكن ايجاد تناظر متباين بين نقاط المستقيم الاسقاطي واعداد نظام عددي هو

نظام الاعداد الحقيقية.
نقرن العدد X مع نقطة P للمستقيم يدعى احداثي النقطة. ويرمز للنقطة $P(X)$.
عندما يستخدم نظام الاعداد الحقيقية، فان النقطة $P(x)$ يقال عنها حقيقية، والنقطة التي تقرن مع الرمز ∞ تدعى عادة النقطة المحاذية $P(\infty)$ للمستقيم.
مجموعة الاعداد الحقيقية الموسعة غير مناسبة في الهندسة الاسقاطية طالما المستقيم في الهندسة الاسقاطية له خاصية دائرة. بدلا من ذلك، ناخذ $\{R,\infty\}$ التي نحصل عليها بأخذ $\infty = -\infty$.
وبذلك، فان المستوي الاسقاطي يحتوي على مستقيم يتضمن مجموعة نقاط متشاكلة تقابليا مع المجموعة $\{R,\infty\}$.

١١-٨ المنظورية والاسقاطية
(Perspectivity and Projectivity)

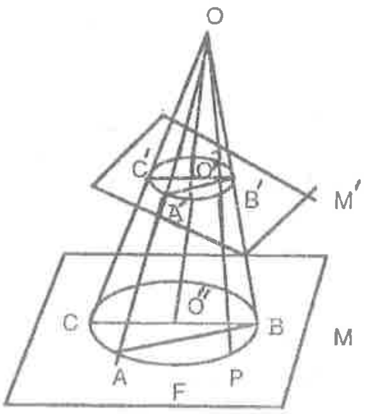
ان هدف الهندسة الاسقاطية هو دراسة الخواص الهندسية لشكل يسقط من نقطة ما الى شكل آخر.
نفرض ان شكلاF يتضمن دائرة في مستويM ومستقيم يقطع الدائرة في نقطتين A, B. فانه، اذا وصلنا كل نقطة من الشكل F بنقطة O لاتقع على M بخط مستقيم، مستوي آخر 'M سيقطع كل من هذه الخطوط بنقطة.
الشكل الناتج 'F من نقاط هو صورة، او اسقاط الشكل الاصلي.
من هذه العملية، يوجد تناظر بين نقاط F ونقاط 'F بحيث كل نقطة من شكل تناظر نقطة واحدة فقط من الشكل الآخر.
اذا اسقط 'F من نقطة اخرى 'O الى مستوي ثالث، فانه ينتج شكلا جديدا ''F، ويوجد ايضا تناظر

متباين بين F' و F'' ، ومن ثم بين F و F''. هذا التناظر الاخير يدعى تناظر اسقاطي.

التناظر الاسقاطي الخاص الذي فيه الخطوط الواصلة بين النقاط المتناظرة تلتقي بنقطة واحدة يدعى منظوريا.

بهذا، كل المنظوريات هي تناظرات اسقاطية، لكن ليس كل التناظرات الاسقاطية هي منظوريات.

نختبر الشكلين F و F' لملاحظة الخواص التي لاتتغير بالاسقاط. الخط المستقيم AB في F يناظر الخط المستقيم A'B' في F' ، والخطان، مثل AB و AP المتقاطعين يكونا بعد اسقاطهما خطين متقاطعين. وكذلك، نقاط على خط، مثل، C, O'', B تسقط الى نقاط C', O', B' ، والتي تقع ايضا على خط، لذلك النقاط المستقيمة والخطوط المتقاطعة هي خواص لشكل لايتغير بالاسقاط.



شكل (١٢٤)

تدعى هذه خواص اسقاطية كما في التعريف التالي:

تعريف ١٣

خاصية شكل لاتتغير باي اسقاط تدعى خاصية اسقاطية.

طول قطعة مستقيم ليس له صفة اسقاطية.

مسافة، طول، زاوية، ومساحة، كل هذه مفاهيم قياسية ومبرهنات تتعلق بهذه المفاهيم تدعى مبرهنات قياسية، فمثلا، مبرهنة فيثاغورس هي قياسية، كما في معظم مبرهنات الهندسة الاولية.

تصنف الاشكال الى نوعين: اسقاطية او قياسية. فمثلا، المثلث هو شكل اسقاطي، طالما المثلث يسقط الى مثلث، على فرض ان مركز الاسقاط لايقع في مستوي المثلث. مثلث متساوي الساقين، ربما يسقط الى مثلث غير متساوي الساقين وكذلك المثلث المتساوي الاضلاع، لذا هي قياسية، ليست اسقاطية. كذلك، بما ان بعض الدوائر تسقط الى اهليلج، فالخاصية كونها دائرة ليست اسقاطية. ان الهندسة الاسقاطية بالاساس تتعلق بالاشكال التي لها خواص اسقاطية اي الاشكال التي لاتتغير بعملية الاسقاط.

تعريف ١٤

شكلان F و F' في π يكونان منظورين من نقطة O اذا كانت النقاط في F في تناظر متباين مع نقاط F' بحيث ان كل المستقيمات الواصلة بين النقاط المتناظرة تمر بنقطة O، التي هي مركز المنظورية.

يرمز لهذا بالرمز

$$F \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} F'$$

ثنائي تعريف ١٤

شكلان F و 'F يكونان منظورين من مستقيم l اذا كانت المستقيمات في F في تناظر متباين مع مستقيمات 'F بحيث ان نقاط تقاطع المستقيمات المتناظرة تقع على المستقيم l، يدعى l محور المنظورية.

يمكن ان يعبر عن هذا بالرمز:

$$F \overset{l}{\underset{\Lambda}{=}} F'$$

فمثلا، في تعريف ١٤ ، ليكن

$F = \{A, B, C, \ldots \in l\}$

$F' = \{A', B', C', \ldots \in m\}$

وان $F \overset{O}{\underset{\Lambda}{=}} F'$ بحيث ان A تناظر 'A، B تناظر 'B، وهكذا، فاننا نكتب:

$$A, B, C, \ldots \overset{O}{\underset{\Lambda}{=}} A', B', C', \ldots$$

يؤدي هذا الى:

$$AA' \cap BB' \cap CC' \cap \ldots = O$$

بنفس الطريقة، اذا كان F = l و F' = m ، فان

$$l \overset{O}{\underset{\Lambda}{=}} m$$

يعني ان نقاط l تكون في حالة تناظر مع نقاط m والمستقيمات الواصلة بين النقاط المتناظرة تمر بنقطة O.

كذلك يرمز $l \overset{O}{\underset{\Lambda}{=}} m$ للتطبيق من l الى m بحيث ان

صورة $P \in l$ هي النقطة $OP \cap m \in m$.

من الواضح انه اذا كان $l \cap m = X$ و $l \overset{O}{\overline{\overline{\wedge}}} m$

فان نقطة التقاطع X تناظر نفسها، اي ان صورة X بموجب هذا التطبيق هي النقطة $X \in m$.

يؤدي هذا ايضا الى ان المنظورية تكون دائما في تناظر متباين وشامل، وان معكوسها يكون منظوريا ايضا. جد مثالا حول المنظورية من مستقيم.

لتكن l, m, n مستقيمات بحيث ان

$$l \overset{O}{\overline{\overline{\wedge}}} m \quad و \quad m \overset{O'}{\overline{\overline{\wedge}}} n$$

سنرمز للتطبيق من l الى n بالرمز :

$$l \,\overline{\wedge}\, n$$

الذي نحصل عليه من تركيب منظوريتين، اي ان صورة $P \in l$ هي النقطة $O'P' \cap n \in n$ ، حيث ان $P' = OP \cap m$

ان التطبيق $l \,\overline{\wedge}\, n$ ليس منظوريا، لان المستقيمات الواصلة بين النقاط المتناظرة مثل P, P' ربما لاتمر من نقطة مشتركة. ان هذا التطبيق يدعى اسقاطيا.

تعريف ١٥

الاسقاطية هي تطبيق لمستقيم l الى مستقيم n يعبر عنه كتركيب لسلسلة منتهية منظوريات.

بما ان المنظوريات دائما متباينة وشاملة، فانه من الواضح ان الاسقاطية تكون كذلك.

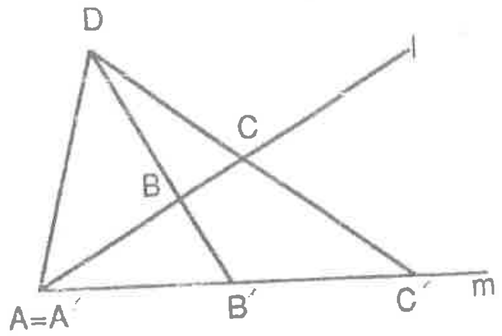
مبرهنة ١٣ العلاقة

لتكن A, B, C ثلاث نقاط مختلفة على مستقيم l

و C', B', C' ثلاث نقاط مختلفة على مستقيم m، فانه توجد اسقاطية $l \bar{\wedge} m$ بحيث ان A تناظر A'، B تناظر B'، و C تناظر C'.

البرهان

الحالة (١)



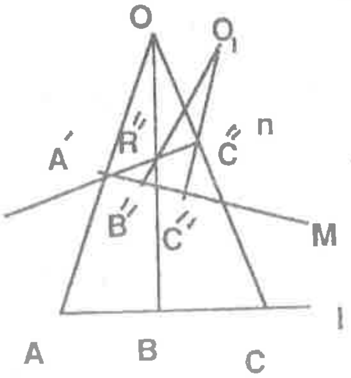
شكل (١٢٥)

اذا كان $A = A'$

نصل B, B' و C, C' ولتكن O نقطة تقاطع BB' و CC'.

فان $A', B', C' \overset{O}{\bar{\bar{\wedge}}} A, B, C$

الحالة (٢)



(شكل ١٢٦)

$l \neq m$ ولاتوجد اي نقطة من هذه النقاط مشتركة بين l و m.

لتكن O نقطة على المستقيم AA'، و n مستقيما يختلف

عن كل من 1 و m ويحتوي على 'A.

من O تسقط C ,B الى n لذلك "C ,"B هما النقطتين المناظرتين على n. نصل "B' ,B و "C' ,C و

لتكن $O_1 = B'B'' \cap C'C''$،

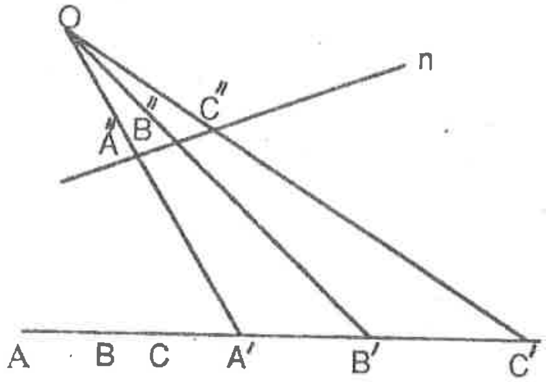
فان

$$A\ B\ C \overset{O}{\overline{\overline{\wedge}}} A'\ B''\ C'' \overset{O_1}{\overline{\overline{\wedge}}} A'B'C'$$

لذلك

$$A\ B\ C \overline{\overline{\wedge}} A'\ B'\ C'$$

الحالة (٣)



شكل (١٢٧)

اذا كان $l = m$

ليكن n مستقيما يختلف عن l. نأخذ نقطتين A'',B'' على n

ولتكن $O = A'A'' \cap B'B''$

نصل OC ، ولتكن $C'' = OC' \cap n$

لذلك، $A''\ B''\ C'' \overset{O}{\overline{\overline{\wedge}}} A'\ B'\ C'$

مثال

لتكن A, B, C, D اربع نقاط مختلفة على مستقيم l. جد الاسقاطية $A\,B\,C \barwedge A\,C\,D$ وجد النقطة التي تناظر اي نقطة P على l بموجب هذه الاسقاطية.

ليكن l و m مستقيمين يمران من A.

لتكن B', C' نقطتين آخريتين على m.

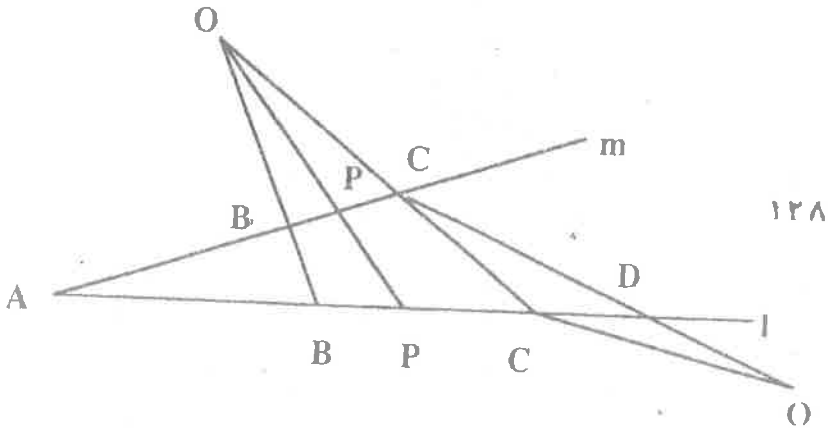
لتكن $O = BB' \cap CC'$

لذلك $A\,B\,C \xrightarrow[\Pi]{O} A\,B'\,C'$

لتكن $O' = B'C \cap C'D$

فان $A\,B'\,C' \xrightarrow[\Pi]{O'} A\,C\,D$

اي ان $A\,B\,C \xrightarrow[\Pi]{O} A\,B'\,C' \xrightarrow[\Pi]{O'} A\,C\,D$



شكل ١٢٨

بتطبيق الحالة ٢،

$A\,B\,C \;\pi\; A''\,B''\,C''$

لذلك، فان

$A\,B\,C \;\pi\; A'\,B'\,C'$

ومن هذا نستنتج ان $ABC \overline{\wedge} ACD$
النقطة المناظرة الى P هي النقطة $l \cap O'P'$ حيث
$P' = m \cap OP$.

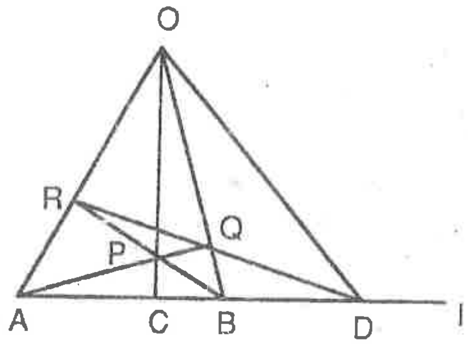
مبرهنة ١٤

اذا كانت A, B, C, D تكون مجموعة توافقية من نقاط على مستقيم l، فان القطع النقطي الى H(AB, CD) من نقطة O لاتقع على l هو مجموعة توافقية من مستقيمات.

بتعبير آخر:

المستقيمات التي تصل مجموعة توافقية من نقاط A, B, C, D على مستقيم l ونقطة O لاتقع على l هي مجموعة توافقية من مستقيمات.

البرهان



شكل(١٢٩)

لتكن A, B, C, D نقاط على l بحيث ان H(AB,CD) . ولتكن O نقطة لاتقع على l.

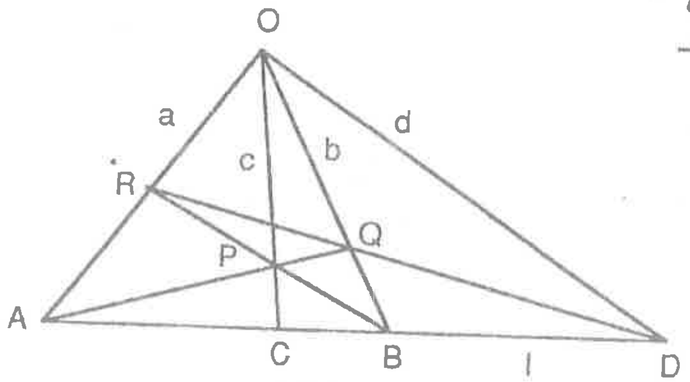
نرسم من A خطا يقطع OC و OB في نقطتين P و Q، على التوالي. وليكن BP يقطع OA في نقطة R. فانه يتكون رباعي زوايا تام (PQRO) وقطريه A و B حيث ان $A = PQ \cap OR$ ، $B = PR \cap OQ$ و $C = Op \cap l$. بما ان

النقطة التوافقية الرابعة وحيدة، فان RQ يمر من D، المستقيمات AD, AQ, RD, BR تكون رباعي اضلاع وفيه:
OA و OB خطين قطريين، بما ان OC و OD هما المستقيمان الواصلان بين O والراسين P و D، على التوالي، فان المستقيمات OA, OB, OC, OD تكون مجموعة توافقية.

مبرهنة ١٥ (ثنائية مبرهنة ١٤)

اذا كانت a, b, c, d تكون مجموعة توافقية من مستقيمات تمر من نقطة O، فان نقاط تقاطع هذه المستقيمات مع مستقيم l لايمر من O هي مجموعة توافقية من نقاط.
بتعبير آخر:
نقاط تقاطع مجموعة توافقية من مستقيمات a, b, c, d تمر من نقطة O مع مستقيم l بحيث ان $O \notin l$ هي مجموعة توافقية من نقاط.

البرهان



شكل (١٣٠)

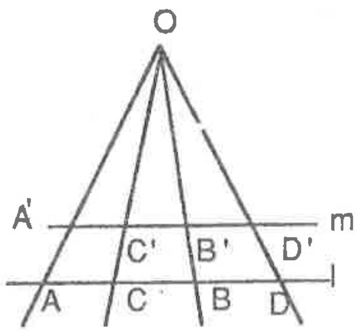
ليكن
$D = d \cap l$ و $C = c \cap l$ $B = b \cap l,$ $A = a \cap l$
ليكن m خطا اخرا يمر من A.
لتكن $P = m \cap CO$ و $Q = m \cap BO$
وبذلك يكون عندنا رباعي اضلاع، اضلاعه:
AD, DQ, PQ, PB وقطريه OA و OB.
لذلك، فان الضلعين DQ و PB يتقاطعان في نقطة R على OA.
ويكون عندنا رباعي زوايا (PQRO)، وفيه A و B نقطتين قطريتين، والضلعين من النقطة القطرية الثالثة يقطعان l في النقطتين C و D.
لذلك A, B, C, D تكون مجموعة توافقية من نقاط.

مبرهنة ١٦

الاسقاطية تحفظ الخاصية التوافقية

بتعبير آخر:
اسقاط مستقيم الى مستقيم آخر يرسل مجموعة توافقية من نقاط الى اية مجموعة اخرى توافقية من نقاط.

البرهان



شكل (١٣١)

لتكن A, B, C, D اربع نقاط على مستقيم l بحيث ان $H(AB, CD)$. ولتكن $l \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} m$

فان صور A, B, C, D هي A', B', C', D'، على التوالي التي هي القطع الخطي للمستقيمات OA, OB, OC, OD، من المستقيم m. اي ان

$A' = OA \cap m$، $B' = OB \cap m$

و $C' = OC \cap m$ و $D' = OD \cap m$.

ليكن $a = OA, b = OB, c = OC, d = OD$

بما ان $H(AB, CD)$، فانه من مبرهنة ١٤، يكون $H(ab, cd)$

ومن مبرهنة ١٥، يكون $H(A'B', C'D')$.

بهذا فقد برهنا، اذا كان $H(AB, CD)$

و $A', B', C', D' \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} A\ B\ C\ D$ فان $H(A'B', C'D)$، اي ان المنظورية تحفظ الخاصية التوافقية. بما ان الاسقاطية هي ببساطة تركيب لسلسلة منتهية من منظوريات، فان الاسقاطية تحفظ الخاصية التوافقية.

الفصل الثاني عشر
المستوى الاسقاطي التحليلي
Analytic Projective plane

١٢-١ نموذج اقليدي للمستوى الاسقاطي

تبدأ دراسة الطرق الجبرية والاحداثية في المستوي الاسقاطي بانشاء نموذج تحليلي الذي فيه كل نقطة تمثل بثلاثي من اعداد حقيقية يدعى احداثيات متجانسة للنقطة. سنصف اولا نموذجا اقليديا يستعمل في تكوين النموذج التحليلي.

في الفضاء- الثلاثي الاقليدي، نأخذ مجموعة كل المستقيمات التي تمر بنقطة O لهذا الفضاء. بما ان كل زوج من المستقيمات المختلفة لهذه المجموعة تعين مستويا، فالمجموعة الناتجة من المستويات مع كل المستقيمات التي تمر من O، تكون نموذجا للمستوي الاسقاطي.

ان تفسير هذا النموذج يكون كما يلي:
تفسر "النقاط" بانها مستقيمات تمر من O
و"المستقيمات" بانها مستويات تمر من O
والعلاقة "نقطة على مستقيم" بانها مستقيم في مستوي.

من الممكن ان نبين ان المستقيمات والمستويات التي تمر من O في الفضاء الاقليدي تحقق بديهيات الوجود والوقوع لنقاط ومستقيمات المستوي الاسقاطي.

١٢-٢ نموذج تحليلي

نقاط ومستقيمات المستوي الاسقاطي تمثل بمستقيمات ومستويات الفضاء - الثلاثي الاقليدي. سنصف الان النموذج التحليلي.

في الفضاء - الثلاثي الاقليدي، X_{12} ، X_{13} ، X_{23} ثلاثة مستويات متعامدة بالتبادل. فان كل نقطة P في هذا الفضاء تناظر ثلاثي من الاعداد حقيقية (X_1, X_2, X_3)، حيث ان X_1, X_2, X_3 هي المسافات من P الى هذه المستويات، على التوالي.

ناخذ اي مستقيم يمر من نقطة الاصل 0 لهذا النظام الاحداثي. يتعين هذا المستقيم من مجموعة من ثلاثة اعداد متجهة $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$. اي مجموعة اخرى (ta_1, ta_2, ta_3) تعين نفس الخط، حيث ان t اي عدد حقيقي لايساوي صفر.

من الواضح ان العدد الثلاثي (a_1, a_2, a_3) يكافيء عددا ثلاثيا اخرا (b_1, b_2, b_3) اذا وجد عددا $K \neq 0$ بحيث ان $(b_1, b_2, b_3) = K(a_1, a_2, a_3)$ او $b_1 = Ka_1$ ، $b_2 = Ka_2$ ، $b_3 = Ka_3$

مجموعة كل الثلاثيات المتكافئة بالتبادل تكون صف تكافؤ يرمز له بالرمز $\{a_1, a_2, a_3\}$.

بما ان يوجد تناظر متباين بين صفوف التكافؤ $\{X_1, X_2, X_3\}$ التي لست جميع عناصرها صفرية، والمستقيمات التي تمر بنقطة الاصل في الفضاء الثلاثي الاقليدي، وبما ان هذه المستقيمات تمثل نموذجا لنقاط المستوي الاسقاطي، تكون صفوف التكافؤ هذه نموذجا تحليليا لنقاط المستوي الاسقاطي.

اي تمثيل مثل (a_1, a_2, a_3) لصف تكافؤ يدعى احداثيات متجانسة لنقطة في المستوي الاسقاطي الحقيقي، اذا كان الثلاثي العددي يتناسب مع ثلاثي

لاعداد حقيقية.

فمثلا، $(1, 2, 3)$ و $(2, 4, 6)$ تمثلان نفس النقطة الحقيقية.

ان المستقيم في المستوي الاسقاطي يناظر مستويا يمر بنقطة الاصل للفضاء - الثلاثي الاقليدي. معادلة هذا المستوي تعرف كما يلي:

$$(1)\ldots \qquad d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 = 0$$

حيث ان d_1, d_2, d_3 تتناسب مع مجموعة من ثوابت حقيقية، وان $(d_1, d_2, d_3) \neq (0, 0, 0)$

بما ان النقطة التي تحقق المعادلة (1) تحقق ايضا المعادلة

$$(2)\ldots \qquad k\,d_1x_1 + k\,d_2x_2 + k\,d_3x_3 = 0$$

حيث ان K اي عدد لايساوي صفر، فان المستوي يتعين اما بثلاثي الاعداد الحقيقية (d_1, d_2, d_3) ليست جميع العناصر صفرية، او باي ثلاثي آخر (kd_1, kd_2, kd_3)، حيث ان $k \neq 0$ ، لذلك يوجد تناظر متباين بين صفوف التكافؤ $(d_1, d_2, d_3) \neq (0, 0, 0)$ والمستويات التي تمر بنقطة الاصل، وبالتالي كذلك، بين صفوف التكافؤ هذه ومستقيمات المستوي الاسقاطي.

اي تمثيل (d_1, d_2, d_3) لصف تكافؤ $\{d_1, d_2, d_3\}$ يدعى احداثيات متجانسة لمستقيم في المستوي الاسقاطي الحقيقي.

اي ان النقاط والمستقيمات في المستوي الاسقاطي التحليلي تكون صفوف تكافؤ، وهذا يوضح مبدأ الثنائية في المستوي الاسقاطي.

وقوع نقطة على مستقيم ينتج من ان المستقيم المناظر الذي يمر من نقطة الاصل يقع في مستوي معين يمر بنقطة الاصل.

بما ان معادلة المستوي الذي يمر بنقطة الاصل

تكون :

$$d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 = 0$$

من هذا، تستنتج المبرهنة التالية:

١٢-٣ معادلات النقاط والمستقيمات

مبرهنة ١

النقطة التي احداثياتها المتجانسة (a_1, a_2, a_3) تقع على المستقيم الذي احداثياته المتجانسة (d_1, d_2, d_3) اذا وفقط اذا

$$d_1a_1 + d_2a_2 + d_3a_3 = 0 \quad (3)\ldots$$

اذا كانت الاحداثيات المتجانسة للنقطة (X_1, X_2, X_3)، فان هذه المعادلة (3) تأخذ الشكل المعروف

$$d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 = 0 \quad (4)\ldots$$

وتدعى معادلة المستقيم.

نفرض ان النقطة (x_1, x_2, x_3) ثابتة والمعاملات (d_1, d_2, d_3) متغيرة، فان كل ثلاثي (d_1, d_2, d_3) يحقق (4) يناظر مستقيما يمر من نقطة ثابتة (X_1, X_2, X_3). لذلك تدعى المعادلة (4) معادلة النقطة.

سنميز بين الثلاثي الذي يمثل النقطة والثلاثي الذي يمثل المستقيم، ويكون باستخدام الثلاثي (X_1, X_2, X_3) ليمثل النقطة، والثلاثي $[X_1, X_2, X_3]$ ليمثل المستقيم

فالمعادلة $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$

هي معادلة النقطة الثابتة (a_1, a_2, a_3) كمثال، معادلة النقطة $(1, 2, 3)$ هي $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

واحداثيات النقطة $X_1-X_3=0$ هي $(1, 0, -1)$

مبرهنة ٢

ثــــلاث نقــــاط مختلفــــة $A(X_1, X_2, X_3)$ ، $B(Y_1, Y_2, Y_3)$ و $C(Z_1, Z_2, Z_3)$ تقـع على مستقيم واحـد اذا وفقط اذا

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = 0$$

البرهان

ليكن l مستقيما احداثياته $[U_1, U_2, U_3]$ الذي يحتوي على A, B, C فان

$$X_1U_1 + X_2U_2 + X_3U_3 = 0$$
$$Y_1U_1 + Y_2U_2 + Y_3U_3 = 0$$
$$Z_1U_1 + Z_2U_2 + Z_3U_3 = 0$$

نعرف من الجبر الاولي، ان هذه المجموعة من المعادلات لها حل غير صفري اذا وفقط اذا

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = 0$$

لذا، فان الشرط الضروري والكافي لوقوع ثلاث نقاط على المستقيم ان يكون $\Delta = 0$.

وبنفس الطريقة، نبرهن ثنائية مبرهنة ٢ .

مبرهنة ٣ (ثنائية مبرهنة ٢)

ثلاثة مستقيمات مختلفة $a\ [X_1, X_2, X_3]$، $b\ [Y_1, Y_2, Y_3]$ و $c\ [Z_1, Z_2, Z_3]$. تلتقي بنقطة

واحدة اذا وفقط اذا

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = 0$$

مثال ١

النقاط الثلاث (0, 0, 1) A ، (0, 1, 0) B و C (0, 0, 1) لاتقع على مستقيم واحد، لان

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

مثال ٢

النقاط الثلاث (1- ,0 ,1) A ، (1 ,3 ,2) B و C (-1, 1, 2) تقع على مستقيم واحد لان

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

ومن مبدأ الثنائية،تلتقي المستقيمات a [1, 0, -1] ، b [2, 3, 1] و c [-1, 1, 2] بنقطة واحدة.

مبرهنة ٤

معادلة المستقيم المتعين من النقطتين المختلفتين $A(y_1, y_2, y_3)$ ، و $B(z_1, z_2, z_3)$ تكون

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} x_3 = 0$$

واحداثياته

$$\left[\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \right]$$

مثال ٣

معادلة المستقيم الذي يصل النقطتين
P (2, 1, -3) و Q(4, -2, 4) تكون

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} x_2$$

$$+ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} x_3 = 0$$

$$= -2x_1 - 20x_2 - 8x_3 = 0$$

$$x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 0$$

فتكون احداثيات المستقيم [1, 10, 4]

مبرهنة ٥ (ثنائية مبرهنة ٤)

معادلة النقطة المتعينة من تقاطع المستقيمين المختلفين $a\ [X_1, X_2, X_3]$ و $b\ [Y_1, Y_2, Y_3]$ تكون

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_2 & Y_3 \\ Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} Y_3 & Y_1 \\ Z_3 & Z_1 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} X_3 = 0$$

واحداثياتها تكون

$$\left[\begin{vmatrix} Y_2 & Y_3 \\ Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} Y_3 & Y_1 \\ Z_3 & Z_1 \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} \right]$$

مثال ٤

المستقيمات الثلاثة:

$$p : 7X_1 - 11X_2 - 5x_3 = 0$$

$$q : 3X_1 - 3X_2 - X_3 = 0$$

$$r : 10X_1 - 11X_2 - 4X_3 = 0$$

تلتقي بنقطة واحدة، لان

$$\begin{vmatrix} 7 & -11 & -5 \\ 3 & -3 & -1 \\ 10 & -11 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

معادلة نقطة التقاطع تكون:

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 3 & -3 & -1 \\ 7 & -11 & -5 \end{vmatrix} = 4X_1 + 8X_2 - 12X_3 = 0$$

لذا فان احداثياتها تكون
(4, 8, -12) او (1, 2, -3)

١٢-٣ تمارين

١- هل ان النقاط A (5, -2, 2)، B (2, 3, 1)، C (1, -8, 0) تقع على مستقيم واحد.

٢- جد قيمة k بحيث ان المستقيمات التالية تلتقي بنقطة واحدة.

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0$$
$$kX_1 + X_2 + 3X_3 = 0$$
$$X_1 - X_2 + 3X_3 = 0$$

١٢-٤ المعنى الهندسي للارتباط الخطي

نلاحظ ان التمثيل الاحداثي لنقطة P في المستوي بثلاثي عددي للمجموعة (ka_1, ka_2, ka_3)، $k \neq 0$، فيه غموض. في بعض الاحيان يكون من الضروري ان نعرف اي ثلاثي عددي من المجموعة يمكن ان يستعمل. عندما تكون هذه الحالة، سنستعمل رمز خاص يربط النقطة او المستقيم بالمتجه، يوضح فيما بعد. وقد اقترح نظرا لان المتجه في الفراغ ثلاثي - الابعاد له ثلاث

مركبات.

رمز

اذا كان V متجه مركباته (a_1, a_2, a_3)، فالرمز $P(V)$

سيعني ان احداثيات P المتجانسة هي (a_1, a_2, a_3).

كمثال، اذا كانت مركبات المتجه W هي $(1, 0, -1)$، فان احداثيات $P(W)$ هي $(1, 0, -1)$ و $P(2W)$ هي $(2, 0, -2)$.

التعاريف التالية توضح ان العمليات على النقاط (المستقيمات) هي مشابهة للعمليات المناظرة لها على المتجهات التي تمثلها.

تعريف١ الضرب العددي (Scalar Multiplication)

$$C\,P\,(V) = P\,(C\,V)$$

ضرب نقطة P بعدد C، هو ببساطة ضرب المتجه الممثل الى P بالعدد C.

تعريف ٢ (الجمع)

اذا كان

$$V = C_1V_1 + C_2V_2 + \dots + C_mV_m \neq 0$$

فان

$$C_1P_1(V_1) + C_2P_2(V_2) + \dots + C_mP_m(V_m) = P(C_1V_1 + C_2V_2 + \dots + C_mV_m)$$

و

$$C_1P_1(V_1) + C_2P_2(V_2) + \dots + C_mP_m(V_m) = 0$$

ليعني ان

$$C_1V_1 + C_2V_2 + \dots + C_mP_m(V_m) = 0$$

كمثال،
$$P_1(-5V_1) + P_2(V_2) + P_3(-3V_3) = 0$$
يعني ان
$$-5V_1 + V_2 - 3V_3 = 0$$
فانه في هذه الحالة يقال بان النقاط P_1, P_2, P_3 مرتبطة خطيا، كما في التعريف التالي:

تعريف ٣

النقاط : $P_1(V_1), \ldots, P_m(V_m)$ تكون مرتبطة او غير مرتبطة خطيا اذا كانت المتجهات : $V_1, \ldots, V_m$ مرتبطة او غير مرتبطة خطيا.

تعريف ٤

اذا كانت النقاط $P_1, P_2, \ldots, P_m$ مرتبطة خطيا، فانه يوجد في الاقل واحد من الاعداد : $C_1, \ldots, C_m$ لايساوي صفرا بحيث ان
$$C_1P_1 + C_2P_2 + \ldots + C_mP_m = 0$$
ليكن $C_1 \neq 0$ ا
$$P_1 = -1/C_1(C_2P_2 + C_3P_3 + \ldots + C_mP_m)$$
فانه يقال بان النقطة P_1 هي تركيب خطي للنقاط $P_2, P_3, \ldots, P_m$.

ثنائي كل من التعاريف ١ الى ٤ يمكن ان يعطى بتبديل الكلمة "نقطة" مع الكلمة "مستقيم" والمعنى الهندسي للارتباط الخطي للنقاط او المستقيمات يمكن ان يعطى الان. وسنعطي هذا في المبرهنات التالية التي تستنتج من التعاريف التي اعطيت توا ومن مباديء الجبر الخطي التي من المفروض ان يكون الطالب في هذه المرحلة ملما بها.

مبرهنة ٦

نقطتان (مستقيمان) مختلفتان تكونان مرتبطتين خطيا اذا وفقط اذا كانتا متساويتين.

مبرهنة ٧

ثلاث نقاط مختلفة تكون مرتبطة خطيا اذا وفقط اذا كانت تقع على مستقيم واحد.

مبرهنة ٨

ثلاثة مستقيمات مختلفة تكون مرتبطة خطيا اذا وفقط اذا كانت تلتقي بنقطة واحدة.

مبرهنة ٩

اذا كانت A و B نقطتين مختلفتين في المستوي، C نقطة اخرى تقع على المستقيم AB اذا وفقط اذا كانت C تركيب خطي للنقطتين A و B.

مبرهنة ١٠

اذا كان a و b مستقيمين مختلفين في المستوي، c مستقيم آخر يمر بنقطة تقاطعهما اذا وفقط اذا كان c تركيب خطي للمستقيمين a و b.

مبرهنة ١١

اي اربع نقاط (مستقيمات) في المستوي الاسقاطي

تكون مرتبطة خطيا.

مبرهنة ١٢

اذا كانت $P_1, P_2, \ldots, P_m$ نقاط غير مرتبطة خطيا بينما النقاط $P_1, P_2, \ldots, P_{m+1}$ تكون مرتبطة خطيا، فان احداثيات النقاط يمكن ان تختار بحيث ان

$$P_1 + P_2, \ldots, P_m = P_{m+1}$$

البرهان

بما ان النقاط $P_1, P_2, \ldots, P_{m+1}$ هي مرتبطة خطيا، فانه توجد ثوابت

$C_1, C_2, \ldots, C_{m+1} \neq 0, 0, \ldots, 0$ بحيث ان

$$C_1P_1(V_1) + C_2P_2(V_2) + \ldots + C_mP_m(V_m) + C_{m+1}P_{m+1}(V_{m+1}) = 0$$

الان، اذا كان $C_{m+1} = 0$، فان النقاط $P_1, \ldots, P_m$ ستكون مرتبطة خطيا وهذا يناقض الفرض.

لذلك، $C_{m+1} \neq 0$، وبهذا فان

$$\begin{aligned} P_{m+1} &= -1/C_{m+1}[C_1P_1(V_1) + \ldots + C_mP_m(V_m)] \\ &= K_1P_1(V_1) + K_2P_2(V_2) + \ldots + K_mP_m(V_m) \\ &= P_1(K_1V_1) + P_2(K_2V_2) + \ldots + P_m(K_mV_m) \end{aligned}$$

حيث ان $K_i = \dfrac{-C_i}{C_{m+1}}$ $\quad i = 1, \ldots, m$

من هذا نستنتج ان $P_{m+1} = P_1 + P_2 + \ldots + P_m$

والان قد حان الوقت لبراهين تحليلية لبعض العبارات التي قدمناها سابقا، كبديهية ديزارك، وبديهية فانو.

١٢-٥ تطبيقات هندسية عن الارتباط الخطي

نبرهن اولا بديهية ديزارك تحليليا.

مبرهنة ١٣

اذا كان $A\ B\ C$ و $A'B'C'$ مثلثين منظورين من نقطة O، فانهما يكونان منظورين من مستقيم.

البرهان

لتكن $O = AA' \cap BB' \cap CC'$

بما انه تقع O، على كل من المستقيمات AA', BB', CC'،
فانه من مبرهنة ٩ توجد اعداد غير صفرية
a, a', b, b', c, c' بحيث ان

O على المستقيم $AA' \longrightarrow O = aA + a'A'$

O على المستقيم $BB' \longrightarrow O = bB + b'B'$

O على المستقيم $CC' \longrightarrow O = cC + c'C'$

لذلك $aA + a'A' = bB + b'B' = cC + c'C'$

ومن ثم

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad aA - bB = -(a'A' - b'B')$$

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad bB - cC = -(b'B' - c'C')$$

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad cC - aA = -(cC' - a'A')$$

الجهة اليسرى من (1) تمثل نقطة C'' على المستقيم AB.

الجهة اليمنى من (1) تمثل نقطة على المستقيم $A'B'$.

بما ان النقطتين متساويتان، فان C'' تقع ايضا على $A'B'$.

بكلمات اخرى، C'' هي نقطة تقاطع الضلعين المتناظرين AB و $A'B'$.

بنفس الطريقة، A'' هي نقطة تقاطع الضلعين BC و $B'C'$، و B'' هي نقطة تقاطع الضلعين AC و $A'C'$.
لذلك، فان (1) تمثل C''، (2) A''، و (3) B''

$$C'' + B'' + A'' = aA - bB + bB - cC + cC - aA = 0$$

اي ان النقاط A'', B'', C'' تكون مرتبطة خطيا
ومن مبرهنة ٧، تقع النقاط C''، B''، A'' على مستقيم واحد اي ان المثلثين يكونان منظورين من مستقيم.
وبنفس الطريقة، باستخدام ثنائية كل خطوة من هذا البرهان، نعطي المبرهنة التالية التي هي ثنائية بديهية ديزارك.

مبرهنة ١٤

اذا كان مثلثان منظورين من مستقيم، فانهما يكونان منظورين من نقطة.

مبرهنة ١٥ (بديهية فانو)

النقاط القطرية لرباعي زوايا تام لاتقع على مستقيم واحد.

البرهان

لتكن P_1, P_2, P_3, P_4 رؤوس رباعي زوايا تام، ولتكن D_1, D_2, D_3 نقاطه القطرية.
من مبرهنة ١١، تكون النقاط P_1, P_2, P_3, P_4 مرتبطة خطيا، فتوجد اعداد $a_1, a_2, a_3, a_4 \neq 0, 0, 0, 0$ بحيث ان

$$(1) \ldots a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3 + a_4P_4 = 0$$

بما ان اي ثلاثة رؤوس من رباعي الزوايا لاتقع على

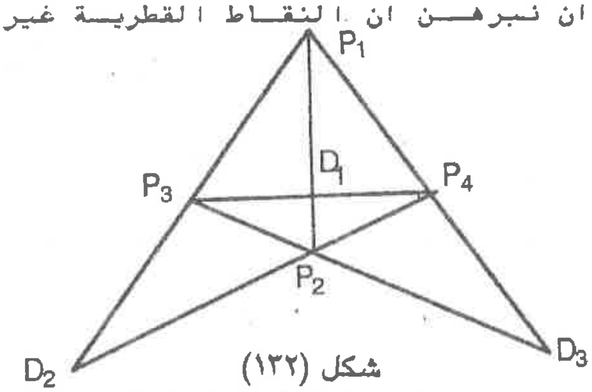
مستقيم واحد، اي ان اي ثلاثة من النقاط P_1, P_2, P_3, P_4 تكون غير مرتبطة خطيا، فان $a_4 \neq 0$ ، $a_3 \neq 0$ ، $a_2 \neq 0$ ، $a_1 \neq 0$.
لذلك من (1) نحصل على مايلي:

$$a_1P_1 + a_2P_2 = -(a_3P_3 + a_4P_4) \quad \ldots\ldots(2)$$
$$a_2P_2 + a_3P_3 = -(a_1P_1 + a_4P_4) \quad \ldots\ldots(3)$$
$$a_1P_1 + a_3P_3 = -(a_2P_2 + a_4P_4) \quad \ldots\ldots(4)$$

لتكن D_1, D_2, D_3 نقاطه القطرية، بحيث ان

$$D_1 = P_1P_2 \cap P_3P_4 \qquad D_2 = P_1P_3 \cap P_2P_4$$
$$D_3 = P_2P_3 \cap P_1P_4$$

المعادلة (2) تبين ان نقطة على P_1P_2 هي ايضا على P_3P_4، ولذلك فان (2) تمثل النقطة القطرية D_1، وبنفس الطريقة، فان (3) تمثل D_3 و (4) D_2.
يجب ان نبرهن ان النقاط القطرية غير مرتبطة خطيا.



شكل (١٣٢)

ليكن $K_1D_1 + K_2D_2 + K_3D_3 = 0$
يجب ان نبرهن ان $K_1 = K_2 = K_3 = 0$

$$K_1(a_1P_1 + a_2P_2) + K_2(a_1P_1 + a_3P_3) + K_3(a_2P_2 + a_3P_3) = 0$$

$$(K_1a_1 + K_2a_1)P_1 + (K_1a_2 + K_3a_2)P_2 + (K_2a_3 + K_3a_3)P_3 = 0$$

$$(K_1 + K_2)a_1P_1 + (K_1 + K_3)a_2P_2 + (K_2 + K_3)a_3P_3 = 0$$

بما ان P_1, P_2, P_3 غير مرتبطة خطيا، فان

$$(K_1+K_2)a_1=0$$
$$(K_1+K_3)a_2=0$$
$$(K_2+K_3)a_3=0$$

وبما ان $a_1 \neq 0$ ، $a_2 \neq 0$ و $a_3 \neq 0$ ، فان

$$K_1+K_2=0$$
$$K_1+K_3=0$$
$$K_2+K_3=0$$

والحل الوحيد هو $K_1=0 \quad K_2=0 \quad K_3=0$

لذا فان النقاط D_1, D_2, D_3 تكون غير مرتبطة خطيا.
او بكلمات اخرى، النقاط القطرية D_1, D_2, D_3 لاتقع على مستقيم واحد.
باستخدام ثنائية كل خطوة من هذا البرهان، نبرهن بنفس الطريقة، المبرهنة التالية.

مبرهنة ١٦

الخطوط القطرية لرباعي اضلاع تام لاتلتقي بنقطة واحدة.

١٢-٥ تمارين

١- عين نقطة تقاطع المستقيم r الذي يصل النقطتين $P(3, 1, -2)$ و $Q(1, -5, 3)$ والمستقيم

$$S: 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0$$

٢- جد معادلة المستقيم l الذي يمر بالنقطة $R(1, 2, -2)$ ونقطة تقاطع المستقيمين $q: 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0$ و $r: 5x_1 - 2x_2 = 0$.

٣- بين ان النقاط $A(1, 0, 0)$ ، $B(0, 1, 0)$ و $C(0, 0)$ ، تعين مثلثا، ثم جد معادلة كل ضلع فيه.

٤- جد معادلات المستقيمات التي تمر برؤوس المثلث

ABC في السؤال الثالث، والنقطة $(1, 1, 1)$.

١٢-٦ التحويل الخطي على R^n

كتطبيق عن نظرية المصفوفات، سنأخذ التطبيق التالي. لتكن عناصر R^n هي مصفوفات $n \times 1$ حيث $X = (X_1, \dots, X_n) \in R^n$ وتكتب كمصفوفة

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

اي مصفوفة nxn تعطي تطبيقا متباينا وشاملا من R^n الى R^n. يرمز لهذا التطبيق بالرمز

$$A: R^n \longrightarrow R^n$$

صورة X تكون AX بكلمات اخرى ، اذا كان

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

فان

$$A(X) = AX = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots\cdots a_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \cdots\cdots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

التطبيق $A : R^n \longrightarrow R^n$ له الخواص التالية:

حيث $X, Y \in R^n$ و $\lambda \in R$

(١) $A(\lambda X) = \lambda A(X)$ لان $A\lambda X = \lambda AX$

(٢) $A(X + Y) = A(X) + A(Y)$

ان هذا التطبيق يدعى تحويل خطي.

واذا كان $|A| \neq 0$ ، فان هذا التطبيق يدعى تحويل خطي غير انفرادي.

١٢-٧ النظام الاحداثي للمستقيم

نستطيع ان نقدم نظاما احداثيا للمستقيم في المستوي الاسقاطي باستخدام مبرهنة ٠٩ حيث اذا كانت $A = (a_1, a_2, a_3)$ و $B = (b_1, b_2, b_3)$ نقطتين مختلفتين على مستقيم l، فان لاية نقطة $P = (P_1, P_2, P_3)$ على المستقيم l، نستطيع ايجاد عددين حقيقيين λ_1 و λ_2 بحيث ان

$$P_i = \lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

حيث ان

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

لان

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_2 & \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 & \lambda_1 a_3 + \lambda_2 b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

من الواضح، ان (λ_1, λ_2) و $(K\lambda_1, K\lambda_2)$، حيث $K \neq 0$ تعينان نفس النقطة، مادامت P هي صف تكافؤ.

امثلة:

١- اذا كانت $A(1, 2, 3)$، و $B(1, 0, 1)$، فان نقطة $P(P_1, P_2, P_3)$ تقع على المستقيم AB اذا كان

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

اي ان، $P_1 + P_2 - P_3 = 0$.

وعندما النقطة P تقع على الخط AB، فانه يمكن ايجاد λ_1, λ_2 بحيث ان

$$\lambda_1 + \lambda_2 - P_1 = 0$$

$$2\lambda_1 - P_2 = 0$$

$$3\lambda_1 + \lambda_2 - P_3 = 0$$

بحل اي معادلتين منها، نجد λ_1, λ_2. ذلك، اذا كانت $(P_1, P_2, P_3) = (2, 3, 5)$ ، فان

$$\lambda_1 + \lambda_2 - 2 = 0$$

$$2\lambda_1 - 3 = 0$$

$$3\lambda_1 + \lambda_2 - 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 3/2 \quad \lambda_2 = 1/2$$

ان تعيين $[\lambda_1, \lambda_2]$ للنقطة P بالنسبة الى A و B لايتم بطريقة وحيدة. حيث اذا اخترنا ثلاثيات مختلفة لتمثل A و B فان λ_1, λ_2 سيختلفان. ذلك، اذا اخذنا $(2.1, 2.2, 2.3)$ لتمثل A، فان $\lambda_1 = 3 / 4$ و $\lambda_2 = 1 / 2$. للتغلب على هذه المشكلة، نستطيع أخذ نقطة ثالثة $C = (c_1, c_2, c_3)$ على المستقيم باختيار تمثيلات للنقطتين A و B بحيث ان C تتعين من $[1, 1]$.

ان وحدانية $[\lambda_1, \lambda_2]$ يمكن ان تعين لاية نقطة على المستقيم نسبة الى تمثيلات A و B.

٢ـ اذا كانت $A = (1, 2, 3)$، $B = (1, 0, 1)$، و $C = (2, 3, 5)$، فانه باختيارنا $(3/2, 3, 9/2)$ لتمثل A و $(1/2, 0, 1/2)$ لتمثل B، فان C يمكن ان تعين $[1, 1]$.

لاجل ان نحصل على $[\lambda_1, \lambda_2]$ التي تناظر اي نقطة اخرى $P = (P_1, P_2, P_3)$، نستطيع ان نستعمل تمثيلات A و B في اعلاه.

للنقطة $P = (0, 3, 3)$ يعين الزوج $[\lambda_1, \lambda_2]$، حيث

$$0 = \frac{3\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2}$$

$$3 = 3\lambda_1$$

$$3 = \frac{9\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2}$$

اي ان $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = -3$

يجب ان نلاحظ انه بعد اختيارنا C، النقطة

[1, 0] ستعين الزوج المرتب $A = (3/2, \ 3, \ 9/2)$
و

$B = (1/2, \ 0, \ 1/2)$ ستعين الزوج المرتب [0,1].

خلاصة لذلك، نقاط المستقيم في المستوي الاسقاطي يمكن ان توضع في تناظر احادي مع صفوف التكافؤ للازواج المرتبة $[\lambda_1, \lambda_2] \neq [0, 0]$ باختيار ثلاث نقاط A, B, C كنقاط مرجع بحيث ان A تناظر [1,0]، B تناظر [0, 1]، وC تناظر [1, 1].

اذا كانت النقطة P على المستقيم تناظر الى $[X_1, X_2]$، فاننا نقول بان $[X_1, X_2]$ هي احداثيات متجانسة الى P بالنسبة الى A, B, C.

نستطيع ان نحول التناظر اعلاه الى تناظر بين نقاط المستقيم والمجموعة $\{R, \infty\}$ (بديهية ١٠). اذا كانت P لها احداثيات متجانسة $[X_1, X_2]$، فانه الى P نعين العدد الحقيقي $X = X_1 / X_2$. يجب ان نلاحظ ذلك اذا اخذنا تمثيلا آخرا الى P، وليكن $[\lambda X_1, \lambda X_2]$، فاننا نحصل على العدد X نفسه لان $\lambda X_1 / \lambda X_2 = X_1/X_2 = X$.

بهذا فان، A تناظر العدد $\infty = 1/0$ وB تناظر $0 = 0/1$، وC ستناظر العدد $1/1=1$.

ان هذا التمثيل يكون وحيدا، لان $-\infty = \infty$ في $\{R, \infty\}$.

تدعى X احداثي غير متجانس الى P بالنسبة الى A,B,C.

٣- جد معادلة المستقيم AB، حيث ان $A = (1, \ 2, \ 3)$ و $B = (2, \ 1, \ 1)$. بين ان النقطتين $C = (5, \ 1, \ 0)$ و $P = (3, \ 0, \ -1)$ تقعان على المستقيم AB وجد الاحداثي المتجانس وغير المتجانس للنقطة P بالنسبة الى A, B, C كنقاط مرجع.

معادلة المستقيم AB هي

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

اي ان

$$x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0$$

من الواضح ان P, C تحققان هذه المعادلة

نأخذ التمثيلين $(\lambda_1, 2\lambda_1, 3\lambda_1)$ و $(2\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2)$ للنقطتين A و B، على التوالي، ونعين $[\lambda_1, \lambda_2]$ بحيث ان

$$C = \lambda_1 A + \lambda_2 B$$

$$5 = \lambda_1 + 2\lambda_2$$

$$1 = 2\lambda_1 + \lambda_2$$

$$0 = 3\lambda_1 + \lambda_2$$

لذلك $\lambda_1 = -1$ و $\lambda_2 = 3$

وبذلك، نثبت التمثيلين (-3, -2, -1) الى A و (3, 3, 6) الى B. لايجاد الاحداثيات المتجانسة $[x_1, x_2]$ الى P

$$-x_1 + 6x_2 = 3$$

$$-2x + 3x_2 = 0$$

$$-3x_1 + 3x_2 = 1$$

لذا فان $x_1 = 1$ ، $x_2 = 2/3$

لذا فان P لها احداثيات متجانسة [1, 2/3] والتي تساوي [3, 2]. الاحداثي غير المتجانس الى P سيكون $x = 3/2$.

المستقيم $x_3 = 0$ له نظام احداثي اعتيادي حيث A = (1, 1, 0)، B = (0, 1, 0) و C = (1, 1, 0) كنقاط مرجع. النقطة $(x_1, x_2, 0)$ على المستقيم $x_3 = 0$ لها احداثيات متجانسة $[x_1, x_2]$ مع نقاط المرجع A, B, C .

بنفس الطريقة $x_1 = 0$، و $x_2 = 0$ لهما نظامين احداثيين

اعتيادين.

١٢-٨ تغيير الاحداثيات

اذا كانت النقطة $P = (x_1, x_2, x_3)$ لها احداثيات $[\lambda_1, \lambda_2]$ بالنسبة الى النقاط $A = (a_1, a_2, a_3)$، $B = (b_1, b_2, b_3)$ و $C = A + B$، فان

$$(1)\ldots \quad X_i = \lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

لتكن $[\lambda'_1, \lambda'_2]$ هي احداثيات P فيما يخص نظاما آخرا $A' = (a'_1, a'_2, a'_3)$ ، $B' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ و $C' = (a'_1 + b'_1, a'_2 + b'_2, a'_3 + b'_3)$ فان

$$(2)\ldots \quad X_i = \lambda'_1 a'_i + \lambda'_2 b'_i \qquad i = 1, 2, 3$$

يجب ان نعين العلاقة بين $[\lambda_1, \lambda_2]$ و $[\lambda'_1, \lambda'_2]$

لتكن احداثيات A و B بالنسبة الى الاحداثي الثاني $[a, c]$ و $[b, d]$، على التوالي، اي ان،

$$(3)\ldots \quad a_i = aa'_i + cb'_i \qquad i = 1, 2, 3$$

$$(4)\ldots \quad b_i = ba'_i + db'_i$$

بما ان A و B مختلفتيين، فان

$$a/c \neq b/d$$

$$ad - bc \neq 0$$

اي ان

بتعويض هذه القيم الى a_i و b_i في (1)، نحصل على

$$X_i = \lambda_1 (aa'_i + cb'_i) + \lambda_2 (ba'_i + db'_i)$$
$$= (\lambda_1 a + \lambda_2 b)\, a'_i + (\lambda_1 c + \lambda_2 d)\, b'_i$$

بالمقارنة مع (2)، يكون

$$\lambda'_1 = (\lambda_1 a + \lambda_2 b)$$

$$\lambda'_2 = (\lambda_1 c + \lambda_2 d)$$

اي ان،

$$(5)\ldots \begin{bmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

حيث ان $ad - bc \neq 0$

لذلك، اذا كانت P على مستقيم لها احداثيات $[\lambda_1, \lambda_2]$ بالنسبة الى A, B, C، فان الاحداثيات الجديدة $[\lambda'_1, \lambda'_2]$ الى P بالنسبة الى ثلاث نقاط اخرى A', B', C'

تعطى في (5) حيث ان [a, c] و [b, d] تعطى في (3) و (4).

بهذا فان تغيير النظام الاحداثي لمستقيم يعطى بمصفوفة غير انفرادية 2 X 2 . المبرهنة التالية تبين ان اسقاط مستقيم الى مستقيم آخر يعطى ايضا بمثل هذه المصفوفة.

نعرف الاسقاطية والمنظورية في المستوي الاسقاطي التحليلي بنفس الطريقة كما عرفت في المستوي الاسقاطي غير التحليلي.

مبرهنة ١٧

ليكن l مستقيما نظامه الاحداثي $[\lambda_1, \lambda_2]$، و m مستقيما نظامه الاحداثي $[\lambda'_1, \lambda'_2]$.

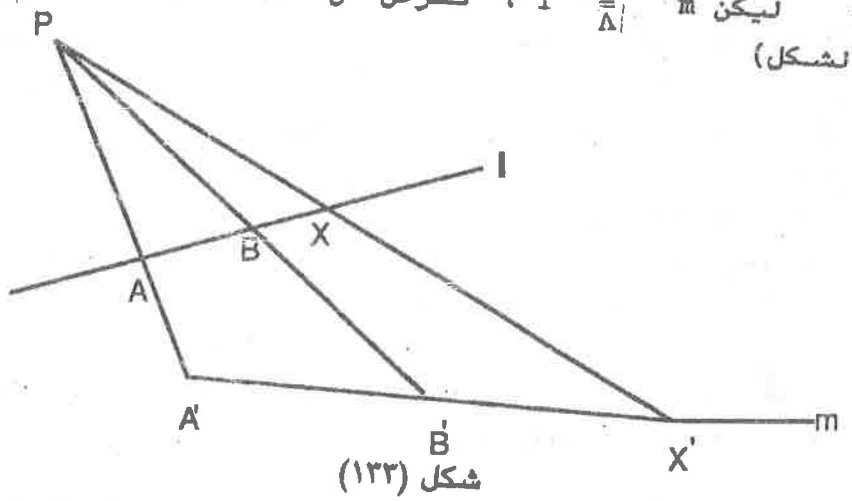
فان الاسقاطية بين l و m يمكن ان يعبر عنها بطريقة وحيدة بالشكل:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \end{bmatrix}$$

حيث إن $ad - bc \neq 0$

البرهان

ليكن $m \overset{P}{\underset{\bar{\Lambda}}{=}} l$ ، نفرض ان $m \neq l$ (كما في الشكل)



شكل (١٣٢)

ليكن $A = (a_1, a_2, a_3)$ ، $B = (b_1, b_2, b_3)$ ، $C = (c_1, c_2, c_3)$ هي نقاط المرجع للنظام الاحداثي $[\lambda_1, \lambda_2]$ على l ، ولتكن $A' = (a'_1, a'_2, a'_3)$ ، $B' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ ، $C' = (c'_1, c'_2, c'_3)$ هي نقاط m التي تعطى بالشكل:

$$ABC \overset{P}{\underset{\bar{\Lambda}}{=}} A'B'C'$$

اذا كانت $P = (P_1, P_2, P_3)$ ، فانه يمكن ان نبرهن (لماذا؟) على وجود r, s, t بحيث ان

$$a'_i = rP_i + a_i$$
$$b'_i = sP_i + b_i$$
$$c'_i = tP_i + c_i$$

لتكن $X = (x_1, x_2, x_3)$ نقطة على l بحيث ان

$$X_i = \lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i$$

فان $(\lambda_1 r + \lambda_2 s) P_i + X_i$

$$= (\lambda_1 r + \lambda_2 s)\ P_i + \lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i$$
$$= \lambda_1 (rP_i + a_i) + \lambda_2 (sP_i + b_i)$$
$$= \lambda_1 a_i' + \lambda_2 b_i' \qquad i= 1, 2, 3$$

من الجهة اليسرى، تكون هذه نقطة على PX
ومن الجهة اليمنى، تكون هذه نقطة على m لها احداثيات $[\lambda_1, \lambda_2]$ بالنسبة الى النقاط A', B', C'.
بعد ذلك، اذا اخذنا احداثي X' بالنسبة للنقاط A', B', C' ، فان النقطة المناظرة الى $X = [\lambda_1, \lambda_2]_1$ هي ايضا $[\lambda_1, \lambda_2]_1$. بموجب (٥)، اذا كان احداثي X' في النظام الاحداثي الاصلي هو $[\lambda_1', \lambda_2']$ ، فانه يوجد تحويل بحيث ان

$$\begin{bmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

و

$$ad - bc \neq 0$$

هذا التحويل يكون وحيدا لانه اذا وجد تحويل آخر

$$\begin{bmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

بحيث ان $a'd' - b'c' \neq 0$
فان

$$S\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

لكل $[\lambda_1, \lambda_2]$

وبذلك يكون،

$$\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = S\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

والذي في حالتنا هذه يعطينا نفس التحويل.

بما ان الاسقاطية هي سلسلة من منظوريات وان ضرب مصفوفتين غير انفراديتين هي مصفوفة غير انفرادية، فانه قد تم البرهان.

١٢-٩ النسبة التبادلية Cross Ratio

تعريف ٥

النسبة التبادلية لاربعة اعداد a, b, c, d هي

$$R(a, b, c, d) = \frac{(a - c)\ (b - d)}{(a - d)\ (b - c)}$$

ان هذه الاعداد الاربعة يمكن ان ترتب باربع

وعشرين طريقة ولكن المبرهنة التالية تبين انه يمكن ان تكون بست نسب تبادلية فقط.

مبرهنة ١٨

اذا كانت $R(a, b, c, d) = k$، فان النسب التبادلية الستة المختلفة هي:

$$R(a, b, c, d) = k$$
$$R(b, a, c, d) = 1/k$$
$$R(a, c, b, d) = 1 - k$$
$$R(c, a, b, d) = 1/(1 - k)$$
$$R(c, b, a, d) = 1 - (1/(1 - k)) = k/(k - 1)$$
$$R(b, c, a, d) = (k - 1)/k$$

البرهان : يترك كتمرين

مبرهنة ١٩

اذا كان اثنان من الاعداد الاربعة a, b, c, d متساويين،فان النسبة التبادلية تكون ∞، 0 ، او 1 . وبالعكس ،اذا كانت النسبة التبادلية $R(a, b, c, d)$ تساوي ∞، 0 ، او 1 ، فانه في الاقل اثنين من الاعداد a, b, c, d متساويين.

البرهان

اذا كان $a = d$، فان $k = \infty$، $\frac{1}{(1-K)}=0$، $1/K = 0$

$1 - (1/k) = 1$ ، $k/(k - 1) = 1$.

بنفس الطريقة،

$R(a, b, c, d) = \infty \longrightarrow a = d$ او $b = c$

كذلك $R(a, b, c, d) = 0 \longleftarrow a = c$ او $b = d$

$R(a, b, c, d) = 1$

$\longleftarrow (a - d)(b - d) = (a - c)(b - c)$

اي ان $a = b$ او $c = d$

مبرهنة ٢.

$$R(a, b, c, d) \cdot R(a, b, d, e) = R(a, b, c, e)$$

البرهان

$$R(a, b, c, d)\, R(a, b, d, e) =$$

$$\frac{(a - c)(b - d)}{(a - d)(b - c)} \cdot \frac{(a - d)(b - e)}{(a - e)(b - d)} =$$

$$\frac{(a - c)(b - e)}{(a - e)(b - c)} = R(a, b, c, e)$$

تعريف ٦

لتكن A, B, C, D اربع نقاط على مستقيم l، فان النسبة التبادلية $R(A, B, C, D)$ للنقاط الاربع هي النسبة التبادلية للاحداثيات غير المتجانسة المناظرة للنقاط الاربعة. ذلك، اذا كانت a, b, c, d هي الاحداثيات غير المتجانسة للنقاط A, B, C, D على التوالي، فان

$$R(A, B, C, D) = R(a, b, c, d) = \frac{(a - c)(b - d)}{(a - d)(b - c)}$$

من الواضح انه اذا كانت الاحداثيات المتجانسة للنقاط A, B, C, D هى على التوالي $[d_1, d_2]$ ، $[a_1, a_2]$ ، $[b_1, b_2]$ ، $[c_1, c_2]$ فان

$$a - c = \frac{a_1}{a_2} - \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_2c_2} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{a_2c_2}$$

$$b - d = \frac{b_1}{b_2} - \frac{d_1}{d_2} = \frac{b_1d_2 - b_2d_1}{b_2d_2} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}{b_2d_2}$$

$$(a - d) = \frac{a_1}{a_2} - \frac{d_1}{d_2} = \frac{a_1d_2 - a_2d_1}{a_2d_2} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}{a_2d_2}$$

$$(b - c) = \frac{b_1}{b_2} - \frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1c_2 - c_1b_2}{b_2c_2} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{b_2c_2}$$

لذلك

$$(1)\ldots\ R(A,B,C,D) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}} \times \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}$$

مبرهنة ٢١

النسبة التبادلية لاربع نقاط لاتتغير بفعل التحويلات الاحداثية او الاسقاطية.

البرهان

نأخذ التحويل المعطي بالشكل:

$$ad - bc \neq 0\ ,\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

فان الاحداثيات المتجانسة الجديدة تعطى بالشكل

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} ,\ \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

لذلك

$$\begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ c_1' & c_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aa_1 + ba_2 & ca_1 + da_2 \\ ac_1 + bc_2 & cc_1 + dc_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} X \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b'_1 & b'_2 \\ d'_1 & d'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} X \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 \\ d'_1 & d'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} X \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b'_1 & b'_2 \\ c'_1 & c'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} X \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

لذلك

$$R(A', B', C', D') = \frac{\begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 \\ c'_1 & c'_2 \end{vmatrix} X \begin{vmatrix} b'_1 & b'_2 \\ d'_1 & d'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 \\ d'_1 & d'_2 \end{vmatrix} X \begin{vmatrix} b'_1 & b'_2 \\ c'_1 & c'_2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} X \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} X \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}$$

$$= R(A, B, C, D)$$

مبرهنة ٢٢

النسبة التبادلية لاربع نقاط مختلفة لايمكن ان تكون ∞، 0 ، او 1

البرهان

يستنتج من مبرهنة ١٩ .

مبرهنة ٢٣

$$R(A,B,C,D) = -1 \longleftarrow H(AB,CD)$$

البرهان

بما ان كانت A, B, C, D اربع نقاط مختلفة، فانه توجد اسقاطية بحيث ان

$ABC \barwedge BAC$

وان D تناظر D'، فان

$H(BA,CD) \longleftarrow H(AB,CD)$

بما ان $ABCD \bar{\wedge} BACD'$ فان $H(BA,CD') \longleftarrow H(AB,CD)$

وبما ان المرافق التوافقي الى C بالنسبة الى B و A يكون وحيدا، فان $D = D'$

وبذلك يكون $ABCD \barwedge BACD$

ومن مبرهنة ٢١،

$$R(A, B, C, D) = R(B, A, C, D) = \frac{1}{R(A, B, C, D)}$$

اي ان

$$[R(A,B,C,D)]^2 = 1$$

وبذلك يكون

$$R(A, B, C, D) = \mp 1$$

بما ان A, B, C, D مختلفة، فان $R(A,B,C,D) \neq 1$

لذلك $R(A, B, C, D) = -1$.

سنرمز لنقطة $X = (X_1, X_2, X_3)$ في المستوي الاسقاطي بمصفوفة عمودية $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. بنفس الطريقة، يرمز للمستقيم

بمصفوفة عمودية، اي مصفوفة 3×1 .

مبرهنة ٢٤

اذا كانت $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ نقطتين على

مستقيم، فان الشرط $Z = a X + bY$ و $S = c X + d Y$ تكون توافقية بالنسبة الى X و Y هو ان

$$[a, b] \neq [c, d] \qquad \frac{c}{d} + \frac{a}{b} = 0$$

البرهان

ناخذ نظاما احداثيا فيه احداثيات X و Y: 0 و ∞ على التوالي. فان

$$R(XY, SZ) = -1 \longleftrightarrow H(XY, SZ)$$

و

$$\longleftarrow R(0, \infty, \frac{c}{d}, \frac{a}{b}) = -1$$

$$\frac{c}{d} + \frac{a}{b} = 0 \longleftarrow \frac{-c/d}{-a/b} = -1$$

تعريف ٧

نأخذ تحويلا من R^3 الى R^3 يعطى بمصفوفة 3 X 3 ، ولتكن A. نستطيع ان نعتبر هذا كاعطاء تحويل من نقطة ثلاثية الاحداثيات الى مستقيم ثلاثي الاحداثيات. في هذه الحالة، يدعى هذا التحويل ارتباطا، لذلك يمكن ان يكتب بالشكل

$$(1) \ldots |A| \neq 0 \quad U = AX$$

هذا يعني اي نقطة X في المستوي تعين مستقيما

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

اي ان، المستقيم $u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 = 0$

او برمز المصفوفة، المستقيم $(2) \ldots {}^tUY = 0$

من (1)، ${}^tU = {}^t(AX) = {}^tX\, {}^tA$

لذلك (2) يمكن ان تكتب بالشكل

$$(3) \ldots {}^tX\, {}^tAY = 0$$

بهذا، فان (3) هو الخط المتعين من X.

بكلمات اخرى، الشرط بان نقطة Y تقع على المستقيم المتعين من X هو ان Y تحقق (3) .

بنفس الطريقة، الشرط بان النقطة X تقع على المستقيم المتعين من Y في (1) يعطى بالشكل

$${}^tY\, {}^tAX = 0$$

اي ان، ${}^t({}^tXAY) = 0$

اي ان، $(4) \ldots \quad {}^tXAY = 0$

الشرط لـ (3) و (4) يكون نفسه $A = {}^tA$

الفصل الثالث عشر
هندسة التحويلات
(Transformations Geometry)

١٣-١ زمرة التحويلات

بالنظر لارتباط هذا الفصل بالفصل السابق سنستمر بنفس تسلسل التعاريف والمبرهنات.

تعريف ٨

ليكن S مستويا، يسمى اي تطبيق

$f : S \longrightarrow S$ تحويلا هندسيا

اذا كان تقابلا. فمن المعتاد ان نرمز للتطبيق بتحويل اذا كانت العناصر هي عناصر هندسية، مثل النقاط والمستقيمات، فالتحويل هو تقابل من المستوي الى نفسه.

يمكن ان نفهم التحويل الهندسي عمليا اذا وضعنا ورقتين لهما نفس الابعاد، فتنتج بعض العمليات نذكر منها مايلي:

١- تدوير الورقة الاولى على الثانية
٢- تدوير ثم تدوير حول مركز آخر
٣- ازاحة الورقة الاولى على الورقة الثانية
٤- ازاحة ثم تدوير
٥- رفع الورقة الاولى وثم قلبها وثم وضعها على الورقة الثانية.
٦- رفع الورقة الاولى واجراء عملية اسقاط من

مصدر ضوء قريب وربط كل نقطة في الورقة الاولى مع ظلها في الورقة الثانية

٧- رفع الورقة الاولى واجراء عملية اسقاط من مصدر ضوء بعيد جدا بحيث تعتبر اشعة الضوء متوازية.

والان سندرس مفهوم التحويل الهندسي وبعض صفاته الهامة.

تعريف ٩

ليكن S مستويا و G زمرة. يقال ان G تعمل كزمرة تحويل على S اذا تحقق الشرطان التاليان:

(أ) اي عنصر $A \in G$ ، يعطينا تحويلا

$$T_A : S \longrightarrow S$$

(ب) لاي $A, B \in G$، $T_{AB} = T_A \circ T_B$

حيث ان $T_A \circ T_B$ يرمز لتركيب التحويلين T_A و T_B.

مثال

ليكن $S = R^2$

و{A مصفوفة غير انفرادية 2x2 :A} = G = G(2, R) فان G زمرة تحويل على R^2. حيث اذا كان $X \in R^2$ ، $A \in G$

$T_A : R^2 \longrightarrow R^2$ المعرف بالشكل $T_A(X) = AX$.

اي ان، اذا كان

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} ، |A| \neq 0 ، A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

فان $T_A(X) = AX$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aX_1 + bX_2 \\ cX_1 + dX_2 \end{bmatrix}$$

يكون T_A متباينيا لانه اذا كان $AX = AY$
فان $A(X - Y) = 0$

تكون هذه مجموعة من معادلات متجانسة والتي ليست لها حلول غير صفرية لان $|A| \neq 0$. لذا فالاحتمال الوحيد هو $X = Y$.

يكون TA شاملا، لان $|A| \neq 0$، واذا اخذنا $Y \in R^2$، فانه يمكن ايجاد X في R^2 بحيث ان
$T_A(X) = Y$، اي ان، $AX = Y$
وبذلك، فانه يتحقق الشرط (أ).

لتحقيق الشرط (ب)، نلاحظ اذا كان $A, B \in G$

$$\begin{aligned}(T_A \circ T_B)(X) &= T_A(T_B(X)) \\ &= T_A(BX) \\ &= A(BX) \\ &= AB(X) \\ &= T_{AB}(X)\end{aligned}$$

لتكن G زمرة تحويلات تعمل على S. فان اي عبارة تتضمن عناصر S يقال انها لاتتغير بفعل G اذا كانت هذه العبارة لاتتغير (مصانة) وفق اي تحويل يعطى من عناصر G.

خواص S التي لاتتغير بفعل زمرة التحويلات G كانت باعثا لهندسة التحويلات التي تعزى الى عالم الرياضيات الالماني فيلكس كلاين (١٨٤٩ـ ١٩٢٥). دراسة هذه الهندسة التي تميز بزمرة تحويلاتها توضح

بتكوين مجموعة اساسية وزمرة تحويلات مناظرة للهندسات الاسقاطية، التالفية، الاقليدية، وهندسات اخرى. بهذا سنبين ايضا ان الهندسات التالفية، الاقليدية وهندسات اخرى هي هندسات جزئية من الهندسة الاسقاطية.

١٣-١ تمارين

١- لتكن G زمرة تعمل كزمرة تحويل على مستوي S، اذا كان e هو العنصر المحايد الى G، برهن ان Te هو التحويل المحايد الى S.

٢- لتكن G زمرة تعمل كزمرة تحويلات على مجموعة S. برهن ان

$$G = \{T_A : S \longrightarrow S \mid A \in G\}$$

هي زمرة

٣- برهن ان الزمرة $G(3, R)$ مجموعة كل المصفوفات غير الانفرادية 3X3 تعمل كزمرة تحويل على R^3.

١٣-٢ زمرة التحويلات الاسقاطية
Group of Projective Transformation)

نأخذ المستوي الاسقاطي التحليلي $P^2 = R^3 - \{0\}/_\sim$ ولتكن الزمرة $G(3, R)$ مجموعة كل المصفوفات غير الانفرادية 3x3 .

ولتكن $A \in G$ و $X \in P^2$، اذا اخذنا AX كنقطة مكونة من ثلاثي مرتب، فان A يعطينا التحويل

$T_A : P^2 \longrightarrow P^2$ بحيث ان $T_A(X) = AX$

من الواضح ان T_A متباينا وشاملا. لكن لاي عدد غير صفري λ، التحويلان T_A و $T_{\lambda A}$ متساويان لان AX و $\lambda(AX)$ هما نفس النقطة في P^2. بسبب هذا فان

G لاتعمل كزمرة تحويلات على P^2. للحصول على زمرة تحويلات تعمل على P^2، يكون ضروريا ان نعطي علاقة تكافؤ ~ على G التي تعرف بالشكل:

A ~ B اذا وجد $\lambda \in R - \{0\}$ بحيث ان $B = \lambda A$.

يرمز لهده الزمرة بالرمز: PG(2, R)

عنصر في PG(2, R) هو صف تكافؤ [A] لمصفوفات 3x3 غير انفرادية. سنبرهن ان PG(2, R) هي زمرة والتي تعمل كزمرة تحويلات على P^2.

مبرهنة ٢٥

المجموعة PG(2, R) تكون زمرة.

البرهان

ليكن [A] و [B] ينتميان الى PG(2, R)، نعرف الضرب بالشكل: [A] [B] = [AB].

يكون هذا معرفا جيدا لانه اذا مثلنا [A] بـ $[\lambda A]$ و [B] بـ $[\mu B]$، فان

$$[\lambda A]\ [\mu B] = [\lambda\mu\ AB] = [AB]$$

من السهولة الان ان نبين انه مع هذه العملية تكون PG(2, R) زمرة.

من الواضح ان العنصر المحايد الى PG(2, R) هو [I]، صف كل المصفوفات 3x3 بالشكل λI، حيث ان

$$\lambda I = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

حيث $\lambda \in R - \{0\}$
العنصر [A] في $PG(2, R)$ يرمز له بالرمز A اذ لايوجد التباس . من الواضح ان $PG(2, R)$ تعمل كزمرة تحويلات على P^2.

تعريف ١.

اذا كان $A \in PG(2, R)$ ، فان التحويل $T_A: P^2 \longrightarrow P^2$ يدعى تحويل اسقاطي على P^2 .
ويكتب بالشكل

$$(1)\ldots \quad X' = AX \quad \ldots.(1)$$

حيث يفهم ان $A \in PG(2, R)$ ، اي ان، A هو صف تكافؤ للمصفوفات 3x3 و $X \in P^2$، X'. كذلك X' هو متحول X بفعل التحويل $T_A: P^2 \longrightarrow P^2$. الهندسة الاسقاطية ربما تعرف كدراسة للخواص التي لاتتغير للمجموعة P^2 بفعل الزمرة $PG(2, R)$.

مبرهنة ٢٦.

التحويل الاسقاطي يحول النقاط التي تقع على مستقيم واحد الى نقاط تقع على مستقيم واحد.

البرهان

لتكن X, Y, Z ثلاث نقاط على مستقيم واحد.
ولتكن $X' = AX$ $Y' = BY$ $Z' = AZ$ هي النقاط المتحولة. بما ان Z على المستقيم XY، فانه يوجد λ_1 و λ_2 بحيث ان

$$AZ = A(\lambda_1 X) + A(\lambda_2 Y)$$
$$= \lambda_1 AX + \lambda_2 AY$$
$$Z' = \lambda_1 X' + \lambda_2 Y'$$

وهذا يبرهن ان X', Y', Z' تقع على مستقيم واحد.

نتيجة ١

التحويل الاسقاطي يحول المستقيمات الملتقية بنقطة واحدة الى مستقيمات ملتقية بنقطة واحدة.

مبرهنة ٢٧

التحويل الاسقاطي يعطي اسقاط مستقيم الى مستقيم آخر.

البرهان

لنأخذ المستقيم l في P^2. يجب ان نبين ان التحويل الاسقاطي $T_A : P^2 \longrightarrow P^2$ يعطي اسقاط المستقيم l الى المستقيم m. اذا كانت X, Y, Z هي نقاط على l بحيث ان $Z = \lambda_1 X + \lambda_2 Y$، فانه من مبرهنة ٢٦ ، النقاط المناظرة X', Y', Z' على m تحقق $Z' = \lambda_1 X' + \lambda_2 Y'$.

اي ان، التحويل الاسقاطي يحول نقطة احداثياتها المتجانسة $[\lambda_1, \lambda_2]$ نسبة الى X, Y الى نقطة التي احداثياتها المتجانسة $[\lambda_1, \lambda_2]$ بالنسبة الى X'، Y'. بكلمات اخرى، التحويل الاسقاطي يعطي التحويل من l الى m، والذي يعطي بدلالة الاحداثيات المتجانسة كما اعطيت اعلاه بالشكل

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

من مبرهنة ١٧ ، هذه هي الاسقاطية من l الى m بالاعتماد على هذه المبرهنة ولان الاسقاطية تحفظ النسبة التبادلية لاربع نقاط نحصل على النتائج التالية:

نتيجة ١

التحويل الا سقاطي يحفظ النسبة التبادلية

نتيجة ٢

التحويل الاسقاطي يحفظ المجموعات التوافقية.

مبرهنة ٢٨

التحويل الاسقاطي $X' = AX$ يحول المستقيم

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$ الى المستقيم $^{t}UA^{-1}$

البرهان

معادلة المستقيم U : $^{t}UX = 0$.

نقطة X على هذا المستقيم تحول بواسطة التحويل الاسقاطي A الى النقطة $X' = AX$.

بضرب كلا الطرفين في A^{-1} نحصل على $X = A^{-1}X'$.

لذلك ، $^{t}UA^{-1}X' = {}^{t}UX = 0$

وبهذا، فأن X' تقع على المستقيم $^{t}UA^{-1}$.

وهذا يؤدي الى انه اذا كان U تتحول الى U'، فان

$$^{t}U' = {}^{t}U\ A^{-1}$$

$$^{t}U = {}^{t}U'A \qquad (2).....$$

مثال

جد التحويل الاسقاطي الذي يحول مستقيما في P^2 الى المستقيم $X_3 = 0$.

نأخذ المستقيم U. يجب ان نجد تحويلا اسقاطيا يحول U الى المستقيم $X_3 = 0$، اي ان

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ليكن

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

يعطي التحويل المطلوب. فان $^{t}UA^{-1} = [0, 0, 1]$
اي ان $^{t}U = [0, 0, 1]\,A$

$$[u_1, u_2, u_3] = [0, 0, 1]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= [a_{31}, a_{32}, a_{33}]$$

بذلك، فان العناصر في الصف الثالث من A يجب ان تتناسب دائما مع $[u_1, u_2, u_3]$.

٢-١٣ تمارين

١ـ عرف $PG(1, R)$ وبرهن ان $PG(1, R)$ تعمل كزمرة تحويل على اي مستقيم اسقاطي l.

٢ـ جد تحويلي النقطة $(1, 2, -1)$ والمستقيم $[0, 3, 2]$ بفعل التحويل الاسقاطي المعطى بالشكل

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

٣ـ جد $T_A(X)$ و $T_B(X)$ و $(T_A \circ T_B)(X)$ حيث ان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$ و

٤ـ جد النقطة التي تتحول الى (0 ,1 ,1) بالتحويل الاسقاطي المعطى بالشكل

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

٥ـ جد تحويلا اسقاطيا الذي فيه المستقيم $X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 0$ يتحول الى المستقيم $X_3 = 0$.

٦ـ جد تحويلا اسقاطيا الذي يحول المستقيم $3X_1 - X_2 = 0$ الى المستقيم $X_3 = 0$.

١٣-٣ الزمر الجزئية (Sub Groups)

تعريف ١١

مجموعة جزئية H من زمرة G وغير خالية تدعى زمرة جزئية من G، اذا كانت H هي ايضا زمرة بفعل نفس

العملية.

مبرهنة ٢٩

مجموعة جزيئية H من زمرة G وغير خالية تكون زمرة جزئية من G اذا وفقط اذا

$$aob \in H \longleftarrow a,\ b \in H$$

$$a^{-1} \in H \longleftarrow a \in H$$

البرهان

يترك كتمرين.

مثال

لتكن $G(3,\ R)$ ترمز لمجموعة كل المصفوفات غير الانفرادية $(3,3)$، $G(3,R)$ هي زمرة بفعل ضرب المصفوفات. برهن ان

$$H_1 = \left\{ A \in G\ (3,R) \;\middle|\; A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

هي زمرة جزئية من $G(3,\ R)$
ليكن $A,\ B \in H$، فان

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فانه يتطلب ان نبرهن ان $AB \in H_1$ ، اي ان العناصر في الصف الثالث هي 1 ,0 ,0 وان $|AB| \neq 0$ كذلك يجب ان نبين ان $A^{-1} \in H_1$.

بكتابة العناصر في الصف الثالث من AB، من السهولة ان نبين انها تكون 1 ,0 ,0 . كذلك $|AB| = |A| \cdot |B| \neq 0$ لان $|A| \neq 0$ و $|B| \neq 0$.

علاوة على ذلك،

$$A^{-1} = \frac{{}^{t}[A_{ij}]}{|A|}$$

العناصر في العمود الثالث من ${}^{t}[A_{ij}]$ هي $|A|$,0 ,0 لذلك العناصر في الصف الثالث من A^{-1} هي 1 ,0 ,0 . كذلك $|A^{-1}| \neq 0$ لان $|A| \neq 0$. لذلك $A^{-1} \in H_1$.

وبذلك يتحقق شرطا الزمرة الجزئية.

١٣-٣ تمارين

١ـ لتكن

$$H_2 = \left\{ A \in G(3,R) \ : \ A = \begin{bmatrix} a & -b & h \\ be & -ae & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

حيث ان $a^2 + b^2 \neq 0$ $e^2 = 1$

$$H_3 = \left\{ A \in G(3,R) \ : \ A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$H_4 = \{ A \in H_1 \ : |A| = \pm 1 \}$$

برهن ان H_2, H_3, H_4 هي زمر جزئية من $G(3, R)$

٢ـ ليكن

$$AG(2,R) = \left\{ A \in PG(3,R) \ : \ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

برهن ان $AG(2, R)$ زمرة جزئية من $PG(2, R)$

١٣-٤ المستوى التآلفي التحليلي
(Analytic Affine Plane)

نعيد ماذكر في الفصل الاول، من انه يمكن تكوين نموذج للمستوى التالفي من المستوي الاسقاطي التحليلي P^2 وذلك بحذف مستقيم l. ان هذا يعني حذف نقطة واحدة من كل مستقيم طالما المستقيم l يقطع اي مستقيم آخر في نقطة واحدة. لذلك، فان مستقيمين يكونان متوازيين اذا كانا بالاصل يتقاطعان في l.

من الواضح اننا نختار اي مستقيم في المستوي ليكون المستقيم المحذوف. على اي حال، سنجعل هذا المستقيم ثابتا عند الاختيار بحيث ان صفة مستقيمين متوازيين لاتتغير. بكلمات اخرى، نستطيع ان نسمح فقط في المستوي التالفي تلك التحويلات التي تحفظ المستقيم المختار ثابتا. في هذا البند، سندرس الهندسة لمثل هذا النموذج التحليلي للمستوي التالفي.

من المفيد، ان نختار $X_3 = 0$ من P^2 ليكون المستقيم المحذوف. المجموعة

$$(1) \ldots \quad A^2 = \{(X_1, X_2, X_3) \in P^2 : X_3 \neq 0\}$$

هي المستوي التالفي التحليلي. ذلك، ان نقطة في المستوي التالفي هي نفسها كنقطة في المستوي الاسقاطي.

يصح هذا بالنسبة للمستقيمات. لكن في المستوي التالفي، لانأخذ نقاط بالشكل $(X_1, X_2, 0)$، ولا المستقيم $X_3 = 0$ اي ان، $[0, 0, 1]$. المستقيم $X_3 = 0$ يلعب دورا مهما في دراسة الهندسة التالفية حتى ولو انه لاينتمي الى المستوي التالفي. يشار

اليه بالمستقيم المحاذي للمستوي التالفي.

مبرهنة ٣.

في المستوي التالفي التحليلي، يمكن كتابة النقطة بالشكل $(x, y, 1)$.

البرهان

لتكن $P = (X_1, X_2, X_3)$ نقطة في A^2 ، فان $x_3 \neq 0$.
لذلك، بما ان

$$(X_1, X_2, X_3) = \left(\frac{X_1}{X_3}, \frac{X_2}{X_3}, 1\right)$$

نأخذ
$$y = \frac{X_2}{X_3} , X = \frac{X_1}{X_3}$$

يجب ملاحظة ذلك اذا اخذنا تمثيلا آخرا الى P، وليكن، $(\lambda X_1, \lambda X_2, \lambda X_3)$ ، فاننا نحصل على نفس القيم الى X و Y.

لان
$$\frac{\lambda X_2}{\lambda X_3} = y , \frac{\lambda X_1}{\lambda X_3} = X$$
و

اي ان لصف التكافؤ $[(X_1, X_2, X_3)]$ يناظر ثلاثيا واحدا $(x, y, 1)$.

تعريف ١٢

$(x, y, 1)$ هي احداثيات تالفية للنقطة في A^2.

مبرهنة ٣١

في المستوي التالفي، المستقيم بالشكل

$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$

لايحتوي على النقطة $(-u_2, u_1, 0)$

البرهان

بما ان المستقيم $X_3 = 0$ قد حذف، فان المستقيم $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ لايحتوي على نقطة تقاطعه مع المستقيم $X_3 = 0$ اي انه لايحتوي على النقطة $(-u_2, u_1, 0)$.

تعريف ١٣

النقطة $(-u_2, u_1, 0)$ هي النقطة المحاذية للمستقيم

$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$:

مبرهنة ٣٢

في مستوي تالفي، المستقيمان

$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ و $v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0$

يكونان متوازيين اذا وفقط اذا

$$\frac{u_2}{v_2} = \frac{u_1}{v_1}$$

البرهان

يكون المستقيمان متوازيين اذا لم يشتركا باية نقطة. لذلك، يكونا متوازيين اذا وفقط اذا كمستقيمين في P^2 تكون نقطة تقاطعهما تقع على المستقيم $X_3 = 0$ ، اي ان، اذا وفقط اذا

اي ان $(-u_2, u_1, 0) = (-v_2, v_1, 0)$

$$u_2/v_2 = u_1/v_1$$

نتيجة

$u_1x_1 + u_2x_2 + Kx_3 = 0$ تمثل مجموعة من مستقيمات متوازية لمختلف قيم k.

لايجاد زمرة التحويلات التالفية، يكون ضروريا ان نحصل على التحويلات الاسقاطية التي تترك المستقيم $X_3 = 0$ ثابتا، لذلك، التوازي هي ربما خاصية لاتتغير.

لتكن $A \in PG(2, R)$ بالشكل

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (|A| \neq 0)$$

بفعل التحويل الاسقاطي المعطى بـ A، تتحول النقطة (X_1, X_2, X_3) الى النقطة (X_1', X_2', X_3') ، حيث ان

$$X_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

المستقيم $X_3 = 0$ لايتغير، اذا كان $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = 0$ ، اي ان، اذا كان $a_{31} = a_{32} = 0$

في هذه الحالة، $(a_{33} \neq 0)$ لانه اذا كان $a_{31}=a_{32}=0$ فان $|A|=0$

لذلك، التحويل الاسقاطي هو تحويل تالفي اذا كان بالشكل

$$(a_{33} \neq 0), \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$AG(2,R) = \left\{ A \in PG(3,R) \;;\; A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \right\}$$

بما ان $a_{33} \neq 0$ ، وبما ان $[A]$ و $[(1/a_{33})A]$ تعطيان نفس التحويل، فان تحويلا تالفيا يمكن ان يكتب بالشكل

$$(3)\ldots \qquad A = \begin{bmatrix} a & b & h \\ c & d & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حيث ان $a = a_{11}/a_{33}$, $b = a_{12}/a_{33}$, $c = a_{21}/a_{33}$,

$h = a_{13}/a_{33}$, $k = a_{23}/a_{33}$, $d = a_{22}/a_{33}$,

يكون هذا الشكل مناسبا اكثر عندما نستعمل

الاحداثيات التالفيـــة. هكذا، فان النقطـــة $(x, y, 1)$ تتحول الى $(x', y', 1)$، حيث ان

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & h \\ c & d & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ax + by + h \\ cx + dy + k \\ 1 \end{bmatrix}$$

اي ان

$$(4)\ldots \quad \begin{aligned} x' &= ax + by + h \\ y' &= cx + dy + k \end{aligned}$$

يجب ملاحظة انه في هذا النظام يمكن ان يكتب المستقيم $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ بالشكل $u_1x + u_2y + u_3 = 0$. كذلك، اذا كان $u_1x + u_2y + u_3 = 0$ يتحول الى $u'_1x + u'_2y + u'_3 = 0$ ، فان

$$(5)\ldots \quad [u_1, u_2, u_3] = [u'_1, u'_2, u'_3] \begin{bmatrix} a & b & h \\ c & d & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [au'_1 + cu'_2,\ bu'_1 + du'_2,\ hu'_1 + ku'_2 + u'_3]$$

بما ان تحويـــلا تالفيا يحفظ المستقيم المحاذي

ثابتا ويرسل نقطة محاذية الى نقطة محاذية، من الواضح ان التوازي يحفظ بفعل زمرة التحويلات التالفية. ان هذا يمكننا من ان نقدم خواص اخرى لاتتغير للمستوي التالفي. كذلك، عدة مبرهنات تتضمن التوازي التي تشبه تلك التي في الهندسة الاقليدية نحصل عليها في المستوي التالفي. سنوضح هذا بامثلة قليلة.

تعريف ١٤

اذا كانت A و B نقطتين على مستقيم l والذي له النقطة $P\infty$ كنقطة محاذية، فان نقطة P تقع بين A و B اذا كان AB/PP_{∞}. مجموعة كل نقاط l بين A و B تدعى القطعة AB.

نقطة منتصف القطعة AB تعطى بواسطة المرافق التوافقي الى $P\infty$ بالنسبة الى A و B. اي ان، D هي منتصف القطعة AB اذا كان $H(AB,DP\infty)$.

من الواضح ان $D \in AB$. كذلك، بما ان $P\infty$ والخاصية التوافقية لاتتغيران بفعل زمرة التحويلات التالفية، فانه تكون كذلك مفاهيم البينية، القطعة ومنتصف قطعة.

مبرهنة ٣٣

لتكن $A = (a_1,a_2,a_3)$ $B = (b_1,b_2,b_3)$ نقطتين في مستوي تالفي. فان، نقطة منتصف القطعة (AB) هي

$$(b_3a_1+ a_3b_1,\ b_3a_2+ a_3b_2,\ 2a_3b_3)$$

البرهان

بما ان $P\infty$ و D هما نقطتان على المستقيم AB، فانه نستطيع ان نكتب

$$D = pA + qB$$

$$P\infty = SA + tB = (sa_1 + tb_1,\ sa_2 + tb_2,\ sa_3 + tb_3)$$

$P\infty$ هي نقطة محاذية، $sa_3 + tb_3 = 0$

اي ان $s/t = -b_3/a_3$.

من مبرهنة ٢٤، بما ان $H(AB, DP\infty)$، يكون عندنا

$$\frac{p}{q} + \frac{s}{t} = 0$$

اي ان

$$\frac{p}{q} = \frac{b_3}{a_3} \quad , \quad \frac{p}{b_3} = \frac{q}{a_3} = \text{ر}$$

نتيجة

اذا كانت الاحداثيات التالفية للنقطتين A و B هي على التوالي $(a_1, a_2, 1)$ و $(b_1, b_2, 1)$، فان الاحداثيات التالفية لنقطة منتصف القطعة AB تكون

$$((a_1 + b_1)/2,\ (a_2 + b_2)/2, 1))$$

البرهان

نعوض $a_3 = b_3 = 1$ في احداثيات النقطة D منتصف القطعة AB في المبرهنة السابقة، وبذلك نحصل على النتيجة.

٥-١٣ المستوى الاقليدي وزمرة التحويلات الاقليدية

المستوي التالفي التحليلي A^2 هو مجموعة جزئية من المستوي الاسقاطي التحليلي P^2. زمرة التحويلات التالفية هي زمرة جزئية $AG(2, R)$ من زمرة التحويلات الاسقاطية $PG(2, R)$. بهذا، الهندسة التالفية هي هندسة جزئية من الهندسة الاسقاطية.

في هذا البند، سنرى ان الهندسة الاقليدية هي هندسة جزئية من الهندسة التالفية. بما انه يكون من المناسب ان نستعمل الاحداثيات التالفية، سنجعل نقطة في A^2 بالشكل $(x, y, 1)$ وتحويلا تالفيا يعطى بمصفوفة بالشكل التالي:

$$(1)\ldots \quad A = \begin{bmatrix} a & b & h \\ c & d & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حيث ان

$$ad - bc \neq 0$$

ان هذا يحول النقطة $(x,y,1)$ الى النقطة $(x', y', 1)$ بحيث ان

$$x' = ax + by + h$$
$$y' = cx + dy + k$$

زمرة التحويلات التالفية هي

$$H_1 = \left\{ A \in G(3, R) : A = \begin{bmatrix} a & b & h \\ c & d & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ ad - bc \neq 0 \right\}$$

يمكن تكوين مستوي اقليدي من A^2 باعطاء دالة مسافة. لتكن الاحداثيات التالفية للنقطتين P وQ: $(x, y, 1)$ و $(x', y', 1)$ على التوالي، نعرف

$$(2)\ldots \quad = d(P,Q) = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2}$$

بهذا القياس ، المستوي التالفي يحقق كل بديهيات المستوي الاقليدي. هذا المستوي هو في تناظر متباين مع R^2 المعطى بالشكل

$$(x,y,1) \longleftrightarrow (x,y)$$

وبموجبه، مستقيم في A^2 يناظر مستقيما في R^2 ويحفظ علاقات الوقوع.

بسبب هذا التناظر، نقطة (x, y) في R^2 ربما تعتبر كنقطة في A^2 احداثياتها التالفية $(x, y, 1)$ او كنقطة (x_1, x_2, x_3) في P^2، حيث ان

$$\frac{x_2}{x_3} = y \qquad \frac{x_1}{x_3} = x$$

بما ان المجموعتين الاساسيتين للمستويين التالفي والاقليدي هما نفس المجموعة، فانه من الواضح ان مفاهيم التوازي، نقطة منصفة، الخ. تتحقق نفس الشيء في المستوي الاقليدي. على كل حال، تحويل تالفي يكون تحويلا اقليديا اذا وفقط اذا كان يحفظ القياس غير متغيرا. للحصول على الشروط لهذا، ليكن التحويل A المذكور اعلاه يحول النقطتين $P(X_1,Y_1)$، $Q(X_2,Y_2)$ الى النقطتين $P'(X_1',Y_1')$ $Q'(X_2',Y_2')$ على التوالي. فان

$$[d(P',Q')]^2 = [a(X_1 - X_2) + b(Y_1 - Y_2)]^2 + [c(X_1 - X_2) + d(Y_1 - Y_2)]^2$$

$$= (a^2 + c^2)(X_1 - X_2)^2 + (b^2 + d^2)(Y_1 - Y_2)^2$$
$$+ 2(ab + cd)(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)$$

لذلك

$$d(P', Q') = d(P, Q) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

اذا وفقط اذا

$$(3) \ldots \quad ab + cd = 0$$
$$(4) \ldots \quad a^2 + c^2 = 1$$
$$(5) \ldots \quad b^2 + d^2 = 1$$

و

ومن (3) ، نحصل على ان $-d/a = b/c = e$

اي ان $-d = ae$ و $b = ce$

وبالتعويض في (4) ، يكون عندنا $e^2 (a^2 + b^2) = 1$

والذي مع (5) ، ينتج ان $e^2 = 1$

من الواضح، $be = (ce)e = ce^2 = c$

و $a^2 + b^2 = 1$

لذلك، تحويل اقليدي يكون بالشكل

$$(6) \ \ldots \quad |A| = \pm 1 \quad e^2 = 1 \text{ ، } A = \begin{bmatrix} a & b & h \\ be & -ae & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبطريقة روتينية، نبرهن ان المجموعة

$$H_2 = \left\{ A \in G(3, R) : A = \begin{bmatrix} a & b & h \\ be & -ae & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

تكون زمرة جزئية من $G(3, R)$. تدعى هذه الزمرة الجزئية زمرة التحويلات الاقليدية او زمرة التقايسات

(isometries) للمستوي الاقليدي.

بما ان $a^2 + b^2 = 1$، فاننا نستطيع ان نكتب

$a = \cos\theta$ ، $b = \sin\theta$.

تعريف ١٥

لتكن $A(a_1, a_2, 1)$ ، $B(b_1, b_2, 1)$

و $C = (c_1, c_2, 1)$ ثلاث نقاط في المستوي الاقليدي. فان قياس مساحة المثلث ABC والتي يرمز له بالرمز m(ABC) هو القيمة المطلقة للمحدد

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

مبرهنة ٣٣

قياس مساحة مثلث لايتغير بموجب زمرة التقايسات.

البرهان

لتكن $A(a_1, a_2, 1)$ $B(b_1, b_2, 1)$

و $C(c_1, c_2, 1)$ ثلاث نقاط في المستوي الاقليدي والتي تتحول بفعل التقايس المعطى في (6) الى النقاط $A'(a'_1, a'_2, 1)$ ، $B'(b'_1, b'_2, 1)$،

و $C'(c'_1, c'_2, 1)$ على التوالي، فان

$$m(A'B'C') = \left\| \begin{matrix} a'_1 & a'_2 & 1 \\ b'_1 & b'_2 & 1 \\ c'_1 & c'_2 & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{vmatrix} aa_1 + ba_2 + h & eba_1 - eaa_2 + k & 1 \\ ab_1 + bb_2 + h & ebb_1 - eab_1 + k & 1 \\ ac_1 + bc_2 + h & ebc_1 - eac_2 + k & 1 \end{vmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{vmatrix} aa_1 & -eaa_2 & 1 \\ ab_1 & -eab_2 & 1 \\ ac_1 & -eac_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ba_2 & eba_1 & 1 \\ bb_2 & ebb_1 & 1 \\ bc_2 & ebc_1 & 1 \end{vmatrix} \right\|$$

$$= \left| (-ea^2 - eb^2) \right| \left\| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \right\|$$

$$= (a^2 + b^2) m(ABC) = m(ABC)$$

لان $a^2 + b^2 = 1$

تعريف ١٦

الزاوية θ المحددة بالمستقيمين

$u_1x + u_2y + u_3 = 0$ و $v_1x + v_2y + v_3 = 0$

في المستوي الاقليدي تعرف كما يلي:

$$\cos\theta = \frac{|u_1v_1 + u_2v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\,\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{|u_1v_1 - u_2v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\,\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

يكون المستقيمان متعامدين اذا كانت الزاوية المحددة بهما تحقق $\cos\theta = 0$.

مبرهنة ٣٥

الزاوية θ المحددة بمستقيمين لاتتغير في زمرة التقايسات.

البرهان

ليكن التقايس (6) يحول المستقيمين

$u_1x + u_2y + u_3 = 0$ و $v_1x + v_2y + v_3 = 0$ الى المستقيمين $u'_1x + u'_2y + u'_3 = 0$ و $v'_1x + v'_2y + v'_3 = 0$، على التوالي.

فانه من (5) بند ١٣-٤ نحصل على:

$$u_1 = au'_1 + ebu'_2 \qquad v_1 = av'_1 + ebv'_2$$
$$u_2 = bu'_1 - eau'_2 \qquad v_2 = bv'_1 - eav'_2$$

اذا كانت الزاوية θ تتحول الى θ'، فانه بكتابة u_1, u_2, v_2, v_2 بدلالة u'_1, u'_2, v'_2, v'_2، نحصل على

$$\cos\theta = \frac{|u_1v_1 + u_2v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$
$$= \frac{(a^2 + b^2)\,|u'_1v'_1 + u'_2v'_2|}{(a^2 + b^2)\sqrt{u'^2_1 + u'^2_2}\sqrt{v'^2_1 + v'^2_2}} = \cos\theta'$$

١٣-٥ تمارين

١- برهن على انه اذا كانت D نقطة منتصف قطعة مستقيم AB في المستوي الاقليدي، فان

$$d(A, D) = d(B, D)$$

٢- اذا كانت $\cos\theta$ و $\sin\theta$ كما عرفت في التعريف ١٦، برهن ان $0 \le \cos\theta \le 1$ و $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

٣- برهن ان مستقيمين في المستوي الاقليدي يكونان متوازيين اذا وفقط اذا كانت الزاوية المحددة بهما تحقق $\cos\theta = 1$.

٤- برهن ان مفهوم التوازي لايتغير في زمرة التقايسات.

٥- التقايس الذي له نقطة اعتيادية كنقطة ثابتة يدعى دوران، النقطة الثابتة للدوران تدعى مركزه. جد الدوران الذي مركزه $(0, 0)$.

١٢-٦ هندسات جزئية اخرى من الهندسة الاسقاطية

تعريفا الزاوية وقياس مساحة الذين قدما في البند السابق، لايتضمنا القياس الاقليدي. لذلك، فمن الممكن ان نعرفهما في المستوي التالفي ايضا ونحصل على زمر جزئية من الزمرة التالفية التي تحفظهما بدون تغيير.

تعريف ١٧

قياس مساحة مثلث $m(ABC)$ يتكون من $A(a_1, a_2, 1)$، $B(b_1, b_2, 1)$ و $C(c_1, c_2, 1)$ في المستوي التالفي كما قدم في تعريف ١٥ . اذا كان تحويل تآلفي يحفظ قياس مساحة اي مثلث، فانه يدعى تحويل متساوي المساحة (equiareal).

ليكن التحويل التالفي في البند السابق يحول المثلث ABC الى المثلث A'B'C'.

$$m(A'B'C') = \left\| \begin{matrix} aa_1 + ba_2 + h & ca_1 + da_2 + k & 1 \\ ab_1 + bb_2 + h & cb_1 + db_2 + k & 1 \\ ac_1 + bc_2 + h & cc_1 + cc_2 + k & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{vmatrix} aa_1 & a_2d & 1 \\ ab_1 & b_2d & 1 \\ ac_1 & c_2d & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ba_1 & ca_2 & 1 \\ bb_1 & cb_2 & 1 \\ bc_1 & cc_2 & 1 \end{vmatrix} \right\|$$

$$= \left| (ad - bc) \right| \times m(ABC)$$

لذلك $m(ABC) = m(A'B'C')$ اذا وفقط اذا
$\left|(ad - bc)\right| = 1$. بما ان $(ad-bc)$ هو المحدد للتحويل
التالفي في (1) بند ١٣ ـ ٥، نستنتج مايلي:
تحويل تالفي يكون تحويل متساوي المساحة (equiareal)
اذا كانت القيمة المطلقة لمحددة هي ١.

تعريف ١٨

تكون الزاوية θ بين مستقيمين في المستوي التالفي كما في تعريف ١٦. تحويل تالفي هو تحويل تشابه اذا كان يحفظ الزاوية المحددة باي مستقيمين.

اذا كان التحويل التالفي المعطى في (1) البند السابق يحول المستقيمين $m_1x + m_2y + m_3 = 0$ و $n_1x + n_2y + n_3 = 0$ الى المستقيمين $u_1x + u_2x + u_3 = 0$ و $v_1x + v_2y + v_3 = 0$ على التوالي، فانه، من (5) بند ١٣ ـ ٤، يكون عندنا

$$m_1 = au_1 + cu_2 \qquad n_1 = av_1 + cv_2$$

$$m_2 = bu_1 + du_2 \qquad n_2 = bv_1 + dv_2$$

كذلك، اذا كانت θ هي الزاوية بزوج المستقيمين الاول و θ تتحول الى Q'، فان

$$\cos\theta = \frac{m_1n_1 + m_2n_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}\ \sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$$

$$= \frac{(a^2+b^2)u_1v_1+(c^2+d^2)u_2v_2+}{\sqrt{(a^2+b^2)u_1^2+(c^2+d^2)u_2^2+(ca+bd)u_1u_2}}$$

$$\frac{(ac+bd)(u_1v_2+v_2u_1)}{\sqrt{(a^2+b^2)v_1^2+(c^2+d^2)v_2^2+(ac+bd)v_1v_2}}$$

لذلك $\cos\theta = \cos\theta'$ اذا وفقط اذا

$a^2+b^2 = c^2+d^2$ و $ac+bd=0$

و $c=-be$ اي ان $d/a = -c/b = e$ ، $\longleftarrow$ $ac+bd=0$

$\longleftarrow$ $a^2+b^2 = c^2+d^2$ وبالتعويض في $d=ae$

$e^2=1$ اي ان ، $a^2+b^2 = e^2(a^2+b^2)$

لذلك، تحويل تشابه سيكون بالشكل

$$\begin{bmatrix} a & b & h \\ -be & ae & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ، حيث ان } e^2=1$$

من H_2 (تمارين ١٣ ـ ٣ السؤال ١)، نستنتج ان مجموعة كل تحويلات التشابه تكون زمرة جزئية من الزمرة التالفية.

هذه هي زمرة التشابه. المستوي التالفي بفعل زمرة تحويلات التشابه يقودنا الى هندسة التشابهات.

تعريف ١٩

تحويل تالفي يدعى تحويل تماثل اذا كان يحول نقطة بالشكل $(x_1, x_2, 0)$ الى نفسها.

نلاحظ ان التحويل (1) في البند السابق يحول

النقطة $X(X_1, X_2, 0)$ الى النقطة $X'(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2, 0)$.
لذلك $X = X'$ اذا وجد $\lambda \neq 0$ بحيث ان

$$ax_1 + bx_2 = \lambda x_1 \quad \text{و} \quad cx_1 + dx_2 = \lambda x_2$$

خاضعا للشرطين

$$a = d = \lambda \quad \text{و} \quad b = c = 0$$

بهذا، تحويل تماثل يعطى بمصفوفة بالشكل

$$\begin{bmatrix} a & 0 & h \\ 0 & a & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ، \quad a \neq 0$$

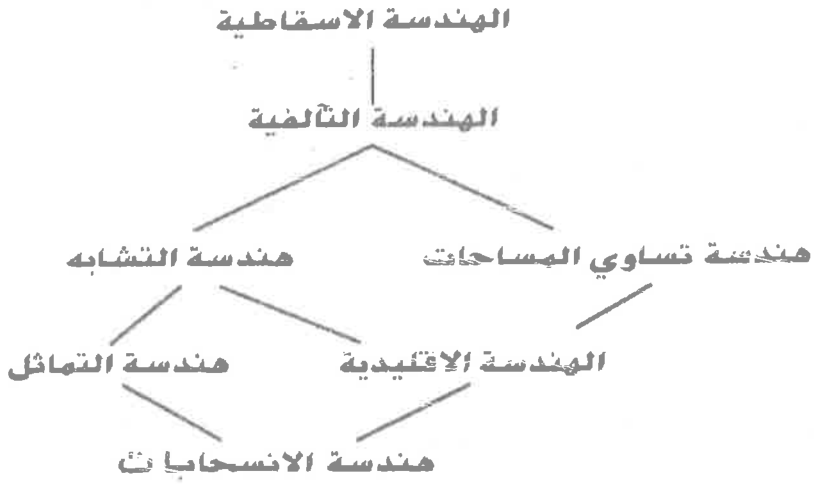
من السهولة ان نحقق ان مجموعة تحويلات التماثل للمستوي التالفي هي زمرة جزئية من الزمرة التالفية.
اذا كان $a \neq 1$ ، فان تحويل التماثل يدعى تحاكي.
في هذه الحالة، توجد نقطة اعتيادية، التي هي نقطة ثابتة.
هذه النقطة تعطى بالشكل

$$ax_1 + hx_3 = x_1 \quad \text{و} \quad ax_2 + kx_3 = x_2$$

اي ان

$$\frac{x_1}{h} = \frac{x_2}{k} = \frac{x_3}{1-a}$$

لذلك، النقطة الثابتة هي $(h, k, 1-a)$.
اذا كان $a = 1$، فان تحويل التماثل يدعى انسحاب. من الواضح، الانسحاب هو تحويل اقليدي ومجموعة الانسحابات تكون زمرة جزئية من الزمرة الاقليدية.
نلاحظ مما تقدم انه نستطيع ان نضع المخطط التالي وحسب الترتيب.



١٣-٦ تمارين

١- برهن ان الهندسة الاقليدية هي هندسة جزئية من هندسة التشابه.

٢- اذكر لماذا مجموعة التحاكيات لاتكون زمرة.

٣- برهن ان هندسة الانسحابات هي هندسة جزئية من الهندسة الاقليدية.

٤- برهن ان هندسة التماثل هي هندسة جزئية من هندسة التشابه، لكنه ليس من الضروري ان تكون زمرة جزئية من الهندسة الاقليدية.

بعض المصطلحات المستعملة

— A —

A cute Angle	زاوية حادة
Alternate Interior Angle	زوايا داخلية متبادلة
Adjacent Angles	زوايا متجاورة
A symptotic Triangle	مثلث محاذي
Axiom	بديهية
Axiom set	مجموعة بديهيات
Axiomatic System	نظام بديهي
Axis of pers pectivity	محور المنظورية

— B —

Bisector	منصف

— C —

Categorical	فصيلة
Center of prespectivity	مركز المنظورية
Completeness	تمامية ـ كمالية
Consistency	اتساق
Configuration	تشكيل
Convex set	مجموعة محدبة
Complete Quadrangle	رباعي زوايا تام
Corresponding Angles	زوايا متناظرة

Congruent	يطابق
Construction	انشاء (رسم)

— D —

Dependent	غير مستقل
Definition	تعريف
Disjoint	منفصل
Diagonal point	نقطة قطرية
Diagonal Line	خط قطري
Dual	ثنائي
Double Elliptic Geometry	هندسة اهليليجية مزدوجة
Dilitation	تحاكي

— E —

Finite system	نظام منته

— H —

Harmonic set	مجموعة توافقية
Harmonic Sequence	متتابعة توافقية
Hyperbolic Geometry	هندسة هذلولية
Homothetic	تماثل

— I —

Isomorphic	متشاكل تقابليا
Independent	مستقل
Incidence	وقوع
Incidence Relation	علاقة وقوع
Interior	داخل

— L —

Linear Pair	زوج خطي
Line Section	قطع خطي

— M —

Measure	قياس

— N —

Necessary and Sufficient	ضروري وكافي
Non - Euclidean Geomtery	هندسة لااقليدية

— O —

Opposite rays	اشعة متعاكسة
Opposite sides	جهات متعاكسة

Obtuse Angle	زوايـة مـنـفـرجـة

— P —

Preserves Relation	يـحـفـظ الـعلاقـة
Pencil	حزمـة
Projective Geometry	هـنـدسـة اسـقـاطـيـة
projectivity	اسـقـاطـيـة
Point Section	قـطـع نـقـطـي
Perspectivity	مـنـظـوريـة
Principle of duality	مـبـدأ الـثـنـائـيـة
Parallel	مـواز

— R —

Ray	شعاع
Relation	علاقـة
Right Angle	زاويـة قـائـمـة
Reflexive property	خاصـيـة انـعـكـاسـيـة

— S —

System	نـظـام
Set	مـجـمـوعـة
Supplementary Angle	زوايـا مـتـكـامـلـة
Segment	قـطـعـة

Same direction	نفس الاتجاه
Single Elliptic Geomerty	هندسة اهليليجية احادية
Self dual	ثنائي نفسه
Separation	فصل

— T —

Transitive property	خاصية متعدية
Theorem	مبرهنة
Translation	نقل ـ انسحاب
Transformation	تحويل

— U —

Unique	وحيد
Uniqueness	وحدانية
Undefined terms	كلمات اولية

— V —

Vertex	راس