جامعة بغداد / كلية التربية للعلوم الصرفة - ابن الهيثم
قسم الرياضيات

مفاهيم اساسية في الهندسة

المرحلة الثانية

الكتاب المنهجي تاليف : أ.د.امال شهاب المختار

تدريس كل من

م.سوسن جواد كاظم
م.د.ميساء جليل محمد

الفصل الاول
الانظمة البدهية
(Axiomatic)

يتكون النظام البدهي من تعاريف، مجموعة بديهيات ومبرهنات. سندرس هذه المفاهيم بشكل عام ثم نأخذ بعض الامثلة عن انظمة بدهية التي تكون بعضا منها منتهية.

١-١ التعاريف

ان اي تعريف جيد لأي كلمة (مصطلح) في الرياضيات يجب ان يعبر عنه ببساطة، ان يكون غير دوري ويصف بطريقة وحيدة الكلمة المراد تعريفها.

فالبساطة تعني ان نعبر عن الكلمة المراد تعريفها بكلمات ابسط منها، اي بكلمات معروفة، فقد عرف اقليدس النقطة بانها ليست لها بعد، والمستقيم له طول فقط وليس له عرض او سمك. ان هذه الكلمات التي هي البعد، الطول، العرض، والسمك اصعب من الكلمات المراد تعريفها، لذلك لايمكن قبول مثل هذه التعاريف.

اما الدورية فيقصد بها عند تعريف كلمة ما، فاننا سنمر بسلسلة من التعاريف التي قد تنتهي بنفس الكلمة، فمثلا، اذا عرفنا المستقيم بانه مجموعة من نقاط ونعرف النقطة بانها تقاطع مستقيمين، فان هذه العملية تكون دورية، لذا نتجنب ان نعرف س بدلالة ص ونعرف ص بدلالة س.

يقصد بالوصف الوحيد ان التعريف الدقيق لكلمة مايجب ان يصف هذه الكلمة بطريقة بحيث لاينطبق هذا الوصف على كلمة اخرى، فمثلا، اذا عرفنا قلم الرصاص "بانه اداة حادة تستعمل للكتابة"، فان هذا التعريف يصف ايضا قلم الحبر وقلم الجاف. لذلك لايمكن قبول مثل هذه التعاريف. ولكي نتجنب هذه المشكلة نختار بعض الكلمات بدون تعريف لتكون كلمات اولية او كلمات غير معرفة (Undefined terms) وبدلالتها تعرف بقية الكلمات او المصطلحات في النظام. تصنف الكلمات الاولية الى نوعين:

(أ) الكلمات التقنية : (technical terms)

تختلف هذه الكلمات من موضوع الى موضوع آخر، ففي الهندسة بصورة خاصة، كمثال: "النقطة"، "المستقيم"، "التطابق"، "بين"، ربما تعتبر هذه الكلمات اولية في النظام المعطى . ومن المحتمل في انظمة اخرى في الهندسة تختار كلمات اولية اخرى. تستعمل الكلمات الاولية في نظام ما كاساس تبنى عليه المصطلحات ولغة النظام. وكل مصطلح جديد يجب ان يعرف اما باستعمال الكلمات الاولية او المصطلحات التي عرفت بدلالتها. لذلك يجب ان توضع قائمة لكلمات اولية في بداية كل نظام.

(ب) الكلمات المنطقية:

مثل "كل"، "لأي"، "بعض"، "يوجد"، "في الاقل واحد"، "في الاكثر واحد"، "فقط"، "واحد"، "اثنان"، وهكذا.

حيث يوجد عدد غير محدد من الكلمات المنطقية، لكن الكلمات التي ذكرت تقع على الاكثر في الرياضيات.

٢-١ البديهيات (Axioms)

كما ان الكلمات الاولية اختيرت كأساس، وبدلالتها تعرف الكلمات الاخرى، فاننا نختار كذلك بعض العبارات البسيطة التي تتعلق بالكلمات الاولية كأساس ومنها نستنتج العبارات الاخرى في النظام. هذه العبارات الاساسية التي نتقبلها بدون برهان تدعى بديهيات والتي هي حجر الاساس للبناء.

ان التعريف القديم للبديهية "هي حقيقة واضحة نتقبلها بدون برهان" غير مقبول في الرياضيات الحديثة، ولو ان الجزء الاخير "نتقبلها بدون برهان" صحيح، غير ان الجزء الباقي خطأ. اذ ليس من الضروري ان تكون من الواقع الذي نعيش فيه، حيث توجد بديهيات في بعض الانظمة البدهية تناقض بديهيات انظمة اخرى، كما سنبينها لاحقا.

لقد عرف هلبرت البديهيات في نظامه البدهي للهندسة الاقليدية، بما يلي:

"اذا اخذنا بعض الكلمات لتكون اولية، فان البديهيات هي مجرد فرضيات حول تلك الكلمات الاولية".

ان الكلمات الاولية هي مجرد متغيرات، ولهذا فان البديهيات هي جمل مفتوحة، لانها في هذه الحالة، تحوي على متغيرات وعلى هذا الاساس، فانه لايمكن ان يقال بانها اما صائبة او خاطئة، وعليه فان البديهية لاتحتاج الى برهان.

لكي نضع مجموعة من بديهيات لنظام معين، يجب ان ندرس خواص النظام البدهي التي سنتطرق اليها في الفصل القادم.

اما المبرهنة (Theorem) فهي النتيجة التي نحصل عليها من بديهيات النظام او من عبارات في هذا النظام

مبرهنة سابقا تعتبر كفرضيات.

ان علم الهندسة هو عبارة عن نظام بدهي، لاننا نستخدم مجموعة من بديهيات، تعاريف، ومبرهنات. ان افضل واقرب مثال بالنسبة الينا للنظام البدهي هو الهندسة الاقليدية.

في هذا الفصل سنأخذ امثلة عن انظمة بدهية، التي قسما منها تكون منتهية، اي انها تحتوي على عدد منته من عناصر. نأخذ النقطة والمستقيم لتكون كلمات اولية في الانظمة التالية ولاتوجد خواص اخرى عنهما غير التي ستذكر في البديهيات.

١-٣ المستوى الاسقاطي (Projective Plane)

سنكون مستويا اسقاطيا كمثال على نظام بدهي.
يتكون المستوى الاسقاطي من مجموعة π لكلمات اولية تقنية تدعى نقاط ومجموعات جزئية من π تدعى مستقيمات، والتي هي ايضا غير معرفة. سنرمز لنقاط π بالحروف الكبيرة A,B,C ، ومستقيمات π بالحروف الصغيرة $l,m,n...$ ، فان بديهيات π هي كما يلي.

مجموعة البديهيات

١- اي نقطتين مختلفتين في π يحتويهما مستقيم واحد فقط.

اي ان، اذا كان $A,B\in\pi$ بحيث ان $A\neq B$ و $A,B\in l$ و $A,B\in m$ ، فان $l=m$.

٢– كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل.
٣– توجد في الاقل نقطة واحدة A ويوجد في الاقل خط واحد l بحيث ان $A \notin l$.

٤– اي مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة في الاقل.
من هذه البديهيات نستطيع ان نكون تعاريف ومبرهنات جديدة.

مبرهنة ١

اي مستقيمين مختلفين في المستوي الاسقاطي يشتركان في نقطة واحدة فقط.

البرهان

$l \cdots \ni A, B \in l \wedge A, B \in m$

ليكن m و l مستقيمين مختلفين في π.
m و l مختلفين يعني ان $l \neq m$.
من البديهية ٤، توجد نقطة A بحيث ان $A \in l$ و $A \in m$.
نفرض انه توجد نقطة اخرى B تختلف عن A بحيث ان $B \in l$ و $B \in m$.
فانه من البديهية ١، $l = m$. وهذا يناقض الفرض بان $l \neq m$. وبهذا، فان l و m يشتركان في نقطة واحدة فقط.

مبرهنة ٢

اي نقطة في المستوي الاسقاطي هي عنصر لثلاثة خطوط في الاقل.

البرهان

لتكن P اية نقطة في π

من البديهية ٣ ، يوجد مستقيم l ، بحيث ان $P \notin l$.

كذلك، من البديهية ٢ ، توجد ثلاث نقاط في الاقل على المستقيم l، ولتكن A_1, A_2, A_3.

من البديهية ١ ، توجد الخطوط PA_1, PA_2, PA_3 التي تمر من P وتكون مختلفة.

لقد استخدمنا "واحد فقط" في البديهية ١ و "في الاقل واحد" في البديهية ٤ . ان "واحد فقط" التي استخدمت في المبرهنة ١ تكافيء "في الاقل واحد" و " في الاكثر واحد". فقد برهنا اولا ان المستقيمين يتقاطعان في نقطة واحدة في الاقل، وثانيا ان المستقيمين يتقاطعان في نقطة واحدة في الاكثر، وبذلك يتقاطع المستقيمان في نقطة واحدة فقط.

نعتبر هنا النقطة كعنصر في المجموعة الشاملة π ، والمستقيم هو مجموعة من نقاط اي مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة.

بما ان النقطة والمستقيم هما كلمتين اوليتين او متغيرين، فاننا يمكن ان نعوض عن النقطة والمستقيم بما يلي:

"عنصر" و "مجموعة"

"خرزة" و "سلك"

"رجل " و "لجنة"، وهكذا

ان هذا يوضح العلاقة بين العناصر الاولية.

لابد ان نوضح هنا ان العبارة ((اي مستقيم هو مجموعة من نقاط)) لاتعتبر تعريف للمستقيم، لان هنالك مجموعات من نقاط لاتكون مستقيمات، فمثلا: الدائرة، المثلث، وهكذا.

عندما نقول: "النقطة P هي عنصر في المستقيم l" فاننا يمكن ان نقول ايضا: L يمر من P، L يحتوي على P، P على l او P تقع على l.

وعندما تكون النقطة عنصرا لاكثر من مستقيم واحد، وليكن المستقيمين l و m، فانه يمكن ان نقول: l يلتقي مع m في P، او l يقطع m في P.

نلاحظ من مبرهنة ١، ان اي مستقيمين في المستوي الاسقاطي يتقاطعان في نقطة واحدة فقط. بتعبير آخر، لايمكن ان نتكلم عن المستقيمات المتوازية او المستقيمات التي لاتتقاطع. لهذا لايمكن ان تكون هذه المستقيمات في المستوى الاقليدي.

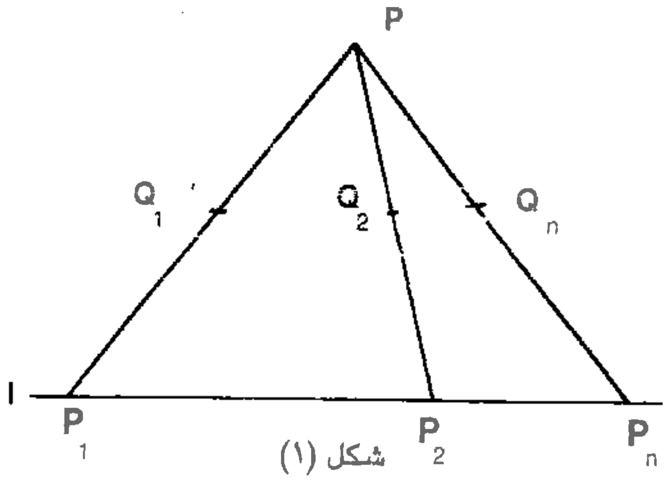
١-٤ مستويات اسقاطية منتهية

مستوى اسقاطي منته هو مجموعة منتهية تحقق البديهيات من ١ الى ٤ . سنناقش الآن بعض النتائج الاساسية لمستويات اسقاطية منتهية.

مبرهنة ٣

اذا وجدت بالضبط n من النقاط على مستقيم لمستوي اسقاطي منته، فان المستوي يحتوي بالضبط على n^2-n+1 من النقاط.

البرهان



شكل (١)

ليكن l مستقيما يحتوي بالضبط على n من النقاط، ولتكن $P_1, P_2, ... P_n$.

من البديهية ٣، توجد نقطة P لاتقع على l.

ومن بديهية ١ ، توجد n من الخطوط المختلفة $PP_1, PP_2, ..., PP_n$. ومن بديهية ٢ ، توجد نقطة ثالثة على كل خط من هذه الخطوط، ولتكن $Q_1, Q_2, ..., Q_n$، على التوالي.

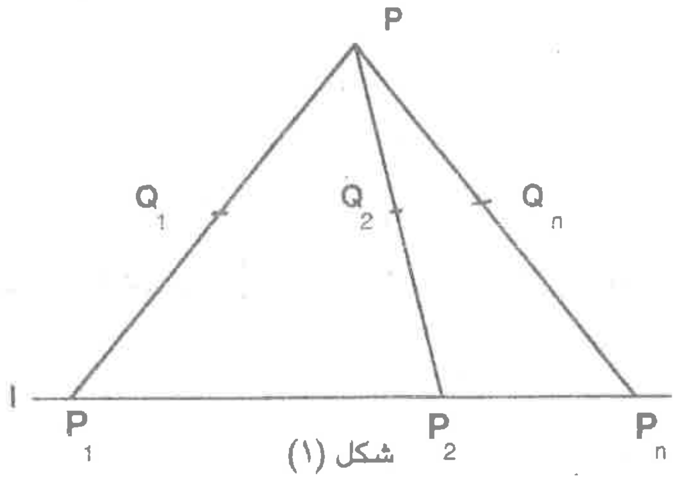
نأخذ النقطة Q_1 ونصلها بالنقاط $P_1, P_2, ... P_n$.

فنحصل على n من الخطوط $Q_1P_1, Q_1P_2, ..., Q_1P_n$

هذه الخطوط تقطع PP_2 في n من النقاط المختلفة. لذلك PP_2 يحتوي على n-1 من النقاط عدا P. ان هذا يصح لكل من المستقيمات $PP_1, PP_2, ..., PP_n$. وبهذا، n من الخطوط، وكل خط منها يحتوي على n-1 من النقاط، ومع النقطة P، يحتوي المستوي على $n(n-1)+1=n^2-n+1$ من النقاط في الاقل.

لكي نبرهن ان المستوي يحتوي على n^2-n+1 من النقاط على الاكثر، نفرض وجود نقطة اخرى Q، لاتقع على اي خط من تلك الخطوط. الخط QP يختلف عن الخطوط

البرهان



شكل (١)

ليكن l مستقيما يحتوي بالضبط على n م
النقاط، ولتكن $P_1, P_2, \dots P_n$.

من البديهية ٣، توجد نقطة P لا تقع على l.

ومن بديهية١ ، توجد n من الخطوط المختلف
$PP_1, PP_2, \dots, PP_n$. ومن بديهية٢ ، توجد نقطة ثالثة ع
كل خط من هذه الخطوط، ولتكن $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$، ع
التوالي.

نأخذ النقطة Q_1 ونصلها بالنقاط $P_1, P_2, \dots P_n$.
فنحصل على n من الخطوط $Q_1P_1, Q_1P_2, \dots, Q_1P_n$
هذه الخطوط تقطع PP_2 في n من النقاط المختلفة
لذلك PP_2 يحتوي على n-1 من النقاط عدا P. ان هذ
يصح لكل من المستقيمات $PP_1, PP_2, \dots, PP_n$. وبهذا،
من الخطوط، وكل خط منها يحتوي على n-1 من النقا
ومع النقطة P، يحتوي المستوي على n-1)+1=n^2-n+1
من النقاط في الاقل.

لكي نبرهن ان المستوي يحتوي على n^2-n+1 م
النقاط على الاكثر، نفرض وجود نقطة اخرى Q، لا تقع ع
اي خط من تلك الخطوط. الخط QP يختلف عن الخط

المذكورة. من مبرهنة١ ، QP يقطع l في نقطة P_{n+1} التي تختلف عن النقاط $P_1, P_2, \ldots, P_n$. وبهذا يحتوي l على n+1 من النقاط وهذا يخالف الفرض.

بهذا فقد برهنا على ان المستوي يحتوي بالضبط على n^2-n+1 من النقاط.

لقد ذكرنا في هذه المبرهنة على انه اذا كان المستقيم يحتوي على n من النقاط، فان اي مستقيم آخر يحتوي ايضا على n من النقاط، لذلك نستنتج النتيجة التالية.

نتيجة

اذا كان في المستوي الاسقاطي مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط، فان اي مسقيم آخر يحتوي بالضبط على n من النقاط.

لنا عودة الى المستوي الاسقاطي في الفصل الحادي عشر. سنقدم الان نظاما بدهيا مختلفا يتضمن مفهوم التوازي.

١-٥ المستوى التآلفي *(Affine Plane)*

يتضمن المستوى التآلفي من مجموعة α من كلمات اولية تقنية تدعى نقاط، ومجموعات جزئية من α تدعى مستقيمات، والتي هي ايضا تقنية. سنستعمل نفس الرموز للنقاط والمستقيمات في α كما في المستوي الاسقاطي.

مجموعة البديهيات

١- اي نقطتين مختلفتين A, B في α يحتويهما مستقيم

واحد فقط.

٢- كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل.

٣- يوجد في الاقل نقطة واحدة A ومستقيم واحد l بحيث $A \notin l$.

٤- اذا كان l مستقيما وA نقطة بحيث ان $A \notin l$، فانه يوجد مستقيم واحدفقط m يحتوي A بحيث ان $l \cap m = \phi$.

تعريف ١

يقال لمستقيمين مختلفين انهما متوازيان، اذا كان $l \cap m = \phi$.

من هذا التعريف، يمكن ان نعيد نص بديهية ٤ بالشكل التالي:

((اذا كان l مستقيما وA نقطة بحيث ان $A \notin l$، فانه يوجد مستقيم واحد فقط m يمر من A ويوازيl)).

مبرهنة ٤

اي مستقيمين مختلفين في مستوى تآلفي يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر.

البرهان

نفرض ان العبارة خطأ. فيوجد مستقيمان مختلفان l و m يشتركان في نقطتين في الاقل، ولتكن P وQ. ولكن هذا يناقض البديهية١ ، حيث ان P وQ تقعان على المستقيمين l و m، وان البديهية١ تنص على انه لكل نقطتين معلومتين، يوجد مستقيم واحد فقط يحتويهما. لذلك، فان فرضيتنا تؤدي الى تناقض. وبهذا فان اي

مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر. اي ان، اي مستقيمين اما يكونا متوازيين او يتقاطعان في نقطةٍ واحدة فقط.

مبرهنة ٥

اذا قطع مستقيم احد مستقيمين متوازيين، فانه يجب ان يقطع الآخر.

ألبرهان

ليكن k و l مستقيمين متوازيين، وان m مستقيم آخر يقطع k في نقطة P. يجب ان نبرهن ان m يقطع l في نقطة ما. نفرض ان العبارة خطأ، اي ان m يوازي l، فانه من P سيكون هنالك المستقيمان k و m يوازيان l، وهذا يخالف البديهية ٤ . لذلك، فان الفرض يجب ان يكون خاطئا. وهكذا، اذا قطع خط احد مستقيمين متوازيين، فانه يجب ان يقطع الآخر.

مبرهنة ٦

المستقيمان الموازيان للمستقيم نفسه متوازيان.

البرهان

ليكن k و l مستقيمين متوازيين، و l و m مستقيمين متوازيين. يجب إن نبرهن ان k و m متوازيان. نفرض ان العبارة خطأ. فاذا كان k لايوازي m، فانه يقطع m. ومن المبرهنة٥ ، فان k يجب ان يقطع l، وهذا يناقض الفرض بان k يوازي l. لذلك، فان فرضيتنا

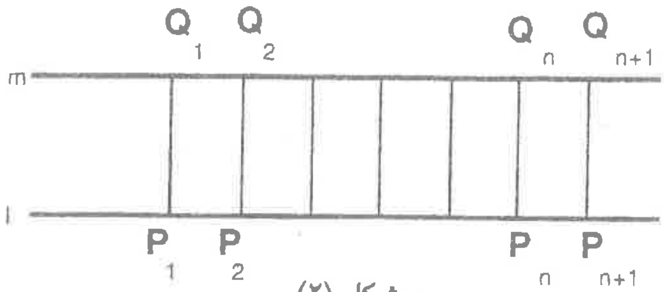
تؤدي الى تناقض. وعليه، فان المستقيمين الموازيين للمستقيم نفسه متوازيان.

١-٦ مستويات تآلفية منتهية

مستوي تآلفي منته هو مجموعة منتهية تحقق البديهيات من ١ الى ٤ للمستوى التآلفي.

مبرهنة ٧

اذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط، فان اي مستقيم يوازي l يحتوي بالضبط على n من النقاط.



شكل (٢)

البرهان

نفرض ان l مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$. ليكن m اي مستقيم يوازي l. يجب ان نبرهن ان m يحتوي بالضبط على n من النقاط. من بديهية٢ ، توجد نقطة Q_1 على m. ومن بديهية١ ، يوجد المستقيم P_1Q_1. من البديهية٤ ، توجد بالضبط $n-1$ من المستقيمات الموازية الى P_1Q_1 من النقاط $P_2, \ldots, P_n$ ومن مبرهنة ٦ ، هذه المستقيمات تكون متوازية ومن المبرهنتين ٤و٥ ، تقطع هذه المستقيمات المستقيم m في $n-1$ من النقاط المختلفة، ولتكن $Q_2, \ldots, Q_n$ والتي

تختلف عن Q_1 (من تعريف التوازي). من هذا نستنتج على انه توجد على الاقل n من النقاط على m.

لكي نبرهن على وجود على الاكثر n من النقاط على m، نفرض وجود نقطة اخرى، و Q_{n+1} Q_{n+1}، على m. من البديهية ٤، يوجد مستقيم يمر من Q_{n+1} ويوازي P_1Q_1. من المبرهنتين ٤و٥، هذا المستقيم يقطع l في نقطة غير النقاط $P_1, \ldots, P_n$، وهذا يخالف الفرض بان l يحتوي بالضبط على n من النقاط.

لذلك، فانه نتيجة لما تقدم، فان m يحتوي بالضبط على n من النقاط.

مبرهنة ٨

اذا كان اي مستقيم l يحتوي بالضبط على n من النقاط، فانه توجد بالضبط $n-1$ من المستقيمات الموازية الى l.

البرهان

ليكن l مستقيما يحتوي بالضبط على n من النقاط، ولتكن، $P_1, P_2, \ldots, P_n$. ولتكن P نقطة لاتقع على l (بديهية٣).

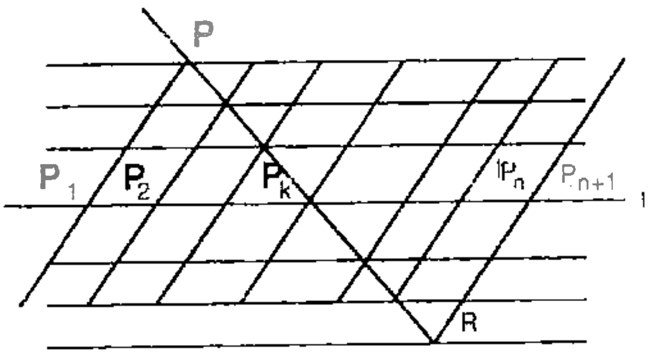
من بديهية١، يوجد المستقيمان PP_1, PP_k (حيث P_k هي اي نقطة من النقاط $P_2, \ldots, P_n$).

من بديهية٤، يوجد بالضبط $n-1$ من المستقيمات الموازية الى PP_1 والتي تمر من النقاط $P_2, P_3, \ldots, P_n$ (احدهما سيمر بالنقطة P_k). من المبرهنتين ٤و٥ المستقيم PP_k الذي يقطع PP_1 والمستقيم الموازي له من P_k، يجب ان يقطع كل من الخطوط الاخرى الموازية الى PP_1 في نقطة واحدة فقط. لذلك، عدد نقاط التقاطع هذه

عبر PP_k تكون بالضبط n من النقاط.

من البديهية٤ ومبرهنة٤ ، يوجد بالضبط n-1 من مستقيمات الموازية الى l من n من النقاط على الخط PP_k عدا P_k (حيث ان P_k تقع على l).

نفرض على انه يوجد موازي آخر الى l، ومن المبرهنتين ٤و٥ هذا المستقيم سيقطع PP_k في نقطةR التي تختلف عن نقاط تقاطعه مع PP_1 والمستقيمات الموازية له. ومن البديهية٤ ، يوجد موازي من R الى PP1. ومن المبرهنتين ٤و٥ سيقطع هذا الموازي المستقيم l في نقطة P_{n+1} التي تختلف عن النقاط $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ وهذا يناقض الفرض بان l يحتوي بالضبط على n من النقاط.



شكل (٣)

مبرهنة ٩

اذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط، فان اي مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط.

البرهان

ليكن l مستقيما يحتوي بالضبط على n من النقاط. وليكن m اي مستقيم آخر. يجب ان نبرهن ان m يحتوي بالضبط على n من النقاط. اما m يقطع l، او لايقطعه.

اذا لم يقطع l، فمن المبرهنة ٧،يحتوي m بالضبط على n من النقاط.

نفرض ان m يقطع l في نقطة، ولتكن P.

من المبرهنة ٨ ، يوجد بالضبط $n-1$ من المستقيمات الموازية الى l.

من المبرهنتين ٤و٥ ، m يقطع l والمستقيمات الموازية له في n من النقاط (من ضمنها P).

نفرض وجود نقطة اخرى على m.

من البديهية٤ ، يوجد موازي آخر الى l من هذه النقطة، ولكن هذا يخالف المبرهنة٨ لذلك، فان m يحتوي بالضبط على n من النقاط.

تمارين ١-١

١- في المستوى التآلفي، اذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط، برهن كلا مما يلي:

أ) اي نقطة يمر بها بالضبط $n+1$ من المستقيمات

ب) يوجد بالضبط n^2 من النقاط في النظام.

ج) يوجد بالضبط $n(n+1)$ من المستقيمات في النظام.

٢- في المستوي الاسقاطي، اذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط، برهن كلا مما يلي:

(أ) اي مستقيم في النظام يحتوي بالضبط على n من النقاط.

(ب) اي نقطة في النظام يمر بها بالضبط n من المستقيمات.

(ج) يوجد بالضبط n^2-n+1 من المستقيمات في النظام.

١-٧ نظاما يونك وفانو The Systems of Young and Fano

نظام يونك

اذا اضفنا البديهية التالية الى مجموعة بديهيات المستوى التالفي، سنحصل على نظام يونك.

البديهية:٥ اذا كان l مستقيما، فانه توجد على الاكثر ثلاث نقاط تقع على l.

ان بديهية ٢ مع هذه البديهية تجعل هذا النظام هندسة منتهية، حيث ان الخط فيه يحتوي على ثلاث نقاط فقط وفي هذه الحالة يكون عدد النقاط والمستقيمات في هذا النظام منتهيا، كما سنوضح في المبرهنات التالية التي ستترك براهينها كتمارين (لاحظ تمارين ١-١).

مبرهنة ١٠

يحتوي النظام على تسع نقاط فقط.

مبرهنة ١١

يحتوي النظام على اثني عشر مستقيم فقط.

مبرهنة ١٢

اية نقطة يمر بها اربعة مستقيمات فقط.

نظام فانو

اذا اضفنا البديهية ٥ الى المستوى الاسقاطي، سنحصل على نظام فانو. ان نظام فانو منته ايضا حيث ان المستقيم فيه يحتوي على ثلاث نقاط فقط وعدد النقاط والخطوط فيه منته ايضا، كما في المبرهنات التالية:

مبرهنة ١٣

يحتوي نظام فانو على سبع نقاط فقط.

مبرهنة ١٤

يحتوي نظام فانو على سبعة مستقيمات فقط.

مبرهنة ١٥

اي نقطة يمر بها بالضبط ثلاثة مستقيمات.

الفصل الثاني
خواص النظام البدهي

توجد ثلاثة مفاهيم مهمة ترافق عادة اي نظام بدهي: الاتساق؛ الاستقلالية، والتمامية سنأخذ الانظمة البدهية التي قدمت في الفصل الاول كأمثلة لدراسة هذه المفاهيم.

٢-١ الاتساق Consistency

قبل ان نقدم تعريف الاتساق، نذكر نص قانوني المنطق التاليين ليعتبران كاساس لدراستنا هذه.

قانون التناقض

لاتوجد عبارة يمكن ان تكون صائبة وخاطئة معاً.

قانون الوسط الاستثنائي

اية عبارة اما تكون صائبة او خاطئة.

ففي القانون الاول، اذا كانت P عبارة، فان قولنا "P و ~P" لايؤدي فقط الى عبارة خاطئة، ولكن قولنا هذا لامعنى له. لذلك، فاننا لانسمح ابدا لاية عبارتين لنظام بدهي ان تكونا بالشكل "P و ~P"!

تعريف ١

يكون النظام البدهي متسقا إذا وفقط اذا لاتوجد في النظام اي بديهيتين، او اي بديهية ومبرهنة، او اي مبرهنتين بالشكل"P و P~".

نستنتج من هذا التعريف ان الاتساق هو صفة اساسية لاي نظام بدهي، اي انه في اي نظام بدهي لايوجد تناقض بين اي بديهيتين، اي بديهية ومبرهنة، او اي مبرهنتين. ذلك من الواضح ان النظام الذي تكون فيه عبارة ما ونفيها صحيحا يكون نظاما لامعنى له.

والان كيف نختبر اتساق نظام ما؟ هل نتأكد من جميع المبرهنات؟ اذ من المحتمل وجود مبرهنات لم نتوصل اليها بعد، على كل حال، توجد طريقة اختبار اتخذت لهذا الغرض.

تعريف ٢

*تفسير نظام بدهي هو اعطاء معاني للكلمات الاولية التقنية بطريقة بحيث تصبح البديهيات اما صائبة او خاطئة.

تعريف ٣

يقال للتفسير الذي يجعل كل بديهية في مجموعة من بديهيات صائبة بانه نموذج(a model).

طريقة اختبار الاتساق

اذا وجد نموذج لمجموعة من بديهيات، فان

المجموعة تكون متسقة.

اذا وجد نموذج لمجموعة من بديهيات، فان جميع البديهيات في النظام تكون عبارات صحيحة. وبما ان المبرهنات تستنتج من البديهيات، فان المبرهنات تصبح عبارات صحيحة. ان فكرة النموذج هي مهمة جدا في المفهوم الذي يعطي معنى فيزياويا للكلمات الاولية وكذلك يبين على انه يوجد شيء ما من الحقيقة. طالما الغرض من النظام المنطقي هو لايجاد الحقيقة.

٢-٢ نماذج عن الاتساق

نقدم فيما يلي نماذج تبين ان المستوي التآلفي هو نظام متسق.

نموذج (١)

نفرض ان كلية التربية قد كرمت الثلاثة الاوائل في كل من المراحل: الثانية، الثالثة، والرابعة، وتقرر ايفادهم الى تسع دول لغرض الاطلاع. وقسمت اللجان الى مجموعات مكونة من ثلاثة اعضاء، بحيث ان طالبا واحدا من كل مرحلة في لجنة. وان كل لجنة من اللجان الثلاثة تقضي اسبوعا واحدا في دولة، ثم يعاد تشكيل اللجان وبطريقة انه لايشترك طالبان في لجنتين معا. ثم تقضي اللجان الجديدة اسبوعا واحدا في ثلاث دول اخرى (اي ان كل لجنة في دولة واحدة). وهكذا من اجل التوضيح، ان توزيع اللجان سيكون كما يلي:

طلبة المرحلة الثانية: A, B, C
طلبة المرحلة الثالثة: D, E, F
طلبة المرحلة الرابعة: G, H, I

مصر:	A, D, G
الاردن:	B, E, H
اليمن:	C, F, I
السودان:	A, E, I
الجزائر:	B, F, G
تونس:	C, D, H
المغرب:	A, F, H
ايطاليا:	B, D, I
فرنسا:	C, E, G

في هذا النموذج، نفسر "النقاط" على انها طلاب "والمستقيمات" باللجان، والعلاقة "ينتمي الى" بعضو في. يبين هذا التفسير انه نموذج لمجموعة بديهيات المستوى التآلفي، لان جميع البديهيات قد تحققت وبنفس الطريقة، تبين النماذج الثلاثة التالية ان المستوى التآلفي هو نظام متسق:

نموذج (٢)

(٩نقاط، ١٢مستقيم)

1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	6
2	3	5	7	3	5	7	4	5	5	7	8
4	6	8	9	9	6	8	8	7	9	6	9

في هذا النموذج "النقاط" هي اعداد "والمستقيمات" هي

اعمدة من اعداد.

نموذج (٣)

(١٦نقطة، ٢٠مستقيم)

1	5	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	9	10
2	6	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	11	12
3	7	9	10	11	12	10	11	12	9	11	15	9	13	14	9	13	10	14	13
4	8	13	14	15	16	16	13	14	15	12	16	10	14	15	12	16	11	16	15

نموذج (٤)

الهندسة الاقليدية الاعتيادية.

حيث ان الهندسة الاقليدية تعتبرنموذجايتحقق فيه كل بديهيات المستوى التالفي

نأخذ الآن نماذج اخرى تبين اتساق المستوى الاسقاطي.

نموذج (٥)

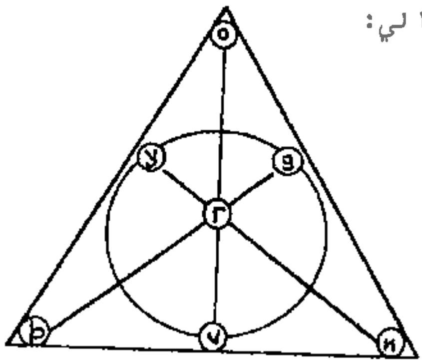
نفرض ان الهيئة التدريسية في قسم الرياضيات في كلية التربية تتكون من سبعة اعضاء. وان القسم قد قرر تأليف لجان لوضع مناهج في مواضيع معينة في الرياضيات. لقد اتفق على ان تتألف كل لجنة من ثلاثة اعضاء، بحيث لايشترك اثنان في لجنتين معا وبالشكل التالي:

اللجان	الاعضاء
الهندسة	A, B, C
التفاضل	B, D, F
التبولوجي	C, D, E
التحليل الرياضي	D, A, G
الجبر الخطي	E, A, F
المعادلات التفاضلية	F, G, C
اسس الرياضيات	G, E, B

في هذا النموذج نفسر "النقاط" بالاعضاء والمستقيمات باللجان المذكورة اعلاه. ان كل بديهية في المستوى الاسقاطي متحققة بهذا النموذج، وبنفس الطريقة بالنسبة للنماذج الثلاثة التالية:

نموذج (٦)

يقوم صاحب محل صياغة بصنع حلية مكونة من سبع خرزات مختلفة الالوان. وقد ربطها بسبعة اسلاك بحيث انه توجد ثلاث خرزات في كل سلك وثلاثة اسلاك في كل خرزة. الالوان: الاصفر، الاحمر، البرتقالي، الابيض، البنفسجي، السماوي، والاخضر. ان الحلية بدت كما في الشكل التالي:



شكل (٤)

في هذا النموذج نفسر "النقطة" على انها خرزة "والمستقيم" بسلك. وقد رتبت الاسلاك والخرزات كما يلي:

$w_1=\{b,y,o\}$, $w_2=\{w,g,o\}$ $w_3=\{w,y,r\}$, $w_4=\{b,g,r\}$,

$w_5=\{w,b,v\}$, $w_6=\{y,g,v\}$, $w_7=\{o,r,v\}$

نموذج (٧)

(٧ نقاط، ٧ مستقيمات)

1	1	1	2	2	3	3
2	4	6	4	5	4	5
3	5	7	7	6	6	7

نفسر "النقطة" بعدد والمستقيم بعمود.

نموذج (٨)

(١٣ نقطة، ١٣ مستقيم)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1	2	3
10	11	12	13	1	2	3	4	5	6	7	8	9

نفسر "النقطة" بعدد "والمستقيم" بعمود.

من الواضح ان النموذجين (١)و(٢) يبينان ان نظام يونك متسق، بينما النماذج ٥ ، ٦ و٧ تبين ان

نظام فانو متسق.

ليس من الضروري ان نأخذ جميع هذه النماذج لبيان ان نظاما ما متسق، كل مانحتاجه هو نموذج واحد على الاقل. على كل حال، سنجد استعمالات اخرى لبعض من هذه النماذج نذكرها فيما بعد.

يجب ان نلاحظ ان نموذجا عن المستوي التآلفي يمكن نحصل عليه من نموذج لمستوي اسقاطي وذلك بحذف مستقيم واحد . وبالعكس، يمكن ان نحصل على نموذج لمستوى اسقاطي من نموذج لمستوى تآلفي وذلك باضافة مستقيم واحد. (تأكد من ذلك).

٢-٣ الاستقلال Independence

بعد اختيارنا لمجموعة من بديهيات واختبارنا اتساقها، يتبادر الى الاذهان فيما اذا كانت احدى البديهيات مشتقة من البديهيات الاخرى في المجموعة، او بتعبير آخر، كيف نعرف ان بديهية ما هي ليست مبرهنة؟ فالاستقلالية تعني انه لاتوجد بديهية في النظام يمكن برهنتها من بقية البديهيات في النظام. اما اذا امكن استنتاج بديهية ما من بقية البديهيات، ففي هذه الحالة يمكن اعتبارها كمبرهنة، لكي نختبر استقلال بديهية ما في مجموعة من بديهيات، نأخذ التعريف التالي:

تعريف ٤

يقال عن عبارة انها مستقلة في مجموعة من عبارات اذا لم نتمكن من اشتقاقها من بقية العبارات في المجموعة. كما في حالة الاتساق، توجد طريقة

لاختبار الاستقلال.

طريقة الاختبار

اذا كانت مجموعة بديهيات متسقة وعندما العبارة المراد اختبارها تبدل بنفيها، فيوجد نموذج للمجموعة الجديدة، فان العبارة المراد اختبارها تكون مستقلة.

ذلك يعني، اذا كان

١) مجموعة البديهيات $A_1,\ldots,A_i,\ldots,A_n$ مجموعة متسقة.

٢) المجموعة $A_1,\ldots,\sim A_i,\ldots,A_n$ مجموعة متسقة، فان A_i تكون مستقلة

حيث اذا كانت المجموعة $A_1,\ldots,A_i,\ldots,A_n$ متسقةو A_i مبرهنة، فانه يمكن استنتاجها من البديهيات الاخرى، وفي هذه الحالة نقيض A_i سوية مع البديهيات الاخرى لايمكن ان تكون المجموعة متسقة، اي انه لايوجد نموذج لمثل هذه المجموعة من العبارات.

والان نبين ان كل بديهية في المستوى التآلفي مستقلة.

استقلال البديهية ١

ليكن $l=\{1,2,3\}$ ، $m=\{4,5,6\}$

ان هذا التفسير يتكون من مجموعتين كمستقيمين وستة عناصر كنقاط. بالتأكيد هذا التفسير يحقق نفي بديهية١ ، لان النقطتين 1 و 4 على سبيل المثال، لايوجد مستقيم يحتويهما. الاختبار الدقيق يبين ان البديهيات الباقية متحققة، وبما ان المستوي التآلفي متسق، اي ان الشرطين (١)و(٢) يتحققان، في هذه

الحالة يتبين ان البديهية١ مستقلة.
اما النموذج التالي (٦ نقاط، ١٠ مستقيمات) يحقق ايضا نفي بديهية١ ، حيث يوجد مستقيمان، كمثال {1,2,3}, {1,3,4} يحتويان 1 و 3

1	2	1	2	2	1	3	1	1	4
3	5	5	3	3	4	5	2	2	5
4	6	6	4	5	6	6	4	3	6

وبنفس الطريقة نبين ان جميع البديهيات الباقية مستقلة

استقلال البديهية ٢

(٤ نقاط، ٦ مستقيمات)

1	3	1	2	1	2
2	4	3	4	4	3

استقلال البديهية ٣

(٤ نقاط، مستقيم واحد)

l={1,2,3,4}

استقلال البديهية ٤

نأخذ اي نموذج لاتساق المستوي الاسقاطي، اي النماذج ٥ ، ٦ ، ٧ او ٨ التي ذكرت في موضوع الاتساق.
ففي تلك النماذج، اي مستقيمين يتقاطعان، لذلك

لاتوجد خطوط متوازية، اما في النموذج التالي، فانه توجد مستقيمات يوازيها اكثر من مستقيم واحد من نقاط خارجة عنها

النموذج

(١٩ نقطة، ٢٩ مستقيم)

1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3
2	5	6	7	8	12	5	6	7	8	11	5	6	7	8
3	9	16	14	10	15	16	10	12	9	13	12	9	11	17
4	13	11	19	18	17	18	14		15	19	14	19	15	13
							17						18	

3	4	4	4	4	4	5	5	6	7	8	9	13	17
10	5	6	7	8	9	6	10	12	9	11	10	14	18
16	11	15	10	12	14	7	15	18	16	14	11	15	19
	17		13	16	18	8	19	18	17		12	16	
				19									

وبالنتيجة، لابد ان نشير هنا الى ان الاستقلالية هي غير اساسية، حيث اذا وجدت احدى البديهيات غير مستقلة، اي انها مبرهنة، فبدلا من ان توضع في مجموعة البديهيات، توضع في مجموعة المبرهنات. اما بالنسبة الى استقلال بديهيات المستوي الاسقاطي فتترك كتمرين.

تمارين ٢-٣

١ـ مما يلي اختار نماذج مبينا استقلال كل بديهية في المستوى الاسقاطي

التفسيرات:

أ)

1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	7
2	4	5	6	4	5	6	4	5	6	5	8
3	9	7	8	7	8	9	8	9	7	6	9

ب) $l=\{1,2,3\}, m=\{1,4,5,6\}$

ج)

1	1	1	2
	2	3	3

د)

1	1	2
2	2	3
3	4	4

هـ) $l=\{1,2,3,4\}$

و)

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
4	5	6	7	1	2	3

ز) نقطة واحدة، لايوجد مستقيم

ح) $l=\{1,2,3\}, m=\{1,4,5\}$

ط) $l=\{1,2,3\}, m=\{4,5,6\}$

ي) $l=\{1,2\}, m=\{1,3\}, n=\{2,3\}$

ث)

1	4	1	2	1	2	1	2
2	5	3	5	3	4	3	5
3	6	4	6	5	6	6	4

ل) $l=\{1,2,3\}, m=\{1,2,4\}, k=\{2,3,4\}$ و $n = \{1, 3, 4\}$

٢- لاحظ النظام البدهي التالي:

مجموعة البديهيات

١- اي مستقيمين مختلفين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.

٢- كل نقطة يمر بها مستقيمان فقط.

٣- توجد بالضبط أربعة مستقيمات في هذا النظام.

أ) بين ان النظام متسق.

ب) حاول ايجاد نماذج لاستقلال كل بديهية في هذا النظام.

جـ) برهن على ان كل مستقيم في هذا النظام يحتوي على ثلاث نقاط فقط.

٢-٤ التمام Completeneess

اية عبارة تتعلق بالكلمات الاولية في نظام معين

وان لم تكن بديهية فاما هي او نفيها تكون مبرهنة في النظام. فلو كان بالامكان اثبات صدقها، فانها مبرهنة، واذا ثبت خطئها، فان نفيها يكون مبرهنة.

اما اذا وجدت عبارة ليس بالامكان اثباتها او دحضها بواسطة البديهيات وذلك لعدم كفاية البديهيات، ففي هذه الحالة يمكن اضافة عدد آخر اليها لتكون كافية لاثبات العبارة او نفيها.

تعريف ٥

يكون النظام البدهي غير تام اذا امكن اضافة بديهية مستقلة. اما اذا لم نتمكن من اضافة مثل هذه البديهية، فان النظام يكون تاما.

تكون البديهيات في النظام التام كافية لاثبات او دحض اية عبارة. ولكن هل من الممكن معرفة متى يكون النظام تاما؟ قبل ان نأخذ طريقة الاختبار، علينا ان نقدم مفاهيم جديدة ومهمة في الرياضيات.

ليكن M_1, M_2 نموذجين لنظام معين يحتويان على عدد متساو من العناصر. ان كل عنصر في M_1 يقابل عنصرا معينا في M_2 وبالعكس، في هذه الحالة، يقال انه يوجد تناظر متباين (تقابل-احادي) بين M_1, M_2.

يقال عن هذا التقابل الاحادي بين عناصر M_1, M_2 انه يحفظ العلاقات (preserve relations) اذا كانت كل عبارة صحيحة حول عناصر M_1 هي ايضا صحيحة حول العناصر المقابلة لها في M_2.

تعريف ٦

يقال عن نموذجين لنظام بدهي انهما متشاكلين تقابليا (isomorphic) بالنسبة الى ذلك النظام اذا

وجد على الاقل تقابل آحادي واحد بين عناصر النظام بحيث يحفظ العلاقات.

تعريف ٧

عندما يكون اي نموذجين في النظام البدهي متشاكلين تقابليا، فان النظام يقال انه فصيلي (Categorical).

طريقة الاختبار

اذا كان النظام فصيليا، فانه يكون تاما. اي انه بتعبير آخر، عندما يكون اي نموذجين في النظام متشاكلين تقابليا، فان النظام يكون تاما.

البرهان

نفرض ان نظاما بدهيا يكون فصيلي، لكنه غير تام. اذا لم يكن تاما، فانه يمكن اضافة بديهية مستقلة ولتكن A_n الى مجموعة من بديهيات النظام $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ بما ان A_n بديهية مستقلة، فان:

١) المجموعة $A_1, A_2, \dots, A_n$ تكون متسقة

٢) المجموعة $A_1, A_2, \dots, \sim A_n$ تكون متسقة لذلك، فانه يوجد نموذجان للمجموعتين ١)و٢).

بما ان النظام فصيلي، فان هذين النموذجين يكونان متشاكلين تقابليا، لذلك، فالعبارات المتناظرة في النموذجين اما كل منهما صائبة او كل منهما خاطئة. وهذا غير ممكن، حيث انه من الفرض "A_n" تكون صائبة في نموذج وتكون "$\sim A_n$" صائبة في النموذج

الاخر. لذلك يؤدي هذا الفرض الى خطأ، وبهذا، اذا كان النظام فصيليا، فانه يكون تاما.

ان النموذجين (٧) و (٨) في المستوى الاسقاطي غير متشاكلين تقابليا لانهما لايحتويان على نفس العدد من العناصر، فيكون المستوى الاسقاطي غير تاما. وكذلك فالمستوى التآلفي يكون غير تاما لان النموذجين (١) و (٣) لايحتويان على نفس العدد من العناصر، اي انهما غير متشاكلين تقابليا. بينما نظام يونك يكون تاما لانه يتحقق فقط بالنموذج المكون من ٩ نقاط و١٢ خط. كذلك نظام فانو يكون تاما لانه يتحقق فقط بالنموذج المكون من ٧ نقاط و٧ خطوط. حيث ان اي نموذجين في نظام يونك او نظام فانو يحتويان على نفس العناصر، حيث يرمز برموز مختلفة لنفس العناصر.

وبالنتيجة، لابد ان نشير هنا الى ان التمامية هي خاصية ليست اساسية وبصورة عامة غير مفضلة.

في الفصل الحادي العشر، سندرس الهندسة الاسقاطية مع البديهيات الاربعة، وسنضيف بديهيات اكثر لكي تكون مجموعة البديهيات تامة.

امثلة

نأخذ النموذجين (١) و (٢) في المستوي التآلفي

نموذج (١)

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
A	D	G	A	B	C	A	B	C	A	B	C
B	E	H	D	E	F	E	F	D	F	D	E
C	F	I	G	H	I	I	G	H	H	I	G

نموذج (٢)

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	6
2	3	5	7	3	5	7	4	5	5	7	8
4	6	8	9	9	6	8	8	7	9	6	9

هناك مئات من الطرق لوضع تقابل احادي بين النموذجين، نأخذ التقابل التالي:

$$A \Leftrightarrow 1$$
$$B \Leftrightarrow 2$$
$$C \Leftrightarrow 3$$
$$D \Leftrightarrow 4$$
$$E \Leftrightarrow 5$$
$$F \Leftrightarrow 7$$
$$G \Leftrightarrow 8$$
$$H \Leftrightarrow 6$$
$$I \Leftrightarrow 9$$

من اجل ايجاد تقابل احادي بين المستقيمات، يجب ان يكون التقابل بطريقة بحيث يحفظ العلاقات، فمثلا، بما ان A, B, C تقع على المستقيم a، يجب ان نتأكد من وجود مستقيم في النموذج (٢) يحتوي على العناصر المقابلة لهذه النقاط، اي انه، يوجد مستقيم يحتوي على النقاط 1, 2, 3, لكنه لايوجد مثل هذا المستقيم في النموذج (٢)، لذلك، لايكون هذا التقابل يحفظ العلاقات.

والان لو أخذنا التقابل التالي:

$A \Leftrightarrow 1$
$B \Leftrightarrow 2$
$C \Leftrightarrow 4$
$D \Leftrightarrow 5$
$E \Leftrightarrow 3$
$F \Leftrightarrow 7$
$G \Leftrightarrow 8$
$H \Leftrightarrow 9$
$I \Leftrightarrow 6$

وكذلك يوجد تقابل بين المستقيمات بحيث يحفظ العلاقات. فمثلا بما ان A, B, C تقع على المستقيم a، فيجب ان يكون هناك مستقيم يناظره a يحتوي على النقاط 1, 2, 4, وهكذا يوجد تناظر بالنسبة لبقية المستقيمات كما نبينها الان:

$a \Leftrightarrow a^*$	$g \Leftrightarrow b^*$
$b \Leftrightarrow i^*$	$h \Leftrightarrow g^*$
$c \Leftrightarrow l^*$	$i \Leftrightarrow j^*$
$d \Leftrightarrow c^*$	$j \Leftrightarrow d^*$
$e \Leftrightarrow e^*$	$k \Leftrightarrow f^*$
$f \Leftrightarrow k^*$	$l \Leftrightarrow h^*$

ان النموذجين يكونان في هذه الحالة متشاكلين.
لذلك لبيان ان نموذجين متشاكلان. فاننا نحتاج الى تقابل واحد بحيث يحفظ العلاقات.

تمارين ٢-٤

١- نفرض ان مايلي هو نموذج للمستوى التآلفي. جد

تقابل احادي يحفظ العلاقات بينه وبين النموذج(٢).

1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	5
2	4	6	8	4	5	7	4	5	6	7	6
3	5	7	9	6	8	9	9	7	8	8	9

٢- جد تقابل احادي يحفظ العلاقات بين:

أ) النموذج (٥) والنموذج (٦) في المستوي الاسقاطي.

ب) النموذج (١) للمستوي التآلفي مع نفسه.

جـ) النموذج (٧) للمستوي الاسقاطي مع نفسه.

٣- هل تستطيع ايجاد تقابل احادي لايحفظ العلاقات بين:

أ) النموذج(٥) والنموذج(٦) للمستوي الاسقاطي.

ب) النموذج(١) والنموذج(٢) للمستوي التالفي.

الفصل الرابع
اسس الهندسة

قدم عالم الرياضيات الالماني دافيد هلبرت (١٨٦٢ ـ ١٩٤٣) نظاما بدهيا متكاملا الذي منه نستنتج الهندسة الاقليدية. لقد صحح الاخطاء والعيوب التي رافقت اعمال اقليدس. توجد طرق بديهية اخرى تؤدي الى هذه الهندسة، لكننا سنأخذ نظام هلبرت لاسلوبه البسيط والواضح.

نبتدأ نظامنا هذا بكلمات اولية تقنية تدعى نقاط التي يرمز لها بالرموز .... ,A, B, C ومستقيمات يرمز لها بالرموز ... ,l, m, n

٤-١ بديهيات الوقوع والوجود

بديهية ١

لكل نقطتين مختلفتين معلومتين، يوجد مستقيم واحد فقط يحتويهما.

بديهية ٢

كل مستقيم يحتوي على نقطتين في الاقل.

بديهية ٣

لكل مستقيم معلوم، توجد في الاقل نقطة واحدة

لاتنتمي اليه.

بديهية ٤

يوجد في الاقل مستقيم واحد.

يتبين لنا من البديهيات اعلاه ان المستقيم هو مجموعة من نقاط. غير ان هذا لايعتبر تعريف للمستقيم لان اي شكل في الهندسة هو مجموعة من نقاط، لكن هذا يوضح العلاقة بين النقطة والمستقيم ويساعدنا بتوضيح ماذا نعني بالمستقيمات المتساوية او المختلفة، حيث تساعد دراستنا للمجموعات بتوضيح هذه المفاهيم. للنقاط، الكلمة مختلفة تؤخذ ككلمة اولية منطقية كبقية الكلمات المنطقية.

تعريف ١

تكون المجموعتان متساويتين اذا وفقط اذا احتوتا بالضبط على نفس العناصر.

مبرهنة ١

توجد في الاقل ثلاث نقاط في النظام.

البرهان

يستنتج مباشرة من البديهيات ٤، ٣، ٢.

مبرهنة ٢

اي مستقيمين مختلفين يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر.

البرهان

يترك كتمرين

يمكن ان يعبر عن البديهية ١ بقولنا ان الخط يتعين بنقطتين. والخط الذي يتعين بالنقطتين A و B، يرمزله بالرمز AB او BA.

وفي بعض الاحيان يرمز للخطوط بالحروف الصغيرة k, l, m, ...

٤-١ تمارين

١- برهن على ان لكل نقطة يوجد في الاقل مستقيمان يمران بها.

٢- برهن على انه يوجد في الاقل مستقيم واحد لايمر من نقطة معلومة.

٣- اذا كانت C نقطة على AB، وتختلف عن A و B، فان $CA = BC = AB$

٤- اذا كان $AB = AC$ و $B \neq C$ فان $AB = BC$.

٤-٢ بديهيات الترتيب axioms of order

ان بديهيات الوقوع والوجود ليست كافية لاشتقاق بعض المبرهنات المعروفة في الهندسة الاقليدية وليست كافية لوجود اكثر من نقطتين على خط ولاوجود

عدد غير منته من النقاط على الخط، ولاتضمن وجود عدد غير منته من النقاط بين اي نقطتين، ولايمكن ان نتكلم عن نقطة بين نقطتين، ولايمكن ان نتكلم عن قطعة مستقيم او المقارنة بين القطع فايهما الاكبر او الاصغر. كل هذا يأتي من العلاقة "بين". فقد اهمل اقليدس هذه العلاقة في بديهياته، لكنه استنتجها من الرسم. لكن هذا لايعني اننا لانستخدم الرسم، غير انه لايكون جزءا من البرهان.

قاعدة لغوية

"بين" هي كلمة اولية تقنية. ويرمز للعبارة: "B تقع بين A و C" بالرمز : A-B-C

مجموعة البديهيات

بديهية ٥

A-B-C اذا وفقط اذا C-B-A

بديهية ٦

اذا كان A-B-C، فان النقاط A,B,C مختلفة وتقع على مستقيم واحد.

بديهية ٧

اذا كانت A, B, C اي ثلاث نقاط مختلفة وتقع على مستقيم واحد، فان واحدة فقط مما يلي تتحقق:

C-A-B، B-C-A، A-B-C

رمز

الرمز A-B-C-D هو مختصر الى: A-B-C، A-B-D و A-C-D، و B-C-D

وبنفس الطريقة بالنسبة لاكثر من اربع نقاط.

بديهية ٨

اذا كانت A, B, C, D اربع نقاط مختلفة وعلى مستقيم واحد وان A-B-C فان واحدة فقط مما يلي تتحقق:

D-A-B-C، A-D-B-C، A-B-D-C، A-B-C-D

بديهية ٩

اذا كانت A و B اي نقطتين، فان:

(أ) توجد نقطة C بحيث ان A-B-C

(ب) توجد نقطة D بحيث ان A-D-B

(جـ) توجد نقطة E بحيث ان E-A-B

مبرهنة ٣

(أ) اذا كان A-B-C و A-C-D، فان النقاط A, B, C, D مختلفة وعلى مستقيم واحد.

(ب) اذا كان A-B-D وB-C-D، فان النقاط A,B,C,D مختلفة وعلى مستقيم واحد.

(جـ) اذا كان A-B-C وB-C-D، فان النقاط A, B, C, D مختلفة وعلى مستقيم واحد.

البرهان

سنبرهن فرع (أ) ونترك الباقي كتمرين.

فرع (أ)

من بديهية ٦، بما ان A-B-C، فان النقاط A, B, C مختلفة وعلى مستقيم واحد. وكذلك بما ان A-C-D، فان النقاط A, C, D مختلفة وعلى مستقيم واحد.
اذا كان B = D، فانه بتعويض ذلك في A-C-D، يؤدي الى ان A-C-B، ولكن من الفرض A-B-C، وهذا يناقض بديهية ٧. لذلك، فان النقاط A, B, C, D تكون مختلفة. من البديهية ١، يوجد مستقيم واحد فقط يتعين من A و C. بما ان B و D تقعان على المستقيم AC، فان A, B, C, D تقع على مستقيم واحد.

نلاحظ ان A-B-C-D يؤدي الى A-B-C و A-C-D. هل ان العكس صحيح؟ اي هل ان B بين A و D او C بين B و D؟ بالطبع هذا مانريده وسنبرهنه في المبرهنة التالية:

مبرهنة ٤

(أ) اذا كان A-B-C و A-C-D، فان A-B-C-D.
(ب) اذا كان A-B-D و B-C-D، فان A-B-C-D.
(ج) اذا كان A-B-C و B-C-D، فان A-B-C-D.

البرهان

سنبرهن فرع (أ) ونترك الباقي كتمرين.

فرع (أ)

من مبرهنة ٣، A-B-C و A-C-D ← A, B, C, D مختلفة وعلى استقامة واحدة. وبما ان A-B-C، فانه من بديهية ٨، تتحقق واحدة فقط مما يلي:

D-A-B-C، A-D-B-C، A-B-D-C، A-B-C-D.

بما ان A-C-D، فانه من بديهية ٧، لاتتحقق كل من A-D-C وكذلك D-A-C. ومن هذا نستنتج انه لاتتحقق كل من A-B-D-C، A-D-B-C، D-A-B-C.

لذلك، فانه تتحقق فقط A-B-C-D.

مبرهنة ٥

(أ) اذا كان A-B-D و A-C-D، و $B \neq C$ ، فان A-B-C او A-C-B

(ب) اذا كان A-B-C وA-B-D، و $C \neq D$ ، فان B-C-D او B-D-C

(جـ) اذا كان A-B-C وA-B-D ، و $C \neq D$ ، فان A-C-D او A-D-C

البرهان

يترك كتمرين.

تعريف ٢ تعريف التجزئة (تجزئة المجموعة)

اذا كانت المجموعة S هي اتحاد مجموعتين (او اكثر) جزئيتين غير خاليتين A_1, A_2 بحيث أن كل عنصر في S هو عنصر في واحدة وواحدة فقط من المجموعات الجزئية، فانه يقال ان A_1, A_2 تكونان تجزئة للمجموعة S. كمثال المجموعتان {1,2} {3,4,5}، تكونان تجزئة للمجموعة {1,2,3,4,5}.

تعريف ٣ تعريف جهتي النقطة O او نصفا المستقيم

لتكن O اية نقطة على مستقيم m، و A نقطة اخرى على m. لتكن S_1 مجموعة كل النقاط على m من ضمنها A وكل النقاط X بحيث ان O-X-A او O-A-X.

لتكن S_2 مجموعة كل النقاط X بحيث ان X-O-A. فان S_1, S_2 تدعيان جهتي O على m. وتدعيان ايضا نصفي المستقيم m بالنسبة الى O. اي ان

$$S_1 = \{X \in m : O\text{-}X\text{-}A \vee O\text{-}A\text{-}X \vee X = A\}$$

$$S_2 = \{X \in m : X\text{-}O\text{-}A\}$$

مبرهنة ٦

جهتا النقطة O على المستقيم m لاتحتويان على O

البرهان

نفرض ان $O \in S_1$، وبما ان $A \neq O$ فان $A-O-O$ او $O-A-O$ وهذا يخالف بديهية ٦، وكذلك، اذا كان $O \in S_2$، فان $A-O-O$. لذا فان O لاتنتمي الى جهتي O.

تعريف ٤ تعريف الفصل

لتكن S_1, S_2 مجموعتين مختلفتين غير خاليتين ومنفصلتين وكلا منهما منفصلة عن مجموعة S. ويتحقق الشرطان التاليان:

(أ) لاي عنصر A في S_1 و B في S_2، توجد نقطة في S بين A و B،

(ب) لاي عنصرين A و B من نفس المجموعة، لاتوجد نقطة في S بينهما،

فانه يقال بان S تفصل (Separates) S_1 و S_2.

مبرهنة ٧ المعلم

اية نقطة O على مستقيم m تفصل m الى جهتين بالنسبة الى O وتكونان مع O تجزئة للمستقيم m.

البرهان

(١) التجزئة

لتكن S_1 و S_2 جهتي O على m المتعينيتين من النقطتين O و A. يجب ان نبرهن ان S_1 و S_2 مع $\{O\}$ تكون تجزئة للمستقيم m.

بما ان $A \in S_1$، فان $S_1 \neq \phi$

بما ان $A \neq O$ فانه من بديهية ٩، توجد نقطة C بحيث $C-O-A$ ، ومن تعريف ٣، $C \in S_2$ ، لذلك $S_2 \neq \phi$

. يجب ان نبرهن لكل $X \in m$ ، فانه تتحقق واحدة فقط مما يلي: $X \in S_1$ ، $X \in S_2$ ، $X \in \{O\}$

$X \in m \longleftarrow$ اما $X = O$ او $X \neq O$

١- نفرض ان $X = O$ ، فان $X \in \{O\}$

من مبرهنة ٦، $O \notin S_1$ و $O \notin S_2$ ، اي ان $X \notin S_1$ و $X \notin S_2$.

٢- نفرض ان $X \neq O$ ، اي ان $X \notin \{O\}$ ، وبما ان $A \in m \longleftarrow$ اما $X = A$ او $X \neq A$

(أ) نفرض ان $X = A$ ، ومن تعريف ٣ وبديهية ٦، $X \in S_1$ و $X \notin S_2$

(ب) نفرض ان $X \neq A$ وبما ان $O \neq A$ و $X \neq O$ ، فان النقاط O, X, A مختلفة وعلى مستقيم واحد.

ومن بديهية ٧، تتحقق واحدة فقط مما يلي:
$O-A-X$ ، $O-X-A$ ، $X-O-A$
وهذا يؤدي الى ان $X \in S_1$ او $X \in S_2$
ومن تعريف التجزئة، تكون المجموعات S_1 ، S_2 ، و $\{O\}$ تجزئة للمستقيم m.

(٢) الفصل

يجب ان نبرهن ان $\{O\}$ تفصل S_1 و S_2

(أ) يجب ان نبرهن لكل $X_1 \in S_1$ و $X_2 \in S_2$ ، فان X_1-O-X_2

$X_1 \in S_1 \longleftarrow O-X_1-A$ او $O-A-X_1$ او $X_1 = A$

$X_2 \in S_2 \longleftarrow X_2-O-A$

توجد ثلاثة احتمالات

(١) اذا كان $O-A-X_1$ و X_2-O-A ،
فانه نستنتج من بديهية ٥، X_1-A-O و $A-O-X_2$
ومن مبرهنة ٤ (جـ): يكون $X_1-A-O-X_2$
ومنه نستنتج ان X_1-O-X_2

(٢) اذا كان $O-X_1-A$ و X_2-O-A
فانه من بديهية ٥ $\longrightarrow$ $A-X_1-O$ و $A-O-X_2$
ومن مبرهنة ٤ $\longrightarrow$ $A-X_1-O-X_2$
$\longrightarrow$ X_1-O-X_2

(٣) اذا كان $X_1 = A$
وبما ان X_2-O-A
فان X_2-O-X_1

(ب) اولا: لتكن $X_1, \ Y_1$ اي نقطتين مختلفتين في S_1 ،
فانه كما في تعريف ٤ (ب)، يجب ان نبين على انه من الخطأ يكون X_1-O-Y_1. توجد عدة حالات تؤخذ بنظر الاعتبار، حيث ان:
$X_1 \in S_1$ ـــــ $O-X_1-A$ ، $O-A-X_1$ ، او $X_1 = A$
$Y_1 \in S1$ ـــــ $O-Y_1-A$ ، $O-A-Y_1$ ، او $Y_1 = A$
(١) اذا كان $O-X_1-A$ و $O-Y_1-A$
وبما ان $X_1 \neq Y_1$
فان من مبرهنة ٥ يكون $O-X_1-Y_1$ او $O-Y_1-X_1$
ومن بديهية ٧، لايتحقق X_1-O-Y_1

(٢) اذا كان $O-A-X_1$ و $O-A-Y_1$
وبما ان $X_1 \neq Y_1$
فان من مبرهنة ٥،يكون $O-Y_1-X_1$ او $O-X_1-Y_1$

ومن بديهية ٧، لايتحقق X_1-O-Y_1.

(٣) اذا كان $O-X_1-A$ و $O-A-Y_1$،
فان من مبرهنة ٤
يكون $O-X_1-A-Y_1 \longrightarrow O-X_1-Y_1$
ومن بديهية ٧، لاتتحقق X_1-O-Y_1.

(٤) اذا كان $X_1 = A$
بما ان $O-Y_1-A$ او $O-A-Y_1$
فانه $O-Y_1-X_1$ او $O-X_1-Y_1$
ومن بديهية ٧، لايتحقق X_1-O-Y_1.
وبنفس الطريقة:
اذا كان $Y_1 = A$ و $O-X_1-A$ او $O-A-X_1$

(٥) اذا كان $O-A-X_1$ و $O-Y_1-A$
تبرهن بنفس طريقة الحالة (٣).

ثانيا: يجب ان نبرهن اذا كانت X_2 , Y_2 نقطتين مختلفتين في S_2 فانه من الخطأ ان يكون X_2-O-Y_2 .
$X_2 \in S_2 \longrightarrow X_2-O-A$ ،
ومن بديهية ٥ $\longrightarrow A-O-X_2$
$Y_2 \in S_2 \longrightarrow Y_2-O-A$
ومن بديهية ٥ $\longrightarrow A-O-Y_2$
وبما ان $X_2 \neq Y_2$
فان من مبرهنة ٥
يكون $O-X_2-Y_2$ او $O-Y_2-X_2$
ومن بديهية ٧، لايتحقق X_2-O-Y_2

قاعدة لغوية

يقال عن المجموعتين S_1, S_2 في تعريف ٣ انهما تتعينان من O و A.
تبين المبرهنة التالية وحدانية جهتي النقطة O على المستقيم m (عدم اعتمادها على A).

مبرهنة ٨

لتكن O, A, A' ثلاث نقاط مختلفة على مستقيم m. جهتا النقطة O على المستقيم m المتعينتين من O و A هما نفس الجهتين المتعينتين من O و 'A.

البرهان

لتكن S_1 و S_2 جهتي النقطة O على المستقيم m المتعينتين من O و A

$$S_1 = \{ X \in m : O\text{-}X\text{-}A \vee O\text{-}A\text{-}X \vee X = A\}$$
$$S_2 = \{ X \in m : X\text{-}O\text{-}A\}$$

لتكن S'_1 و S'_2 جهتي النقطة O على m المتعينتين من O و 'A

$$S'_1 = \{ X \in m : O\text{-}X\text{-}A' \vee O\text{-}A'\text{-}X \vee X = A' \}$$
$$S'_2 = \{ X \in m : X\text{-}O\text{-}A'\}$$

النقاط O, A, A' مختلفة وتقع على المستقيم m فانه من بديهية ٧، تتحقق واحدة فقط مما يلي:
$O\text{-}A\text{-}A'$ ، $O\text{-}A'\text{-}A$ ، $A'\text{-}O\text{-}A$

الحالة (١)

نفرض ان $O-A-A'$. يجب ان نبرهن ان $S_1 = S'_1$ و $S_2 = S'_2$

(أ) لكي نبرهن ان $S_1 = S'_1$ يجب ان نبين ان $S_1 \le S'_1$ و $S'_1 \le S_1$

(١) لاجل ان نبرهن $S_1 \le S'_1$

يجب ان نبين اذا كان $X \in S_1$، فان $X \in S'_1$

$X \in S_1 \longrightarrow O-X-A,\ O-A-X$، او $X=A$

نفرض $O-X-A$

وبما ان $O-A-A'$

فانه من مبرهنة٤،يكون

$O-X-A-A' \longrightarrow O-X-A' \longrightarrow X \in S'_1$

نفرض $O-A-X$

وبما ان $O-A-A'$ واذا كان $X \neq A'$

فان من مبرهنة ٥ $\longrightarrow O-X-A'$ او $O-A'-X$

$\longrightarrow X \in S'_1$

اما اذا كان $X = A'$

فان $X \in S'_1$

عندما $X = A$

وبما ان $O-A-A' \longrightarrow O-X-A' \longrightarrow X \in S'_1$

يتبين مما تقدم ان $S_1 \le S'_1$

(٢) برهان $S'_1 \le S_1$ نتبع نفس طريقة (١) من فرع (أ)

(ب) لكي نبرهن ان $S_2 = S'_2$ يجب ان نبين ان $S_2 \le S'_2$ و $S'_2 \le S_2$

(١) يجب ان نبرهن $S_2 \le S'_2$

اي ان، لكل $X \in S_2$

فان $X \in S'_2$

$X \in S_2 \longrightarrow X-O-A$

وبما ان $O-A-A'$

ومن مبرهنة٤ $\longrightarrow X-O-A-A'$

$\longrightarrow X-O-A' \longrightarrow X \in S'_2$

(٢) بنفس طريقة (١) من فرع (ب)

نبرهن ان $S_2 \subseteq S'_2$

يتبين مما تقدم ان $S_1 = S'_1$ و $S_2 = S'_2$

وبنفس طريقة الحالة (١) نبرهن

$S_1 = S'_1$ و $S_2 = S'_2$

اذا كان $O-A'-A$ و $S_1 = S'_2$ و $S_2 = S'_1$ اذا كان $A'-O-A$.

مبرهنة ٩

لتكن O, O' نقطتين مختلفتين على مستقيم m. جهتا النقطة O على المستقيم m تختلفان عن جهتي النقطة O' على m.

البرهان

لتكن S_1, S_2 جهتي النقطة O على m المتعينتين من النقطتين O و A.

$$S_1 = \{ X \in m : O-A-X \lor O-X-A \lor X = A\}$$

$$S_2 = \{ X \in m : X-O-A\}$$

لتكن S'_1, S'_2 جهتي O' على المستقيم m المتعينتين من O' و A

$$S'_1 = \{ X \in m : O'-A-X \lor O'-X-A \lor X = A\}$$

$$S'_2 = \{ X \in m : X-O'-A\}$$

يجب ان نبرهن ان $S_1 \neq S_1'$ ، $S_1 \neq S_2'$ ،
$S_2 \neq S_1'$ و $S_2 \neq S_2'$
من بديهية ٧، تتحقق واحدة فقط مما يلي:
$O-O'-A$ ، $O-A-O'$ ، $A-O-O'$

الحالة (١)

عندما $O-O'-A$ $\longleftarrow$ $O' \in S_1$ و $O \in S_2'$
نفرض ان $S_1 = S_1'$
وبما ان $O' \in S_1$ $\longleftarrow$ $O' \in S_1'$ وهذا يناقض مبرهنة ٦.
لذا فان $S_1 \neq S_1'$.
نفرض ان $S_1 = S_2'$ وبما ان $O \in S_2'$ $\longleftarrow$ $O \in S_1$
وهذا يناقض مبرهنة ٦.
لذا فان $S_1 \neq S_2'$.
نفرض ان $S_2 = S_1'$
وبما ان $A \in S_1'$ $\longleftarrow$ $A \in S_2$ $\longleftarrow$ $A-O'-A$ ، وهذا يناقض بديهية ٦.
لذا فان $S_2 \neq S_1'$.
نفرض ان $S_2 = S_2'$ ، وبما ان $O \in S_2'$ $\longleftarrow$ $O \in S_2$
وهذا يناقض مبرهنة ٦.
لذلك $S_2 \neq S_2'$.

الحالة (٢)

عندما $O-A-O'$ $\longleftarrow$ $O \in S_1'$ و $O' \in S_1$
نفرض $S_1 = S_1'$
وبما ان $O \in S_1'$ $\longleftarrow$ $O \in S_1$
وهذا يناقض مبرهنة ٦.
لذلك، فان $S_1 \neq S_1'$

نفرض $S_1 = S_2$

وبما ان $O' \in S_1 \longrightarrow O' \in S_2'$

وهذا يخالف مبرهنة ٦.

لذلك $S_1 \neq S_2'$

نفرض ان $S_2 = S_1'$

وبما ان $O \in S_1' \longrightarrow O \in S_2$

وهذا يخالف مبرهنة ٦.

لذلك $S_2 \neq S_1'$

نفرض ان $S_2 = S_2'$

$S_2 \neq \phi \longrightarrow$ توجد نقطة P بحيث ان $P \in S_2$

$\longrightarrow P \in S_2'$

$P \in S_2' \longrightarrow P\text{-}O'\text{-}A$ و $P \in S_2 \longrightarrow P\text{-}O\text{-}A$

$P\text{-}O\text{-}A$ وبما ان $O\text{-}A\text{-}O'$

فانه من مبرهنة ٤

يكون $P\text{-}O\text{-}A\text{-}O' \longrightarrow P\text{-}A\text{-}O'$

وهذا يناقض بديهية ٧ لان $P\text{-}O'\text{-}A$ متحققه.

لذلك، فان $S_2 \neq S_2'$

الحالة (٣)

عندما $A\text{-}O\text{-}O'$ ، البرهان مشابه للحالة (١).

تمارين ٤-٣

١- برهن على انه اذا كان $A\text{-}B\text{-}C$ و $A\text{-}B\text{-}D$ ، فان $A\text{-}C\text{-}D$

و B-C-D.

٢ ـ برهن على انه اذا كان A-B-D و B-C-D ، فان A-B-C-D.

٣ ـ برهن على انه اذا كان A-B-C و B-C-D ، فان A-B-C-D.

٤ ـ برهن على انه اذا كان A-B-C-D ، فان A,B,C,D مختلفة وتقع على مستقيم واحد.

٥ ـ برهن على انه اذا كان A-B-C-D-E ، فان A, B, C, D, E مختلفة وعلى مستقيم واحد.

٦ ـ برهن على انه توجد في الاقل خمس نقاط مختلفة على مستقيم معلوم.

٧ ـ برهن على انه توجد في الاقل خمس نقاط مختلفة لاتقع على مستقيم معلوم.

٨ ـ برهن على انه توجدفي الاقل ثلاث نقاط مختلفة بين اي نقطتين على مستقيم معلوم.

٩ ـ اذا كان A-B-C و A-B-D ، فان C = D ، B-C-D ، او B-D-C.

٤-٣ القطع (Segments)

تعريف ٥

لتكن A و B نقطتين مختلفتين، مجموعة كل النقاط X بحيث ان A-X-B تدعى قطعة.
ويرمز لها بالرمز : A-B

مبرهنة ١.

النقطتان A, B لاتنتميان الى A-B

البرهان

اذا كان $A, B \in A-B$

فان $A-A-B$ و $A-B-B$

وهذا يناقض بديهية ٦.

مبرهنة ١١

$A-B$ هي مجموعة غير خالية.

البرهان

من بديهية ٩، توجد نقطة C بحيث ان $A-C-B$

اي ان $C \in A-B$.

وبهذا فان $A-B$ هي مجموعة غير خالية.

مبرهنة ١٢

$$A-B = B-A$$

البرهان

يجب ان نبرهن ان $A-B$ هي مجموعة جزئية من $B-A$

وان $B-A$ هي مجموعة جزئية من $A-B$.

لكي نبين ان $A-B$ هي مجموعة جزئية من $B-A$

يجب ان نبرهن اذا كان $X \in A-B$ ، فان $X \in B-A$.

بما ان $X \in A-B$ ، فان $A-X-B$.

ومن بديهية ٥، يكون $B-X-A$

ومن التعريف ٥ ، $X \in B-A$

وبنفس الطريقة، نبرهن الاتجاه الاخر.

مبرهنة ١٣

$A\text{-}B$ هي مجموعة جزئية من المستقيم AB.

البرهان

لكي نبين ان $A\text{-}B$ هي مجموعة جزئية من المستقيم AB يجب ان نبرهن ذلك اذا كان $X \in A\text{-}B$ ، فان X تقع على المستقيم AB.

$$X \in A\text{-}B \longrightarrow A\text{-}X\text{-}B$$

ومن بديهية ٦، A, X, B مختلفة وعلى مستقيم واحد.
لذا فان X تقع على المستقيم AB.

مبرهنة ١٤ للطلاب

لتكن A و B نقطتين مختلفتين، فان $A\text{-}B = C\text{-}D$ اذا وفقط اذا $\{A, B\} = \{C, D\}$

البرهان

نفرض ان $\{A, B\} = \{C, D\}$
فان اما $A = C$ و $B = D$ او $A = D$ و $B = C$.
في اي حالة، يكون عندنا من تعريف القطعة $A\text{-}B = C\text{-}D$.
نفرض الان ان $A\text{-}B = C\text{-}D$ وان $\{A, B\} \neq \{C, D\}$
فانه يوجد عنصر في احدى المجموعتين لاينتمي الى الاخرى، وليكن C.
اي ان $C \neq A$ و $C \neq B$
وبما ان $A \neq B$ ، فان النقاط A, B, C مختلفة.
من مبرهنة ١٣، $A\text{-}B$ مجموعة جزئية من الخط AB
و $C\text{-}D$ مجموعة جزئية من الخط CD

وبما ان $A-B = C-D$ ، فانه من بديهية ١ ، تكون النقاط A, B, C على مستقيم واحد.
ومن بديهية ٧، تتحقق واحدة فقط مايلي:
$C-A-B$ ، $A-C-B$ ، $A-B-C$

الحالة (١)

نفرض ان $C-A-B$
$A-B = \phi$ ⟵ توجد نقطة H بحيث ان $A-H-B$
بما ان $C-A-B$ و $A-H-B$
فانه من مبرهنة ٤ يكون $C-A-H-B$ ⟵ $C-A-H$
وبما ان $A-B = C-D$ ⟵ $H \in C-D$ ⟵ $C-H-D$
من مبرهنة٤، $C-A-H$ و $C-H-D$ ⟵ $C-A-H-D$
⟵ $C-A-D$ ⟵ $A \in C-D$
وبما ان $A-B = C-D$ ⟵ $A \in A-B$
وهذا يناقض مبرهنة ١٠.
وبنفس الطريقة، نتوصل الى تناقض اذا اخذنا الحالتيين الباقيتين عندما $A-C-B$ او $A-B-C$.
يتضح مما تقدم ان القطعة $A-B$ تتعين من النقطتين A و B.

تعريف٦

تدعى كل من A و B نقطة نهاية القطعة $A-B$.

مبرهنة ١٥

لتكن A-B قطعة و A-R-B، فان A-R و R-B مجموعتان جزئيتان من A-B.

البرهان

لكي نبرهن ان A-R هي مجموعة جزئية من A-B، يجب ان نبين اذا كان $X \in A-R$ ، فان $X \in A-B$

$X \in A-R \longrightarrow A-X-R$ ، ومن الفرض A-R-B

فانه من مبرهنة٤ ، يكون A-X-R-B

$\longrightarrow$ A-X-B

$\longrightarrow X \in A-B$

وبنفس الطريقة، نستطيع ان نبرهن ان R-B هي مجموعة جزئية من A-B.

مبرهنة ١٦ XlelV

اي نقطة R في القطعة A-B تفصل A-B الى مجموعتين جزئيتين غير خاليتين R-B ,A-Ṙ اللتين مع (R) تكون تجزئة للقطعة A-B.

البرهان

من مبرهنة ١١، A-R, R-B مجموعتين غير خاليتين.
ومن مبرهنة ١٥، A-R, R-B مجموعتين جزئيتين من A-B.
(١) لكي نبرهن ان A-R, {R}, R-B تكون تجزئة الى A-B، يجب ان نبين اذا كانت X اية نقطة في A-B ، فان X تنتمي الى واحدة وفقط واحدة من المجموعات الجزئية:

$A-R,\ \{R\},\ R-B$

هناك احتمالان، اما $X \neq R$ او $X = R$

نفرض ان $X \neq R$. وبما ان $A-X-B$ و $A-R-B$
فانه من مبرهنة ١٣ وبديهية ٦، تكون النقاط X,A,R,B
مختلفة وعلى خط واحد.
وبما ان $A-R-B$، فانه من بديهية ٨، تتحقق واحدة فقط
ممايلي:

$X-A-R-B$ و $A-X-R-B$ و $A-R-X-B$ و $A-R-B-X$

لكن بما ان $A-X-B$ ومن بديهية ٧،
فانه لاتتحقق كل من $A-R-B-X$ و $X-A-R-B$.
اي انه اما $A-X-R-B$ او $A-R-X-B$ ⟵ اما $A-X-R$ او
$R-X-B$. لذا فانه اما $X \in A-R$ او $X \in R-B$.
وبما ان $X \notin \{R\}$ ، فان اي نقطة $X \neq R$ في $A-B$ تكون
عنصـــرا في واحـدة وفقـط واحـدة من المجموعات
$A-R$ ،$\{R\}$ ،$R-B$

اما اذا كان $X = R$ ، فان $X \in \{R\}$
ومن مبرهنة ١٠، $R \notin R-B$ و $R \notin A-R$
لذا فان اية نقطة X في $A-B$ تكون عنصرا في واحدة
وفقط واحدة من المجموعات $A-R,\ \{R\},\ R-B$.

(٢) يجب ان نبرهن ان $\{R\}$ تفصل $A-B$ الى $A-R$ و $R-B$.
(أ) لتكن Y_1 و X_1 نقطتين مختلفتين في $A-R$. فان
$A-X_1-R$ و $A-Y_1-R$.
من بديهية ٥، يكون $R-X_1-A$ و $R-Y_1-A$
من مبرهنة ٥ (أ) ، اما $R-X_1-Y_1$ او $R-Y_1-X_1$
ومن بديهية ٧، لايمكن ان يتحقق X_1-R-Y_1
بهذا فقط برهنا اذا كان $X_1,\ Y_1 \in A-R$ و $X_1 \neq Y_1$
، فان R لاتقع بين X_1 و Y_1.
وبنفس الطريقة اذا أخذنـــا $X_2,\ Y_2 \in R-B$ و

$X_2 \neq Y_2$، فان R لاتقع بين X_2 و Y_2.

(ب) نفرض ان $X_1 \in A\text{-}R$ و $X_2 \in R\text{-}B$. يجب ان نبرهن ان $X_1 - R - X_2$.

من الجزء (١)، $X_1 \neq X_2$.

بما ان $A\text{-}X_1\text{-}R$ و $A\text{-}R\text{-}B$

فانه من مبرهنة ٤، يكون $A\text{-}X_1\text{-}R\text{-}B \longleftarrow X_1\text{-}R\text{-}B$

وكذلك، $X_1\text{-}R\text{-}B$ و $R\text{-}X_2\text{-}B \longleftarrow X_1\text{-}R\text{-}X_2\text{-}B$

$\longleftarrow X_1\text{-}R\text{-}X_2$

٤-٣ تمارين

١- برهن على ان القطعة تحتوي على عدد غير منته من النقاط.

٢- برهن على ان الخط يحتوي على عدد غير منته من النقاط.

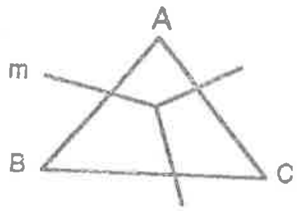
٣- برهن على ان نصف الخط يحتوي على عدد غير منته من النقاط.

٤-٤ بديهية باخ (The Axiom of Pasch)

في كثير من البراهين الاقليدية، مثل، "المستقيم الذي يمر براس مثلث" و "منصف زاوية في مثلث" قد افترضت بان هذه المستقيمات تقطع الضلع المقابل في المثلث. لكن على اي اساس اعتمدت هذه الفرضية؟. لقد صاغ العالم باخ بديهيته ليس فقط على انها عبارة اعتمد عليها في البراهين، ولكن لانه ليس بالامكان برهنتها من بديهيات اقليدس المعروفة.

تعريف ٧

لتكن A, B, C ثلاث نقاط مختلفة ولاتقع على مستقيم واحد، ان اتحاد {A, B, C} مع القطع A-B, A-C, B-C يدعى مثلثا، تدعى A, B, C الرؤوس.
تدعى A-B, A-C, B-C الاضلاع.
الخطوط التي تحتوي الاضلاع تدعى خطوط الاضلاع.



شكل (١٧)

من الواضح ان المثلث يتعين من رؤوسه.
المثلث الذي يتعين من A,B,C يرمز له بالرمز ΔABC.
لقد قدم باخ البديهية التالية التي توضح بالشكل ١٧.

بديهية ١٠ (باخ)

اذا كانت A, B, C رؤوس مثلث و m هو مستقيم لايمر باي راس من هذه الرؤوس ويحتوي m على نقطة من الضلع A-B ، فان m يحتوي كذلك على نقطة من الضلع A-C او B-C.

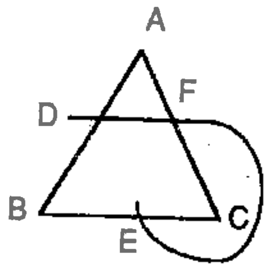
السؤال الذي يتبادر الى الاذهان هو هل ان المستقيم m يقطع كل من A-C وB-C؟. بالطبع كلا وهذا ما سنبرهنه في المبرهنة التالية:

مبرهنة ١٧

اذا كانت A, B, C رؤوس مثلث، اي مستقيم m يحتوي على نقطة من الضلع A-B ونقطة من الضلع A-C ، فانه لايمكن ان يحتوي على نقطة من الضلع B-C.

البرهان

نفرض وجود مستقيم m يحتوي على مثل هذه النقاط D, E, F بحيث ان D ∈ A-B ، E ∈ B-C ، و F ∈ A-C.
من الفرض ومبرهنة ٢، تكون النقاط مختلفة.
من بديهية ٧، تتحقق واحدة فقط مما يلي:
F-D-E ، D-E-F ، D-F-E
نفرض ان D-F-E. بما ان E ∈ B-C ، فانه تقع E على المستقيم BC (مبرهنة ١٣) وكذلك D تقع على الخط AB، ومن مبرهنة٢، النقاط D, E, B لاتقع على مستقيم واحد. لذلك من بديهية باخ، المستقيم AC الذي يقطع D-E في F يجب ان يقطع B-E او B-D. لكن هذا لايمكن من مبرهنة ٢ وبديهية ٧، لذا فان الفرض يكون خاطئا.
وبنفس الطريقة، نتوصل الى تناقض اذا كان D-E-F أو F-D-E.
وبهذا، فان المستقيم الذي يقطع ضلعين في مثلث، فانه لايقطع الضلع الثالث.



شكل (١٨)

والان نعيد نص بديهية باخ بشكل ابسط ((اذا كان مستقيم لايمر باي راس من رؤوس مثلث ويقطع ضلعا واحدا في المثلث، فانه يقطع في الاقل واحدا من الضلعين الاخرين.))

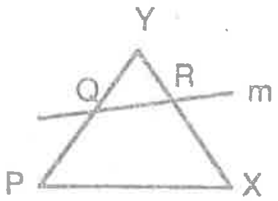
وكذلك نعيد نص مبرهنة ١٧ في الشكل التالي:
((اذا كان مستقيم يقطع ضلعا واحدا من مثلث، فانه يقطع في الاكثر واحدا من الضلعين الاخرين)).
وبالنتيجة نتوصل الى مايلي:
((المستقيم الذي يقطع ضلعا واحدا من مثلث والذي لايمر باي راس منه، فانه يقطع ضلعا واحدا فقط من الضلعين الاخرين)).

تعريف ٨ تعريف جهتي المستقيم او نصفي المستوي

ليكن m اي مستقيم و P نقطة لاتقع على m. لتكن S_1 مجموعة تحتوي على P وكل النقاط X لاتقع على m، بحيث ان P-X لاتحتوي على نقطة من m. لتكن S_2 مجموعة كل النقاط Y بحيث ان P-Y تحتوي على نقطة m. فان S_1 و S_2 تدعيان جهتي المستقيم m.
وتدعيان ايضا نصفي المستوي بالنسبة للمستقيم m.

مبرهنة ١٨

جهتا المستقيم m غير خاليتين.



شكل (١٩)

البرهان

ليكن m مستقيما، توجد نقطة Q على m ونقطة P لاتقع على m. من بديهية ٩، توجد نقطة Y بحيث ان P-Q-Y ولذلك P-Y تحتوي على نقطة Q من m، اي ان $Y \in S_2$ وعليه فان جهة m المجموعة S_2 هي مجموعة غير خالية.

توجد نقطة اخرى R على m.

ومن بديهية ٩، توجد نقطة X بحيث ان X-R-Y. في ΔPXY بما ان m يقطع الضلع P-Y في Q ويقطع الضلع X-Y في R فانه من مبرهنة ١٧، لايمكن ان يقطع الضلع P-X.

ومن بديهية ٦، ومبرهنة ٢، لاتقع X على m، فان $X \in S_1$ اي ان جهة المستقيم m المجموعة S_1 هي مجموعة غير خالية.

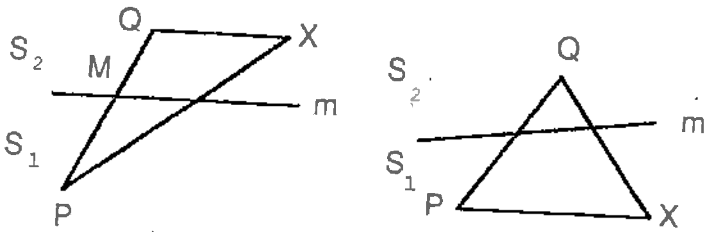
يمكن ان نعبر عن جهتي المستقيم m نسبة الى نقطة P التي لاتقع على m بالصورة التالي :

$$S_1 = \{X \notin m : P\text{-}X \cap m = \phi \vee X = P\}$$

$$S_2 = \{Y : P\text{-}Y \cap m \neq \phi\}$$

مبرهنة ١٩ للاطلاع

توجد جهتان فقط للمستقيم m (نسبة الى نقطة P) وتكونان مع m تجزئة لمجموعة كل النقاط.



(ب) (أ)

شكل (٢٠)

البرهان

كل نقطة اما تقع على m او لاتقع، حيث لاتوجد نقطة تقع على m ولاتقع على m. من برهان مبرهنة ١٨، اذا كانت M نقطة على m، فانه توجد نقطتين P, Q لاتقعان على m، بحيث ان P-M-Q. لتكن X اية نفطة لاتقع على m. اذا كانت X تقع على المستقيم PQ، فانه تتحقق واحدة فقط من الحالات الاربعة التالية:

X-P-Q ، P-X-Q ، P-Q-X ، X = P ، او X = Q

فانه واحدة فقط من القطع P-X, Q-X تقطع m.

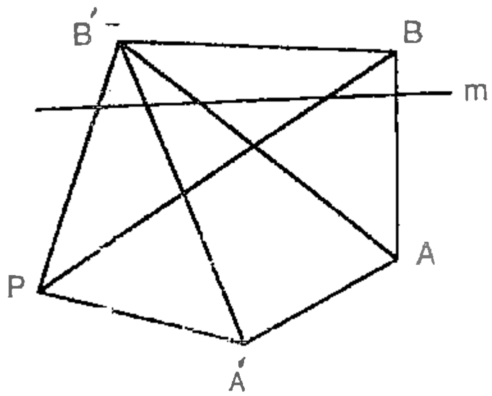
اذا كانت X لاتقع على المستقيم PQ، فانه ايضا واحدة فقط من القطع P-X, Q-X تقطع m.

حيث اذا كان اي قطعة من هذه القطع لاتقطع m، وبما ان P-M-Q، اي ان m يقطع P-Q في M، فان هذا يناقض بديهية ١٠. اما اذا كان كل من P-X و Q-X تقطع m، فان هذا يناقض مبرهنة ١٧. هكذا، اذا كانت P-X لاتقطع m، فان X في S_1 كما في تعريف ٨ بما انه توجد هذه الاحتمالات فقط وان كل نقطة في واحدة فقط من المجموعات S_1, S_2 ، وبهذا نكمل البرهان .

تبين المبرهنات ١٨ و ١٩ ان جهتي المستقيم m، مع m تحقق خواص S_1, S_2 و S في التعريف. يجب ان نبين الان تحقق الحالة (أ) والخالة (ب) في تعريف ٤ .

مبرهنة ٢٠. Xiell

اي مستقيم m يفصل مجموعة كل النقاط الى جهتين.



شكل (٢١)

البرهان

من المبرهنتين ١٨ و ١٩، نعرف ان جهتي المستقيم m غير خاليتين ومنفصلتين عن بعضهما وعن m. لتكن P نقطة في احدى الجهتين. ولتكن A, A' اي نقطتين لاتقعان على m بحيث ان A-P, A'-P لاتحتويان على نقطة من m. لتكن B, B' اي نقطتين في الجهة الاخرى من m، اي انه، لاتقعان على m لكن P-B، P-B' تحتويان على نقطة من m.

الحالة (أ)

اذا كان اي ثلاث، او اربع، او خمس من النقاط A, A', B, B', p تقع على مستقيم واحد، فان m يقطع A-B, A-B', A'-B, A'-B' (لماذا؟). اذا كان اي ثلاث من هذه النقاط لاتقع على مستقيم واحد، فانه نستنتج مباشرة من بديهية باخ ان m يقطع A-B, A'-B, A'-B' و A-B'.

الحالة (ب)

اذا كانت A, A' تنتميان الى نفس المجموعة، فانه يجب ان نبرهن ان $A-A'$ لاتقطع m. اذا كانت A, P, A' تقع على مستقيم واحد، او B, P, B' على مستقيم واحد، فانه يستنتج ان ايا من القطعتين $A-A'$ او $B-B'$ لاتقطع m (لماذا؟). اذا كانت A, P, A' لاتقع على خط واحد، وبما ان من الفرض ليست $P-A$ ولا $P-A'$ تقطع m، فان هذا يناقض بديهية باخ اذا قطع m القطعة $A-A'$.

اما اذا كانت B, P, B' لاتقع على خط واحد، وبما انه من الفرض كل من $P-B$ و $P-B'$ تقطع m، فان من مبرهنة ١٧، m لايقطع $B-B'$.

قاعدة لغوية

المجموعتان S_1, S_2 في تعريف ٨ يقال عنهما تتعينان من m و P.

تبين المبرهنة التالية وحدانية جهتي المستقيم m المتعينتين من المستقيم m واية نقطة لاتقع على m.

مبرهنة ٢١

ليكن m مستقيما، P، P' نقطتين لاتقعان على m. جهتا المستقيم m المتعينتين من P و m هما نفس الجهتين المتعينتين من P' و m.

البرهان

يترك كتمرين.

مبرهنة ٢٢

ليكن $m, \ m'$ مستقيمين مختلفين، جهتا المستقيم m تختلفان عن جهتي المستقيم m'.

البرهان

يترك كتمرين.

تمارين ٤-٤

١- برهن اذا كان $A-F-B$ و $B-C-D$، فانه توجد نقطة E في $F-D$ بحيث ان $A-E-C$. (A, B, C لاتقع على مستقيم واحد).

٢- برهن اذا كان $A, \ B, \ C$ ثلاث نقاط مختلفة ولاتقع على مستقيم واحد و D, E نقطتين بحيث ان $B-C-D$ و $C-E-A$، فانه توجد نقطة F على الخط DE بحيث ان $A-F-B$.

٣- في تمرين ٢، بين ان $D-E-F$.

٤- اذا كان في ΔABC، $A-D-B$ ، $A-E-C$ و $B-F-C$، فان $A-F$ تقطع $D-E$.

٥- برهن في ΔABC، اذا كان $A-D-B$، $B-E-C$، فان $A-E$ تقطع $C-D$.

٤-٥ المجموعات المحدبة (Convex Sets)

تعريف ٩

تدعى المجموعة S مجموعة محدبة اذا وفقط اذا كان اي نقطتين تنتميان الى S، فان $P-Q$ تكون مجموعة جزئية

$P, Q \in S$

$P-Q$

من S.

مبرهنة ٢٣

(أ) اي مستقيم يكون مجموعة محدبة.

(ب) كل من جهتي نقطة O هي مجموعة محدبة.

البرهان

(أ) ليكن m خطا، لتكن A و B اي نقطتين على m. من تعريف القطعة، A و B تعينان القطعة A-B.
من مبرهنة ١٣، A-B مجموعة جزئية من m.
لذلك، من تعريف ٩، يكون m مجموعة محدبة.

(ب) لتكن S_2 و S_1 جهتي نقطة O على المستقيم m المتعينتين من النقطتين O و A.

اولا، يجب ان نبرهن ان S_1 هي مجموعة محدبة
لتكن X_1 و Y_1 اي نقطتين في S_1. يجب ان نبرهن ان X_1-Y_1 هي مجموعة جزئية من S1

ليكن $X_1 - X - Y_1 \longleftarrow X \in X_1 - Y_1$

$O-A-X_1 \,,\; O - X_1 - A \longleftarrow X_1 \in S_1$ او، $X_1 = A$

$O-A-Y_1 \,,\; O - Y_1 - A \longleftarrow Y_1 \in S_1$ او، $Y_1 = A$

(١) اذا كان $O-X_1-A$ و $O-Y_1-A$
من مبرهنة ٥، يكون $O-X_1-Y_1$ او $O-Y_1-X_1$.
عندما $O - X_1 - Y_1$ بما ان $X_1-X - Y_1$ فانه من مبرهنة ٤، يكون $O - X - Y_1 \longleftarrow O-X_1-X-Y_1$
وبما ان $O - Y_1 - A$ فانه من مبرهنة ٤، يكون

$$X \in S_1 \Longleftarrow O-X-A \Longleftarrow O-X-Y_1-A$$

عندما $O-Y_1-X_1$ ، وبما ان X_1-X-Y_1 ، فان من
بديهية ٥ ومبرهنة ٤ يكون $O-Y_1-X-X_1$ $\longleftarrow$
$O-X-X_1$ وبما ان $O-X_1-A$ $\longleftarrow$ $O-X-X_1-A$
$\longleftarrow$ $O-X-A$ $\longleftarrow$ $X \in S_1$.

(٢) اذا كان $O-A-X_1$ و $O-A-Y_1$ ، فانه من مبرهنة ٥،
يكون $O-X_1-Y_1$ او $O-Y_1-X_1$
عندما $O-X_1-Y_1$ وبما ان X_1-X-Y_1 ، فانه من مبرهنة
٤، يكون $O-X_1-X-Y_1$ $\longleftarrow$ $O-X_1-X$ وبما ان $O-A-X_1$
، فانه من مبرهنة ٤، يكون $O-A-X_1-X$ $\longleftarrow$
$O-A-X$ $\longleftarrow$ $X \in S_1$
عندما $O-Y_1-X_1$ وبما ان X_1-X-Y_1 ، فانه من مبرهنة
٤، يكون $O-Y_1-X-X_1$ $\longleftarrow$ $O-Y_1-X$ وبما ان
$O-A-Y_1$ ، فانه من مبرهنة ٤، يكون $O-A-Y_1-X$
$\longleftarrow$ $O-A-X$
$\longleftarrow$ $X \in S_1$

(٣) اذا كان $O-X_1-A$ و $O-A-Y_1$ ، فانه من مبرهنة ٤،
يكون $O-X_1-A-Y_1$ $\longleftarrow$ $O-X_1-Y_1$ وبما ان X_1-X-Y_1
فانه من مبرهنة ٤، $O-X_1-X-Y_1$
$\longleftarrow$ $O-X_1-X$ وبما ان $O-X_1-A$
من مبرهنة ٥ $\longleftarrow$ $O-X-A$ او $O-A-X$ او $X = A$
$\longleftarrow$ $X \in S_1$

(٤) اذا كان $X_1 = A$ و $O-Y_1-A$ او $O-A-Y_1$
$\longleftarrow$ $O-Y_1-X_1$ او $O-X_1-Y_1$
وبما ان X_1-X-Y_1
فانه من مبرهنة ٤ $\longleftarrow$ $O-Y_1-X-X_1$ او $O-X_1-X-Y_1$
$\longleftarrow$ $O-X-X_1$ او $O-X_1-X$ وبما ان $X_1 = A$
$\longleftarrow$ $O-X-A$ او $O-A-X$

$\longleftarrow$ $X \in S_1$.

(٥) اذا كان $O-A-X_1$ و $O-Y_1-A$ ، البرهان يكون مشابها للحالة (٣).

(٦) اذا كان $A = Y_1$ و $O-X_1-A$ او $O-A-X_1$ ، يكون البرهان مشابها للحالة (٤).

ثانيا، يجب ان نبرهن ان S_2 هي مجموعة محدبة
لتكن X_2, Y_2 نقطتين مختلفتين في S_2 ، يجب ان نبرهن ان X_2-Y_2 مجموعة جزئية من S_2

ليكن $X \in X_2-Y_2$ $\longleftarrow$ X_2-X-Y_2
$X_2 \in S_2$ $\longleftarrow$ X_2-O-A
$Y_2 \in S_2$ $\longleftarrow$ Y_2-O-A
من بديهية ٥، X_2-O-A و Y_2-O-A $\longleftarrow$ $A-O-X_2$ و $A-O-Y_2$
ومن مبرهنة ٥ $\longleftarrow$ $O-X_2-Y_2$ او $O-Y_2-X_2$
عندما $O-X_2-Y_2$ وبما ان X_2-X-Y_2 ، فانه من مبرهنة ٤، يكون $O-X_2-X-Y_2$ $\longleftarrow$ $O-X_2-X$
ومن بديهية ٥ $\longleftarrow$ $X-X_2-O$ وبما ان X_2-O-A
من مبرهنة ٤ $\longleftarrow$ $X-X_2-O-A$
$\longleftarrow$ $X-O-A$
$\longleftarrow$ $X \in S_2$

عندما $O-Y_2-X_2$
بما ان X_2-X-Y_2 ، فانه من بديهية ٥، يكون Y_2-X-X_2
وبما ان $O-Y_2-X_2$ ، فان من مبرهنة ٤، يكون $O-Y_2-X-X_2$ $\longleftarrow$ $O-Y_2-X$
بما ان Y_2-O-A ، فانه من بديهية ٥، يكون $A-O-Y_2$
من مبرهنة ٤، $O-Y_2-X$ و $A-O-Y_2$ $\longleftarrow$ $A-O-Y_2-X$

A-O-X ⟵

من بديهية ٥ ⟵ X-O-A

$X \in S_2$ ⟵

لذلك، فان كل من S_1, S_2 تكون مجموعة محدبة.

مبرهنة ٢٤

كل قطعة هي مجموعة محدبة.

البرهان

لتكن A-B قطعة. يجب ان نبرهن ان A-B هي مجموعة محدبة. لتكن X و Y اي نقطتين مختلفتين في A-B. يجب ان نبرهن ان X-Y هي مجموعة جزئية من A-B.

ليكن $Z \in X\text{-}Y$ ⟵ X-Z-Y

$X \in A\text{-}B$ ⟵ A-X-B

$Y \in A\text{-}B$ ⟵ A-Y-B

من مبرهنة ٥، A-X-B و A-Y-B ⟵ A-Y-X او A-X-Y

عندما A-X-Y وبما ان X-Z-Y ، فان من مبرهنة ٤،

⟵ A-X-Z-Y

⟵ A-Z-Y وبما ان A-Y-B

من مبرهنة ٤ ⟵ A-Z-Y-B

⟵ A-Z-B

⟵ $Z \in A\text{-}B$

عندما A-Y-X ، من بديهية ٥، يكون X-Y-A وبما ان X-Z-Y

من مبرهنة ٤ ⟵ X-Z-Y-A

⟵ X-Z-A

من بديهية ٥ ⟵ A-Z-X وبما ان A-X-B

من مبرهنة ٤ ⟵ A-Z-X-B

$$A-Z-B \longleftarrow$$
$$Z \in A-B \longleftarrow$$

وبهذا، فان $A-B$ هي مجموعة محدبة.

مبرهنة ٢٥ / [illegible]

كل من جهتي المستقيم m هي مجموعة محدبة.

البرهان

لتكن S_1, S_2 جهتي المستقيم m المتعينتين من m ونقطة P.

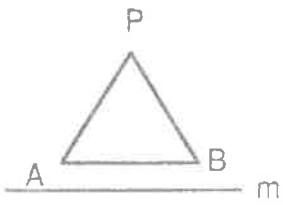
$$S_1 = \{ X \notin m : P\text{-}X \cap m = \phi \} \cup \{P\}$$
$$S_2 = \{ Y : P\text{-}Y \cap m \neq \phi \}$$

(أ) يجب ان نبرهن ان S_1 هي مجموعة محدبة.
لتكن A و B نقطتين مختلفتين في S_1، يجب ان نبرهن ان $A-B$ هي مجموعة جزئية من S_1.
ليكن $X \in A-B \longrightarrow A-X-B$

$A \in S_1 \longrightarrow A \notin m$ وان $P-A$ لاتقطع m او $A = P$

$B \in S_1 \longrightarrow B \notin m$ وان $P-B$ لاتقطع m او $B = P$

يجب ان نبرهن ان $X \in S_1$



شكل (٢٢)

اذا كان $X = P$ ← $X \in S_1$
نفرض ان $X \neq P$
اما ان تكون النقاط A, B, P على استقامة واحدة
او ليست على استقامة واحدة.

الحالة (١)

اذا كانت A, B, P لاتقع على مستقيم واحد.
في ΔABP، اذا قطع المستقيم m الضلع A-B
وبما ان لايمر باي راس منه، فانه من بديهية باخ، m يقطع P-A او P-B وهذا خلاف الفرض، لذلك فان m لايقطع A-B.
وبما ان $X \notin A-B$ ، فان $X \notin m$
في ΔPAX، نفرض ان m يقطع P-X
وبما ان m لايقطع P-A ، فانه من بديهية باخ، m يقطع الضلع A-X
من مبرهنة ١٥، A-X هي مجموعة جزئية من A-B، فان m يقطع A-B وهذا تناقض.
لذا فان m لايقطع P-X وبما ان $X \notin m$ ، فانه من تعريف S_1، $X \in S_1$

الحالة (٢)

نفرض ان A, B, P تقع على استقامة واحدة.
من بديهية ٦، بما ان A-X-B ← A, X, B مختلفة وعلى استقامة واحدة. اي ان X على الخط AB ← النقاط A, B, P, X تقع على مستقيم واحد.
وبما ان $P \neq X$ ، $A \neq B$ ، $A \neq X$ ، $B \neq X$.
نفرض ان $A \neq P$ و $B \neq P$ ← النقاط A, B, P, X مختلفة.

النقاط X ، P ، B ، A مختلفة وعلى استقامة واحدة،
وبما ان $A-X-B$
فانه من بديهية ٨ ⟵ تتحقق واحدة فقط مما يلي:
$A-X-B-P$ ، $A-X-P-B$ ، $A-P-X-B$ ، $P-A-X-B$

اذا كان $A-X-B-P$ ⟵ $A-X-P$
ومن مبرهنة ١٥ ⟵ $P-X$ هي مجموعة جزئية من $P-A$
وبما ان $P-A$ لاتقطع m ، فان $P-X$ لاتقطع m.

اذا كان $A-X-P-B$ ⟵ $A-X-P$.
وكما في الحالة السابقة، $P-X$ لاتقطع m

اذا كان $A-P-X-B$ ⟵ $P-X-B$
ومن مبرهنة ١٥ ⟵ $P-X$ هي مجموعة جزئية من $P-B$
وبما ان $P-B$ لاتقطع m، فان $P-X$ لاتقطع m

اذا كان $P-A-X-B$ ⟵ $P-X-B$
من مبرهنة ١٥ ⟵ $P-X$ هي مجموعة جزئية من $P-B$.
كما في الحالة السابقة ⟵ $P-X$ لاتقطع m.

بما ان $A-X-B$ $A \in S_1$ و $B \in S_1$، ومن تعريف الفصل ومبرهنة ٢٠ فان، X لاتقع على m
وبهذا فقد برهنا ان $P-X$ لاتقطع m و X لاتقع على m اي ان $X \in S_1$

نفرض $A = P$ ، وبما ان $A-X-B$ ، فان $P-X-B$
ومن مبرهنة ١٥، $P-X$ هي مجموعة جزئية من $P-B$
وبما ان $P-B$ لاتقطع m، فان $P-X$ لاتقطع m
⟵ $X \in S_1$
وبنفس الطريقة اذا كان $B = P$.
وبذلك تكون S_1 مجموعة محدبة.

(ب) يجب ان نبرهن ان S_2 هي مجموعة محدبة.

لتكن A و B نقطتين مختلفتين في S_2. يجب ان نبرهن ان $A-B$ هي مجموعة جزئية من S_2.

لتكن $Y \in A-B$. يجب ان نبرهن ان $Y \in S_2$

$Y \in A-B$ $\longleftarrow$ $A-Y-B$

$A \in S_2$ $\longleftarrow$ $P-A$ تقطع m، ومن مبرهنة ٢،

A لاتقع على m

$B \in S_2$ $\longleftarrow$ $P-B$ تقطع m، ومن مبرهنة ٢،

B لاتقع على m

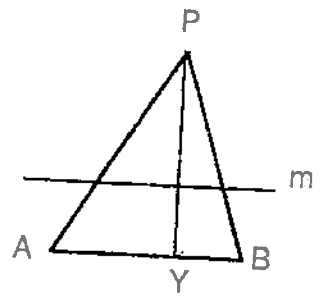
اما النقاط P, A, B على استقامة واحدة او ليست على استقامة واحدة.

نفرض ان النقاط P, A, B لاتقع على مستقيم واحد.

في ΔPAB الخط m يقطع $P-A$ و $P-B$ ولايمر باي راس من ΔPAB.

من مبرهنة ١٧ $\longleftarrow$ m لايقطع $A-B$

وبما ان $A-Y-B$ ، فانه من مبرهنة ٢٥ تكون $B-Y$ مجموعة جزئية من $A-B$ $\longleftarrow$ m لايقطع $B-Y$



شكل (٢٣)

في $\triangle PYB$ ، m يقطع P-B ولايقطع B-Y ولايمر باي راس من المثلث، فانه من بديهية باخ، m يقطع P-Y

$\Longleftarrow Y \in S_2$

نفرض ان النقاط P, A, B على مستقيم واحد.

من بديهية ٧ $\Longleftarrow$ تتحقق واحدة فقط ممايلي:

A-P-B ، P-B-A ، P-A-B

١ـ نفرض ان P-A-B، وبما ان A-Y-B

من مبرهنة ٤ $\Longleftarrow$ P-A-Y-B $\Longleftarrow$ P-A-Y

من مبرهنة ١٥ $\Longleftarrow$ $P\text{-}A \subset P\text{-}Y$

وبما ان P-A تقطع m $\Longleftarrow$ P-Y تقطع m

$\Longleftarrow Y \in S_2$

٢ـ نفرض ان P-B-A ، بنفس الطريقة السابقة،

فان $Y \in S_2$

٣ـ نفرض A-P-B.

لتكن P-A تقطع m في X_1 و P-B تقطع m في X_2.

اي ان $P\text{-}X_1\text{-}A$ و $P\text{-}X_2\text{-}B$

وبما ان $P\text{-}X_1\text{-}A$ ، A-P-B ، فانه من مبرهنة ٤ وبديهية ٥، يكون $A\text{-}X_1\text{-}P\text{-}B$ $\Longleftarrow$ $X_1\text{-}P\text{-}B$

وبما ان $X_1\text{-}P\text{-}B$ ، $P\text{-}X_2\text{-}B$ ، فانه من مبرهنة ٣، النقاط B, P, X_1, X_2 مختلفة وعلى مستقيم واحد $\Longleftarrow$ X_1, X_2 تقعان على المستقيم PB.

$\Longleftarrow$ m يقطع المستقيم PB في النقطتين المختلفتين X_1 و X_2 وهذا يخالف مبرهنة ٢.

لذا فان هذه الحالة لايمكن ان تؤخذ.

من الحالتين (١) و (٢)، نستنتج ان S_2 هي مجموعة محدبة.

مبرهنة ٢٦

تقاطع n من المجموعات المحدبة هو مجموعة محدبة.

البرهان

ليكن $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$

حيث ان $A_1, A_2, \ldots, A_n$ هي مجموعات محدبة.

يجب ان نبرهن ان A هي مجموعة محدبة.

لتكن X و Y نقطتين مختلفتين في A

يجب ان نبين ان X-Y هي مجموعة جزئية من A

$X, Y \in A \longleftarrow$

$X, Y \in A_1$ ، $X, Y \in A_2$ ، .... و $X, Y \in A_n$

وبما ان $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات محدبة

$\longleftarrow$ $X\text{-}Y \subseteq A_1$ ، $X\text{-}Y \subseteq A_2$ ، ... ، $X\text{-}Y \subseteq A_n$

$\longleftarrow$ $X\text{-}Y \subseteq A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$

$\longleftarrow$ $X\text{-}Y \subseteq A$

$\longleftarrow$ A هي مجموعة محدبة.

تعريف ١٠

تدعى جهتا نقطة O على مستقيم m بجهتي O المتعاكستين.

تعريف ١١

تدعى جهتا المستقيم m بجهتي m المتعاكستين.

مبرهنة ٢٧

(أ) اذا كانت النقطتان A, B في جهتين متعاكستين من مستقيم m و B, C في نفس الجهة من m، فان A, C في جهتين متعاكستين من m.

(ب) اذا كانت النقطتان A, B في جهتين متعاكستين من مستقيم m وان B, C في جهتين متعاكستين من m، فان A, C في نفس الجهة من m.

(جـ) اذا كانت A, B في نفس الجهة من m و B, C في نفس الجهة من m، فان A, C في نفس الجهة من m.

تعريف ١٢

مجموعة كل النقاط على مستقيم في نفس الجهة من نقطة O، تدعى شعاع، تدعى O نقطة البداية.

الشعاعان المناظران لجهتي O يدعيان شعاعين متعاكسين.

يرمز للشعاع الذي نقطة بدايته A و B نقطة على الشعاع بالرمز:

$$\overrightarrow{AB}$$

اي ان AB هو مجموعة كل النقاط X على المستقيم AB بحيث ان A لاتقع بين X و B

بتعبير آخر، اما يكون A-X-B او A-B-X.

مبرهنة ٢٨

(أ) الشعاع هو مجموعة محدبة.

(ب) الشعاع هو مجموعة جزئية من مستقيم.

(ج) للشعاع نقطة بداية وحيدة.

(د) نقطة البداية لاتنتمي الى الشعاع.

(هـ) لكل شعاع يوجد شعاع واحد معاكس له.
(و) الشعاع الذي نقطة بدايته على مستقيم، لكنه لايقع على المستقيم، فان كل نقاطه تقع في نفس الجهة من المستقيم.
(ز) يتعين الشعاع من نقطة بدايته واي نقطة من نقاطه.

البرهان

(ا) يستنتج حالا من مبرهنة ٢٣(ب) ومن تعريف الشعاع.
(ب) يبرهن من تعريف الشعاع .
(ج) يبرهن من تعريف الشعاع ومن مبرهنة ٩.
(د) يبرهن مباشرة من مبرهنة ٦ وتعريف الشعاع.
(هـ) يبرهن من تعريف الشعاع ومبرهنة ٧.
(و) ليكن $\overrightarrow{OA}$ شعاعا لايقع على مستقيم m، وان O على m.

يجب ان نبرهن ان كل نقاط $\overrightarrow{OA}$ تقع في نفس الجهة من m.

نفرض ان العبارة خطأ، فتوجد نقطة B على $\overrightarrow{OA}$ بحيث ان B تقع في جهة m التي لاتحتوي على A، اي ان A و B في جهتين متعاكستين من m.

من تعريف الفصل ومبرهنة ٢٠، حيث ان m يفصل جهتيه ، فانه توجد نقطة Q على m بحيث ان A-Q-B.

من تعريف الشعاع الذي هو جزء من مستقيم، O تقع على المستقيم AB، وبما ان A-Q-B ، فانه من بديهية ٦، Q تقع على المستقيم AB.

اي ان، الخط AB يقطع الخط m في النقطتين O و Q، من بديهية ١، يكون $O = Q$

بما ان $A\text{-}Q\text{-}B \longrightarrow A\text{-}O\text{-}B$

A و B في جهتين متعاكستين من O على الخط AB. بتعبير آخر، A و B في شعاعين متعاكسين نقطة بدايتهما O.
وهذا يخالف الفرض بان A و B تقعان على الشعاع $\overrightarrow{OA}$. لذا فان فرضيتنا خاطئة.
اي ان كل نقاط OA تقع في نفس الجهة من m.

(ز) يستنتج البرهان مباشرة من تعريف الشعاع ومبرهنة ٨.

٤-٦ داخل وخارج المثلث

تعريف ١٣

داخل Δ ABC هو مجموعة كل النقاط الناتجة من تقاطع

(أ) جهة المستقيم AB التي تحتوي C.

(ب) جهة المستقيم AC التي تحتوي B.

(جـ) جهة المستقيم BC التي تحتوي A.

خارج مثلث هو مجموعة كل النقاط التي لاتقع على المثلث ولاتقع في داخله.

مبرهنة ٢٩

داخل مثلث هو مجموعة محدبة.

البرهان

ليكن ABC مثلثا.
داخل المثلث ABC هو تقاطع جهة AB التي تحتوي C وجهة AC التي تحتوي B

وجهة BC التي تحتوي A

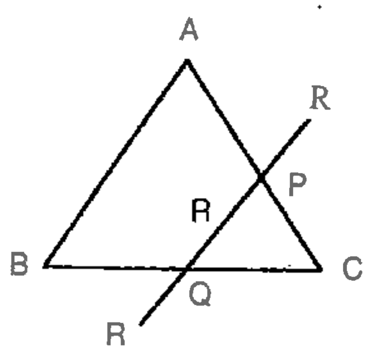
من مبرهنة ٢٥ ⟵ جهة المستقيم هي مجموعة محدبة

ومن مبرهنة ٢٦ ⟵ تقاطع ثلاث مجموعات محدبة هي مجموعة محدبة

⟵ داخل ΔABC هو مجموعة محدبة.

مبرهنة ٣.

اذا كانت P, Q نقطتين على ضلعي مثلث، و R نقطة على المستقيم PQ وفي داخل المثلث، فان P-R-Q.



شكل (٢٤)

البرهان

ليكن ABC مثلثا، P نقطة على الضلع A-C و Q نقطة على الضلع B-C، R نقطة على المستقيم PQ وفي داخل المثلث.

من بديهية ٧، تتحقق واحدة فقط مما يلي:

P-Q-R ، Q-P-R ، P-R-Q

نفرض ان P-Q-R تتحقق، وبما ان Q على المستقيم BC ، فان P و R في جهتين متعاكستين من BC.

بما ان الشعاع CA لايقع على الخط BC لكن نقطة بدايته على الخط BC ، فمن مبرهنة ٢٨(و)،

كل نقاط الشعاع CA تقع في نفس الجهة من BC

اي ان A و P في نفس الجهة من BC.

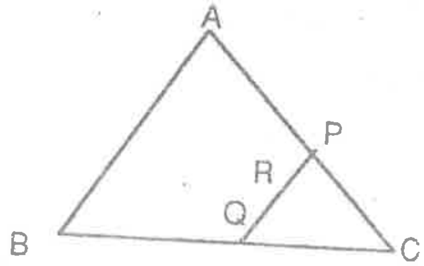
ومن مبرهنة ٢٧(أ)، A و R تقعان في جهتين متعاكستين من BC

اي ان R لاتقع في جهة BC التي تحتوي A مناقضا الفرض بان R في داخل المثلث.

وبنفس الطريقة نتوصل الى تناقض ، اذا فرضنا Q-P-R. لذا فان P-R-Q تتحقق.

مبرهنة ٣١

اذا كانت P, Q نقطتين على ضلعي مثلث فان P-Q هي مجموعة جزئية من داخل المثلث.



شكل (٢٥)

البرهان

ليكن ABC مثلثا، وفيه النقطة P على الضلع A-C والنقطة Q على الضلع B-C. لتكن R نقطة في P-Q.

يجب ان نبرهن ان R في داخل المثلث.

بما ان الشعاع CA لايقع على المستقيم BC وان نقطة

بدايته C تقع على BC ، فمن مبرهنة ٢٨(و)، كل نقاط $\overrightarrow{CA}$ تقع في نفس الجهة من BC ،اي ان A و P في نفس الجهة من BC.

وكذلك، بما ان P-R-Q ، فان R و P تقعان على الشعاع $\overrightarrow{QP}$. وبما ان Q على الخط BC ، فانه من مبرهنة ٢٨ (و) كل نقاط QP تقع في نفس الجهة من BC ، اي ان R ,P في نفس الجهة من BC. ومن مبرهنة ٢٧(أ)، النقطتان A و R تقعان في نفس الجهة من BC. اي ان R تقع في جهة BC التي تحتوي A.

مرة ثانية، وبنفس الطريقة نستطيع ان نبين ان R تقع في جهة AC التي تحتوي B.

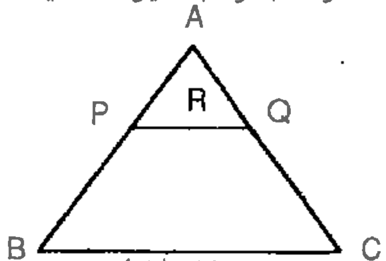
كذلك، بما ان C ,Q تقعان على الشعاع $\overrightarrow{BC}$ وان $\overrightarrow{BC}$ لايقع على المستقيم AB ونقطة بدايته B على AB ، فمن مبرهنة ٢٨(و)، كل نقاط $\overrightarrow{BC}$ تقع في نفس الجهة من AB اي ان Q,C في نفس الجهة من AB. وبالمثل بالنسبة الى P,C.

ومن مبرهنة ٢٧(جـ)، P و Q في جهة AB التي تحتوي C. من مبرهنة ٢٥، جهة المستقيم AB التي تحتوي C هي مجموعة محدبة، فان P-Q هي مجموعة جزئية من جهة المستقيم AB التي تحتوي C. وبما ان R في P-Q ، فان R في جهة المستقيم AB التي تحتوي C.

من الخطوات اعلاه، نستنتج ان R في داخل المثلث.

مبرهنة ٣٢

داخل مثلث هو مجموعة غير خالية.



شكل (٢٦)

البرهان

ليكن ABC مثلثا.

من بديهية ٩، توجد نقطة P بحيث ان A-P-B

وكذلك توجد نقطة Q بحيث A-Q-C.

من مبرهنة ٢، $P \neq Q$

من بديهية ٩، توجد نقطة R بحيث ان P-R-Q

$\longleftarrow$ $R \in P\text{-}Q$

من مبرهنة ٣١، P-Q هي مجموعة جزئية من داخل المثلث

$\longleftarrow$ R في داخل المثلث

لذا، فان داخل المثلث هو مجموعة غير خالية.

مبرهنة ٣٣ للعلاج

في المثلث ABC ، اذا كان A-D-B ، فان C-D مع داخل المثلث ACD وداخل المثلث BCD تكون تجزئة لداخل المثلث ABC.

البرهان

ليكن داخل $S = \Delta ABC$ ، داخل $S_1 = \Delta ABC$ داخل $\Delta BCD = S_2$. يجب ان نبرهن ان C-D مع S_1 و S_2 تكون تجزئة الى S.

يجب ان نبين لكل X في S ، فان X تنتمي الى واحدة وواحدة فقط من المجموعات C-D ، S_1 ، S_2

$X \in S$ $\longleftarrow$ X في جهة AB التي تحتوي C ،

X في جهة AC التي تحتوي B ، و

X في جهة BC التي تحتوي A .

بما ان A-D-B ، ومن بديهية ٦، $AB = AD = BD$

$\longleftarrow$ X في جهة AD التي تحتوي C وفي جهة BD التي

تحتوي C.
بما ان A-D-B و A على AC ، فانه من مبرهنة ٢٨(و)
X في جهة AC التي تحتوي D.
وبنفس الطريقة، X في جهة BC التي تحتوي D.
اما $X \in C\text{-}D$ او $X \notin C\text{-}D$

الحالة (١)

نفرض ان $X \in C\text{-}D$ ، ومن مبرهنة ١٣، $X \in CD$
ومن تعريف الفصل ومبرهنة ٢٠، X لاتقع في جهتي CD.
وبما ان A-D-B، فان A و B في جهتين متعاكستين من CD

$\longrightarrow$ X لاتقع في جهة CD التي تحتوي A.
ولاتقع في جهة CD التي تحتوي B.
$\longrightarrow$ $X \notin S_1$ و $X \notin S_2$
$\longrightarrow$ تنتمي X الى واحدة فقط من المجموعات:
$C\text{-}D$ ، S_1, S_2

الحالة (٢)

نفرض ان $X \notin C\text{-}D \longrightarrow$ اما $X \in CD$ او $X \notin CD$

(أ) نفرض ان $X \in CD$ ، ومن بديهية ٧،
اما X-C-D او C-D-X
اذا كان X-C-D وبما ان $C \in AC$ ، فان X و D في جهتين متعاكستين من AC
ومن مبرهنة ٢٨ (و)، B و D في نفس الجهة من AC
ومن مبرهنة ٢٧(أ)، B و X في جهتين متعاكستين من AC

اي ان X لاتقع في جهة AC التي تحتوي B

$\longleftarrow$ $X \notin S$ وهذا يناقض الفرض.

اذا كان C-D-X وبما ان $D \in AB$ ، فان X و C

في جهتين متعاكستين من AB.

$\longleftarrow$ X لاتقع في جهة AB التي تحتوي C

$\longleftarrow$ $X \notin S$ وهذا يناقض الفرض

(ب) نفرض $X \notin CD$

من مبرهنة ٢٠ $\longleftarrow$ تقع X في احدى جهتي CD

$\longleftarrow$ اما X في جهة CD التي تحتوي A او

في جهة CD التي تحتوي B.

نفرض ان X في جهة CD التي تحتوي A $\longleftarrow$

X لاتقع في جهة CD التي تحتوي B

$\longleftarrow$ $X \notin S_2$

ومن اعلاه، X في جهة AC التي تحتوي D و X

في جهة AD التي تحتوي C

$\longleftarrow$ $X \in S_1$

وبما ان $X \notin S_2$ و $X \notin C\text{-}D$ ، فان X تنتمي

الى واحدة فقط من المجموعات $C\text{-}D$, S_1, S_2.

اذا كانت X في جهة CD التي تحتوي B ، فان

X لاتقع في جهة CD التي تحتوي A ، اي ان

$X \notin S_1$.

ومن اعلاه، X في جهة BD التي تحتوي C

و X في جهة BC التي تحتوي D.

فان $X \in S_2$

وبما ان $X \notin C\text{-}D$ و $X \notin S_1$ ، فان X تنتمي

الى واحدة وواحدة فقط من المجموعات:

$C\text{-}D$ ، $S_1; S_2$

تعريف ١٤

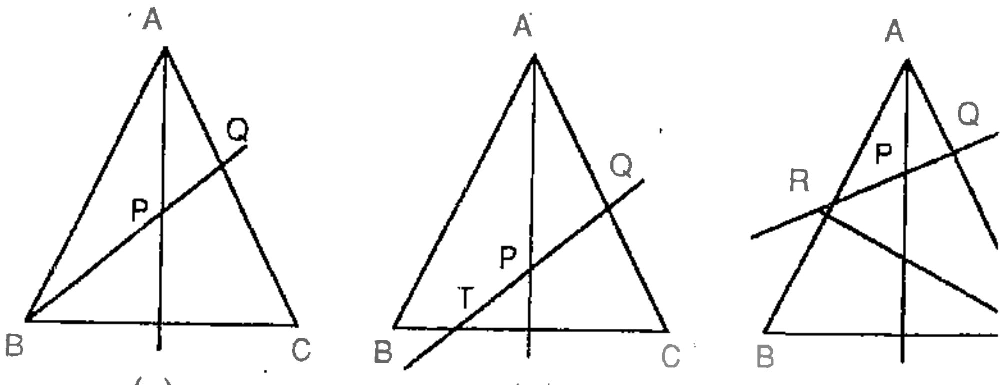
في اي مثلث، الضلع الذي لايحتوي احد رؤوس المثلث كنقطة نهايته يدعى الضلع المقابل لذلك الرأس. والراس يدعى الراس المقابل.

مبرهنة ٣٤

المستقيم الذي يمر براس مثلث ونقطة في داخل المثلث، فانه يقطع الضلع المقابل.

البرهان

ليكن m مستقيما يمر من راس A لمثلث ABC ، اي انه يقطع كلا الخطين AB و AC ، لذلك، من مبرهنة ٢، m لايمكن ان يقطعهما مرة ثانية. نفرض ان m يمر من نقطة P في داخل المثلث. نأخذ اي نقطة Q على A-C. فانه من بديهية باخ، اذا كان الخط PQ لايحتوي على راس، يقطع A-B او B-C.



(ج) (ب) (أ)

شكل (٢٧)

الحالة (١)   (شكل ٢٧(أ))

نفرض ان المستقيم QP يقطع A-B في نقطة R ، فانه من مبرهنة ٣٠، يكون Q-P-R. في المثلث QRC ، بما ان Q-P-R ، فانه تتحقق بديهية باخ، والخط AP طالما لايمكن ان يقطع المستقيم AC مرة ثانية، فانه يقطع R-C في نقطة، ولتكن S. اي ان R-S-C. مرة ثانية، في المثلث RBC تتحقق بديهية باخ، وبما ان الخط AS لايمكن ان يقطع الخط AB مرة ثانية، فانه يجب ان يقطع B-C.

الحالة (٢)   (شكل ٢٧(ب))

نفرض ان المستقيم QP يقطع B-C في نقطة T، فانه من مبرهنة ٣٠، يكون Q-P-T ، ومرة ثانية تتحقق بديهية باخ في المثلث QTC. بما ان AP لايمكن ان يقطع المستقيم AC مرة ثانية، فانه يجب ان يقطع T-C ، اي انه يقطع B-C.

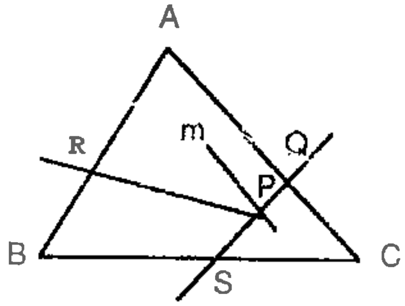
الحالة (٣)   (شكل ٢٧(ج))

نفرض ان الخط QP يحتوي على رأس؛ بما انه لايمكن ان يحتوي على A او C، لذلك فانه يحتوي على B. (يترك كتمرين لبيان ان Q-P-B.) بتطبيق بديهية باخ على المثلث QBC ، بطريقة مشابهة للبرهان اعلاه، نستنتج ان المستقيم AP يقطع B-C.

مبرهنة ٣٥ المثلث

المستقيم الذي يمر في نقطة داخل مثلث، لكنه

لايحتوي على راس من المثلث، يقطع في الاقل احد الاضلاع.



شكل (٢٨)

البرهان

لتكن P نقطة في داخل مثلث ABC ، وليكن m مستقيما يمر من P. نأخذ اية نقطة على ضلع، ولتكن Q في A-C ، اذا كان m يحتوي على Q، فان هذا يؤدي الى النتيجة. اذا كان m لايحتوي على Q، نأخذ الخط QP. من بديهية باخ اذا كان الخط QP لايحتوي على B، فانه اما يقطع A-B او يقطع B-C. اذا كان الخط QP يقطع A-B في نقطة، ولتكن R، فانه يتكون مثلث ARQ ؛ اذا كان QP يقطع B-C في نقطة، ولتكن S، فانه يتكون مثلث QSC.

يستنتج من مبرهنة ٣٠ ان Q-P-R ، وفي الحالة الاخرى يكون Q-P-S. لذلك فانه في اي حالة، تطبق بديهية باخ، و m يقطع اما A-R او A-Q في المثلث ARQ ، او S-C او Q-C في المثلث QBC. لذلك، في اي حالة، يقطع احد اضلاع المثلث ABC. اخيرا، اذا كان المستقيم QP يحتوي على B، فان Q-P-B (لاحظ الاسئلة ادناه) وبهذا نتوصل الى النتيجة.

تمارين ٤-٦

١- برهن على انه اذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ، فان $A = C$

٢- برهن على ان $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$

٣- برهن على ان كلا من المجموعات التالية محدبة :
ϕ ، $\{A\}$ ، مجموعة كل النقاط (المستوي)

٤- برهن او ادحض كلا مما يلي:

أ) $A-B = C-D$ اذا وفقط اذا $A = C$ او $A = D$

ب) نهايتا القطعة وحيدتان.

جـ) اذا كانت A, B نقطتين مختلفتين، فان $\{A, B\}$ هي مجموعة محدبة.

د) اتحاد مجموعتين محدبتين هي مجموعة محدبة.

هـ) مجموعة جزئية من مجموعة محدبة تكون مجموعة محدبة.

٥- برهن على انه اذا كان مستقيم يمر من نقطة داخلية لمثلث ونقطة على ضلع من المثلث، ولايقطع اي من الضلعين الاخرين، فانه يمر بالرأس المقابل.

٦- برهن على انه في مثلث ABC ،اذا كان A-D-B ، و B-E-C فان نقطة تقاطع A-E و C-D تقع في داخل المثلث.

٧- برهن على ان نقطة تقع في داخل مثلث اذا وفقط اذا تقع بين رأس ونقطة على الضلع المقابل.

٤-٧ الزوايا

تعريف ١٥

ليكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ شعاعين مختلفين لايقعان على مستقيم واحد ولهما نقطة بداية مشتركة A، اتحاد الشعاعين مع نقطة البداية يدعى زاوية.
الشعاعان هما ضلعي الزاوية. المستقيم الذي يحتوي الضلع يدعى خط الضلع. نقطة البداية تدعى الرأس.

رمز

يرمز للزاوية التي هي اتحاد الشعاعين AB و AC بالرمز:

$\angle BAC$ او $\angle CAB$

او للتبسيط $\angle A$

مبرهنة ٣٦

ليكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ شعاعين لايقعان على مستقيم واحد وان 'B على $\overrightarrow{AB}$ و 'C على $\overrightarrow{AC}$ فان

$$\angle BAC = \angle BAC' = \angle B'AC = \angle B'AC'$$

البرهان

تبرهن من تعريف ١٥ ومبرهنة ٢٨(ز).

قاعدة لغوية

زاوية مثلث هي الزاوية التي يكون رأسها هو رأس في المثلث وقطعتي المثلث التي يكون الرأس كنقطة نهايتهما كمجموعتين جزئيتين من ضلعيها.
ضلع مقابل لزاوية هو ضلع المثلث الذي لايكون رأس الزاوية كنقطة نهاية. هذا يعني، مثلا الضلع المقابل للزاوية BAC هو نفس الضلع المقابل للرأس A.

تعريف ١٦

داخل زاوية CAB هو تقاطع جهة الشعاع AC التي تحتوي B وجهة الشعاع AB التي تحتوي C.
خارج زاوية هو مجموعة كل النقاط التي لاتقع في داخل الزاوية ولا على الزاوية.
عندما نتكلم عن جهة شعاع او جهة قطعة، فمن الواضح نقصد احدى جهتي المستقيم الذي يحتوي الشعاع او القطعة.

مبرهنة ٣٧

للزاوية يوجد رأس واحد فقط.

البرهان

يستنتج مباشرة من تعريف الزاوية ومن مبرهنة ٢٨ (جـ)

مبرهنة ٣٨

داخل زاوية هو مجموعة غير خالية.

البرهان

بما ان داخل مثلث هو مجموعة جزئية من داخل زاوية، ومن مبرهنة ٣٢؛ داخل المثلث هو مجموعة غير خالية، فان داخل الزاوية هو مجموعة غير خالية.

مبرهنة ٣٩

داخل زاوية هو مجموعة محدبة.

البرهان

لتكن $\angle BAC$ زاوية

داخل $\angle BAC$ هو تقاطع جهة $\overleftrightarrow{AB}$ التي تحتوي C وجهة $\overleftrightarrow{AC}$ التي تحتوي B.

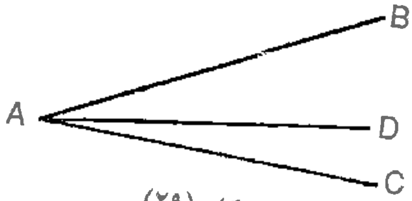
من مبرهنة ٢٥، جهة المستقيم هي مجموعة محدبة

ومن مبرهنة ٢٦، تقاطع n من المجموعات المحدبة، $n = 2$، هو مجموعة محدبة.

$\longleftarrow$ داخل $\angle BAC$ هو مجموعة محدبة.

مبرهنة ٤٠

اذا كانت D نقطة في داخل $\angle BAC$ ، فان كل نقطة على الشعاع $\overrightarrow{AD}$ تقع في داخل $\angle BAC$.



شكل (٢٩)

البرهان

بما ان D في داخل $\angle BAC$ ، فان D لاتقع على AB ولاتقع على $\overrightarrow{AC}$.

لذا فان AD لايقع على AB او على AC وبما ان نقطة بدايته A تقع على AB ، فانه من مبرهنة ٢٨(و) كل نقاط $\overrightarrow{AD}$ تقع في نفس الجهة من AB

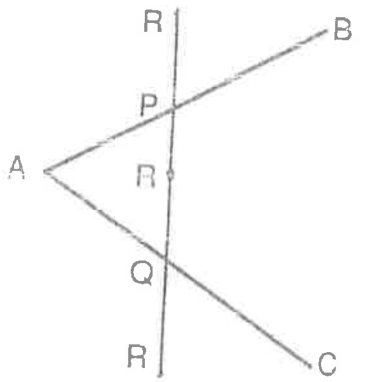
وبما ان D في جهة AB التي تحتوي C، فان كل نقاط $\overrightarrow{AD}$ تقع في جهة AB التي تحتوي C.

بما ان نقطة بداية $\overrightarrow{AD}$ تقع على AC، فانه من مبرهنة ٢٨(و) كل نقاط AD تقع في نفس الجهة من AC.

وبما ان D تقع في جهة AC التي تحتوي B، فان كل نقاط $\overrightarrow{AD}$ تقع في جهة AC التي تحتوي B، لذا، فانه من تعريف داخل زاوية كل نقاط الشعاع AD تقع في داخل الزاوية.

مبرهنة ٤١ الملاحي

اذا كانت P, Q نقطتين على ضلعي زاوية، و R نقطة على الخط PQ وفي داخل الزاوية، فان P-R-Q



شكل (٣٠)

البرهان

لتكن $\angle BAC$ زاوية، وفيها $P \in \overrightarrow{AB}$ و $Q \in \overrightarrow{AC}$ وان $R \in PQ$ و R في داخل $\angle BAC$. يجب ان نبرهن P-R-Q.

R في داخل $\angle BAC$ ، و P و Q على ضلعي $\angle BAC$ فان النقاط P, Q, R مختلفة وبما انها تقع على مستقيم واحد فمن بديهية ٧، تتحقق واحدة فقط ممايلي:

P-R-Q ، P-Q-R ، R-P-Q

نفرض ان R-P-Q.

بما ان $P \in \overrightarrow{AB}$ ، فان R و Q في جهتين متعاكستين من AB.

بما ان $\overrightarrow{AC}$ لايقع على AB لكن نقطة بدايته A تقع على AB ، فانه من مبرهنة ٢٨(و)، كل نقاط $\overrightarrow{AC}$ تقع في نفس الجهة من AB

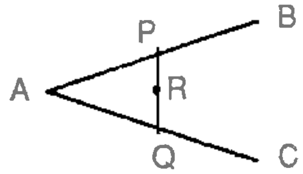
بما ان $Q, C \in \overrightarrow{AC}$ ، فان Q, C في نفس الجهة من AB ومن مبرهنة ٢٧(أ)، فان R, C في جهتين متعاكستين من AB ، اي ان R لاتقع في جهة AB التي تحتوي C وهذا يؤدي الى ان R لاتقع في داخل $\angle BAC$ وبذلك يناقض

الفرض.

وبنفس الطريقة، نتوصل الى تناقض اذا فرضنا ان P-Q-R. لذا فان P-R-Q تتحقق.

مبرهنة ٤٢

اذا كانت P, Q نقطتين على ضلعي زاوية، فان P-Q هي مجموعة جزئية من داخل الزاوية.



شكل (٣١)

البرهان

لتكن $\angle BAC$ زاوية، ولتكن $P \in \overrightarrow{AB}$ و $Q \in \overrightarrow{AC}$. يجب ان نبرهن ان P-Q هي مجموعة جزئية من داخل $\angle BAC$

لتكن $R \in P\text{-}Q \longleftarrow P\text{-}R\text{-}Q$

$\longleftarrow R, Q \in \overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{PQ}$ لايقع على $\overleftrightarrow{AB}$ و $P \in AB$، من مبرهنة ٢٨(و)، كل نقاط PQ تقع في نفس الجهة من AB.

اي ان R, Q في نفس الجهة من AB = AP.

اي ان R تقع في جهة AP التي تحتوي Q.

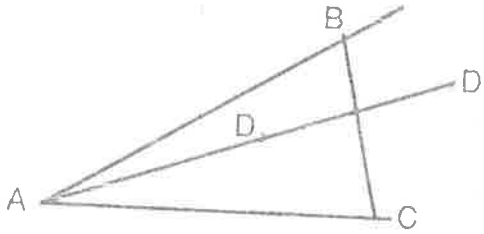
وبنفس الطريقة نبرهن ان R تقع في جهة AQ التي تحتوي P.

من تعريف داخل زاوية، تقع R في داخل $\angle PAQ$ ومن مبرهنة ٣٦، $\angle PAQ = \angle BAC$

لذا فان R تقع في داخل $\angle BAC$.

مبرهنة ٤٣ المقلاع

اذا كانت D نقطة في داخل $\angle BAC$ فان $\overrightarrow{AD}$ يقطع B-C.



شكل (٣٢)

البرهان

D في داخل $\angle BAC$ $\longleftarrow$

D في جهة AB التي تحتوي C وفي جهة AC التي تحتوي B
اما D تقع على المستقيم BC او لاتقع.

(١) نفرض ان $D \in BC$ وبما ان B, C على ضلعي $\angle BAC$ و D في داخل الزاوية، فانه من مبرهنة ٤١، B-D-C
اي ان $\overrightarrow{AD}$ يقطع B-C.

(٢) نفرض ان D لاتقع على BC.
من مبرهنة ٢٠ وتعريف الفصل، تقع D في جهة BC التي تحتوي A او في جهة BC التي لاتحتوي A.

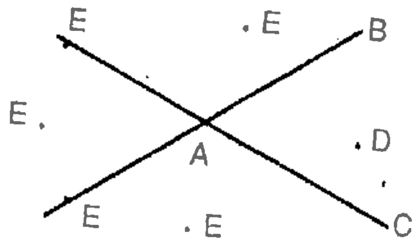
(أ) نفرض ان D تقع في جهة BC التي تحتوي A وبما ان D تقع في جهة AB التي تحتوي C.
وفي جهة AC التي تحتوي B، فان D تقع في

داخل ΔABC لذا فان $\overrightarrow{AD}$ يقطع $B-C$ (لماذا؟).

(ب) نفرض ان D تقع في جهة BC التي لاتحتوي A.
اي ان A, D في جهتين متعاكستين من BC.
من تعريف الفصل ومبرهنة ٢٠، توجد نقطة H
على BC بحيث ان $A-H-D \longrightarrow H \in \overrightarrow{AD}$
ومن مبرهنة ٤٠، $\longrightarrow$ H في داخل $\angle BAC$
بما ان $H \in BC$ وفي داخل $\angle BAC$ فانه من
مبرهنة ٤١، يكون $B-H-C \longrightarrow H \in B-C$
وبما ان $H \in \overrightarrow{AD}$ ، فان $\overrightarrow{AD}$ يقطع $B-C$.

مبرهنة ٤٤ المعلاج

اذا كانت D نقطة في داخل $\angle BAC$ ، و E اية نقطة في خارج الزاوية، فان القطعة $D-E$ تقطع الزاوية.



شكل (٣٣)

البرهان

D في داخل $\angle BAC$ ، فان D تقع في جهة $\overrightarrow{AB}$ التي تحتوي C وفي جهة $\overrightarrow{AC}$ التي تحتوي B.
E تقع في خارج الزاوية، فان E لاتقع في داخل الزاوية ولاعلى الزاوية.
توجد عدة حالات تؤخذ بنظر الاعتبار:
(١) تقع E على الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AB}$
(٢) تقع E على الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AC}$

(٣) تقع E في جهة المستقيم AB التي لاتحتوي C
(٤) تقع E في جهة المستقيم AC التي لاتحتوي B.

الحالة (١)

نفرض ان E تقع على الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AB}$، اي ان E-A-B. وهذا يؤدي الى ان E و B في جهتين متعاكستين من $\overleftrightarrow{AC}$، وبما ان D في جهة $\overleftrightarrow{AC}$ التي تحتوي B، فانه من مبرهنة ٢٧(أ)، D, E في جهتين متعاكستين من $\overleftrightarrow{AC}$. من مبرهنة ٢٠ وتعريف الفصل، توجد نقطة H على $\overrightarrow{AC}$ بحيث ان D-H-E.

وبهذا، فان D-E تقطع BAC ∠.

الحالة (٢)

تبرهن بنفس طريقة الحالة (١)

الحالة (٣)

تقع E في جهة المستقيم AB التي لاتحتوي C. وبما ان D تقع في جهة AB التي تحتوي C، فان D, E في جهتين متعاكستين من AB. من مبرهنة ٢٠ وتعريف الفصل، توجد نقطة H على AB بحيث ان D-H-E.

$H \in AB \longrightarrow H \in \overrightarrow{AB}$ ، $H = A$ او H على الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AB}$.

اذا كان $H \in \overrightarrow{AB}$ ، فان D-E تقطع الزاوية.

اذا كان $H = A$ ، فان D-E تقطع الزاوية.

اذا كان H تقع على الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AB}$، فان H-A-B.

ومنه نستنتج ان B و H في جهتين متعاكستين من $\overrightarrow{AC}$ ، وبما ان D في جهة $\overrightarrow{AC}$ التي تحتوي B، فانه من مبرهنة ٢٧(أ)، D, H في جهتين متعاكستين من $\overrightarrow{AC}$. من تعريف الفصل، ومبرهنة ٢٠، توجد نقطة R على AC بحيث ان D-R-H.

D-R-H ، وبما ان D-H-E ، فان من مبرهنة ٤، يكون

D-R-H-E ⟵ D-R-E

⟵ R ∈ D-E ، وبما ان $R \in \overrightarrow{AC}$

⟵ D-E تقطع الزاوية.

الحالة (٤)

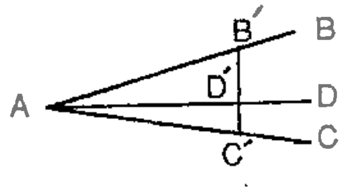
تبرهن بنفس طريقة الحالة (٣).

تعريف ١٧

لتكن BAC زاوية متكونة من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$، فان $\overrightarrow{AD}$ يكون بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ اذا وفقط اذا AD في داخل $\angle BAC$.

مبرهنة ٤٥

الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يكون بين شعاعين آخرين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ اذا وفقط اذا توجد نقاط B' على $\overrightarrow{AB}$ ، C' على $\overrightarrow{AC}$ ، و D' على $\overrightarrow{AD}$ ، بحيث ان B'-D'-C'.



شكل (٣٤)

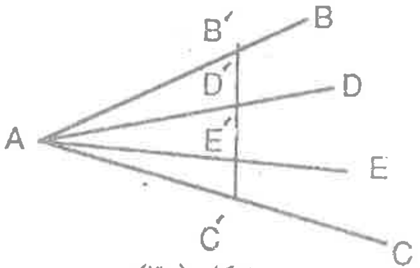
البرهان

(١) نفرض ان $\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$
من تعريف ١٧، $\overrightarrow{AD}$ يقع في داخل $\angle BAC$
من بديهية ٩، توجد نقطة B' على $\overrightarrow{AB}$ وتوجد نقطة C' على $\overrightarrow{AC}$
من مبرهنة ٣٦ ⟵ $\angle BAC = \angle B'AC'$
⟵ $\overrightarrow{AD}$ في داخل $\angle B'AC'$.
من مبرهنة ٤٣ ⟵ $\overrightarrow{AD}$ يقطع $B'-C'$ في نقطة D'
⟵ $B'-D'-C'$

(٢) نفرض انه توجد نقاط $B' \in \overrightarrow{AB}$، $C' \in \overrightarrow{AC}$، و $D' \in \overrightarrow{AD}$ بحيث ان $B'-D'-C'$.
من مبرهنة ٤٢ ⟵ D' تقع في داخل $\angle BAC$. وبما ان $D' \in \overrightarrow{AD}$، فانه من مبرهنة ٤٠، كل نقاط $\overrightarrow{AD}$ تقع في داخل $\angle BAC$.
من تعريف ١٧ ⟵ $\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

مبرهنة ٤٦ للاطلاع

(أ) اذا كان $\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$، وان $\overrightarrow{AE}$ يقع بين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$، فان $\overrightarrow{AE}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.
(ب) اذا كان $\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$، وان $\overrightarrow{AC}$ يقع بين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AE}$ (حيث ان E تقع في جهة $\overleftrightarrow{AB}$ التي تحتوي D)، فان $\overrightarrow{AC}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AE}$.

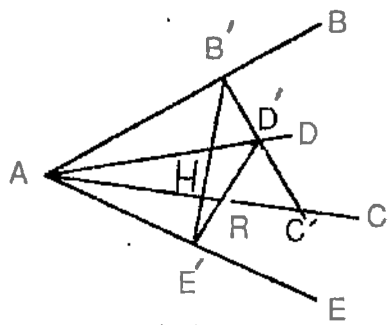


شكل (٣٥)

برهان (أ) شكل (٣٥)

$\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، فانه من مبرهنة ٤٥، توجد نقاط $B' \in \overrightarrow{AB}$ ، $C' \in \overrightarrow{AC}$ ، $D' \in \overrightarrow{AD}$ بحيث ان $B'-D'-C'$
من مبرهنة ٣٦ $\longleftarrow$ $\angle DAC = \angle D'AC'$.

$\overrightarrow{AE}$ يقع بين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$.
ومن تعريف ١٧، فان $\overrightarrow{AE}$ في داخل $\angle DAC$ $\longleftarrow$ $\overrightarrow{AE}$ في داخل $\angle D'AC'$.
من مبرهنة ٤٣ $\longleftarrow$ $\overrightarrow{AE}$ يقطع $D'-C'$ في نقطة E'
$\longleftarrow$ $D'-E'-C'$
$D'-E'-C'$ وبما ان $B'-D'-C'$ ، فانه من مبرهنة ٤٤، يكون $B'-D'-E'-C'$ $\longleftarrow$ $B'-E'-C'$.
$B'-E'-C'$ وبما ان $B' \in \overrightarrow{AB}$ ، $E' \in \overrightarrow{AE}$ ، و $C' \in \overrightarrow{AC}$
ومن مبرهنة ٤٥، $\overrightarrow{AE}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.



شكل (٣٦)

برهان (ب) (شكل ٣٦)

$\overrightarrow{AD}$، يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

من مبرهنة ٤٥ ⟵ توجد نقاط $D' \in \overrightarrow{AD}$ ، $B' \in \overrightarrow{AB}$ ، و $C' \in \overrightarrow{AC}$ بحيث ان $B'-D'-C'$.

من بديهية ٩ ⟵ توجد نقطة E' على $\overrightarrow{AE}$.

AC يقع بين AD و AE ، ومن تعريف ١٧، ⟵ $\overrightarrow{AC}$ يقع في داخل $\angle DAE$.

وبما ان $D' \in AD$ و $E' \in AE$ ، فانه من مبرهنة ٣٦، $\angle DAE = \angle D'AE'$

⟵ AC يقع في داخل $\angle D'AE'$

من مبرهنة ٤٣ ⟵ $\overrightarrow{AC}$ يقطع $D'E'$ في $R \in D'E'$.

⟵ $D'-R-E'$ و $R \in AC$

⟵ E' و D' في جهتين متعاكستين من $\overrightarrow{AC}$.

$B'-D'-C'$ ⟵ $B', D' \in \overrightarrow{C'B'}$

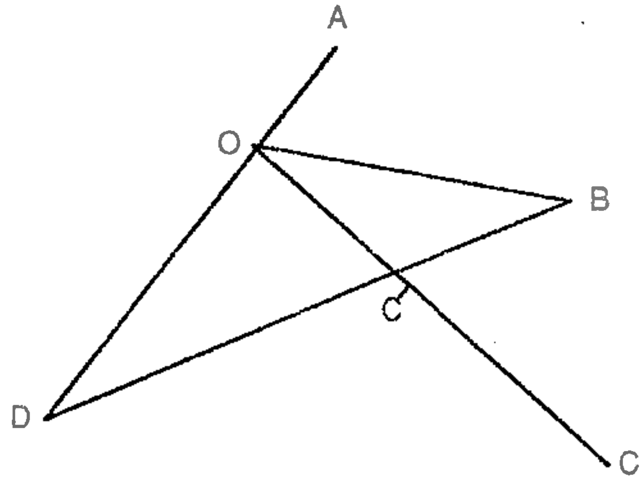
بما ان $C'B'$ لايقع على AC ، لكن نقطة بدايته C' تقع على AC، فانه من مبرهنة ٢٨(و)، كل نقاط $\overrightarrow{C'B'}$ تقع في نفس الجهة من AC. لذا فان B', D' تقعان في نفس الجهة من AC.

من مبرهنة ٢٧(أ) ⟵ B', E' في جهتين متعاكستين من AC. من تعريف الفصل ومبرهنة ٢٠ ⟵ توجد نقطة H على AC بحيث ان $E'-H-B'$ وبما ان $E' \in \overrightarrow{AE}$، $B' \in \overrightarrow{AB}$ و $H \in \overrightarrow{AC}$

فان من مبرهنة ٤٥ ⟵ $\overrightarrow{AC}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AE}$.

مبرهنة ٤٧

اذا كان $\overrightarrow{OB}$ يقع بين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OC}$، وان $\overrightarrow{OD}$ هو الشعاع المعاكس للشعاع OA، فان OC يقع بين OB و $\overrightarrow{OD}$.



شكل (٣٧)

البرهان

$\overrightarrow{OB}$ يقع بين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OC}$، من تعريف ١٧ ⟵ $\overrightarrow{OB}$ في داخل $\angle AOC$ ⟵ B في جهة $\overleftrightarrow{OC}$ التي تحتوي A.

بما ان OA و $\overrightarrow{OD}$ شعاعين متعاكسين، و O هي نقطة بداية $\overrightarrow{OC}$ ، فان A و D في جهتين متعاكستين من $\overleftrightarrow{OC}$.

من مبرهنة ٢٧(أ) ⟵ D, B في جهتين متعاكستين من $\overleftrightarrow{OC}$. من تعريف الفصل ومبرهنة ٢٠ ⟵ توجد نقطة C' على $\overleftrightarrow{OC}$ بحيث ان D-C'-B.

من مبرهنة ٤٥ ⟵ $\overrightarrow{OC}$ يقع بين $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OD}$.

تمارين ٤-٧

١- في $\angle BAC$ حيث A-D-B و A-C-E ، برهن ان D-E و B-C تتقاطعان.

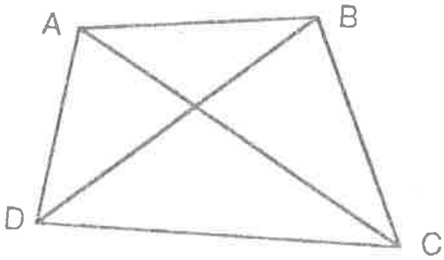
٢- لتكن A, B, C ثلاث نقاط لاتقع على مستقيم واحد والنقاط D, E, F بحيث ان B-C-D ، A-E-C، و B-E-F. برهن ان F تقع في داخل $\angle ACD$.

٣- اذا كان $\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، فانه من الخطأ اما $\overrightarrow{AB}$ يقع بين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ او ان $\overrightarrow{AC}$ يقع بين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}$.

٤- اذا كان $\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وان $\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AC'}$ هما الشعاعين المعاكسين للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، على التوالي، فان $\overrightarrow{AD'}$ ، الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AD}$ ، يقع بين $\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AC'}$.

٤-٨ رباعي الاضلاع المحدب Convex Quadrilateral

تعريف ١٨



شكل (٣٨)

لتكن A, B, C, D اربع نقاط مختلفة لايوجد اي ثلاث منها على مستقيم واحد، اتحاد النقاط الاربع مع القطع الاربع A-B ، B-C ، C-D ، و D-A يدعى رباعي اضلاع. النقاط تدعى الرؤوس، القطع تدعى الاضلاع، الخطوط التي تحتوي الاضلاع تدعى خطوط الاضلاع.

ضلعان لهما نقطة نهاية مشتركة يدعيان متجاورين، ضلعان غير متجاورين يدعيان متقابلين.

زاوية رباعي اضلاع هي الزاوية التي تحتوي على راس وضلعين متجاورين.

زاويتان لرباعي اضلاع تكونان متجاورتين اذا

اشتركتا بضلع، زاويتان غير متجاورتين تكونان متقابلتين.
رأسا الزاويتين المتجاورتين يدعيان راسين متجاورين، رأسين غير متجاورين يدعيان رأسين متقابلين.
القطعة الواصلة بين رأسين متقابلين تدعى قطر.

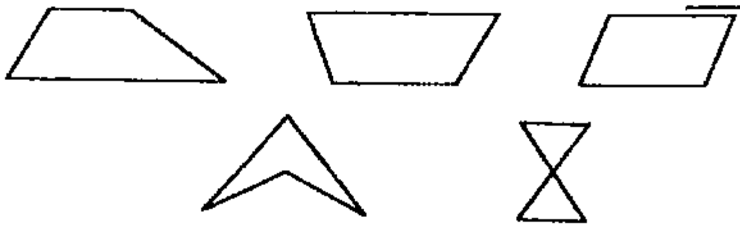
تعريف ١٩

اذا لم يتقاطع ضلعان في رباعي اضلاع، فانه يدعى بسيط (a simple).

تعريف ٢٠

(أ)

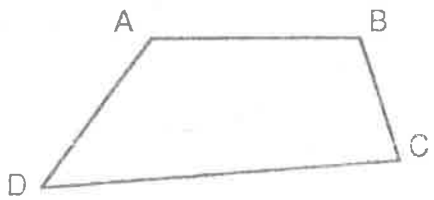
(ب)



شكل (٣٩)

اذا كان لاي رأسين متجاورين لرباعي اضلاع، الرأسان اللذان لايقعان على خط الضلع للرأسين المتجاورين يكونان في نفس الجهة من خط الضلع، فان رباعي الاضلاع يدعى رباعي اضلاع محدب.
اي انه عندما نتكلم عن رباعي اضلاع محدب نقصد الاشكال المبينة في الشكل (أ) ادناه بدلا من تلك الاشكال المبينة في الشكل (ب).

تعريف ٢١



شكل (٤٠)

ان داخل رباعي الاضلاع المحدب هو تقاطع كل انصاف المستوي المتعينة من خطوط الاضلاع والتي تحتوي على الرؤوس التي لاتقع على خطوط الاضلاع.

هكذا، اذا كان ABCD رباعي اضلاع محدب كما في الشكل فان داخله هو تقاطع:

١- نصف المستوي المتعين من AD الذي يحتوي C، B.

٢- نصف المستوي المتعين من AB الذي يحتوي D، C.

٣- نصف المستوي المتعين من BC الذي يحتوي D، A.

٤- نصف المستوي المتعين من DC الذي يحتوي A، B.

مبرهنة ٤٨

داخل رباعي اضلاع محدب يكون مجموعة محدبة

البرهان

ص ١١٤

يترك كتمرين.

هذه المبرهنة لاتصح اذا كان رباعي الاضلاع غير محدب.

مبرهنة ٤٩

يقطع قطرا رباعي اضلاع محدب احدهما الاخر.

البرهان

يترك كتمرين.

تمارين ٤-٨

١- برهن ان رباعي الاضلاع يكون محدبا اذا وفقط اذا كان قطريه يتقاطعان.
٢- برهن ان خطا يقطع ضلعا واحدا من رباعي اضلاع ولايمر باي رأس، فانه يقطع ضلعا ثانيا.
٣- برهن اذا كان خط يقطع ثلاثة اضلاع من رباعي اضلاع، فانه يقطع الرابع.

الفصل الخامس
التطابق والمقارنة
Congruence and Comparison

٥-١ بديهيات عن تطابق القطع

لقد ذكرنا سابقا ان التطابق هو علاقة اولية تقنية.

فيقال ان شكلا يطابق شكلا آخر.

ويرمز لهذا بالرمز $\cong$

فمثلا، "A-B تطابق C-D" يرمز لها:

$$A-B \cong C-D$$

مجموعة البديهيات

بما ان التطابق هو علاقة اولية، يجب ان نقدم بديهيات لتعطينا خواص هذه العلاقة.

بديهية ١١ (بديهية انشاء قطعة)

لتكن A-B قطعة و C نقطة على خط m، فانه على كل شعاع على m نقطة بدايته C توجد نقطة واحدة فقط D بحيث ان $A-B \cong C-D$

بديهية ١٢

تطابق القطع هو علاقة تكافؤ.

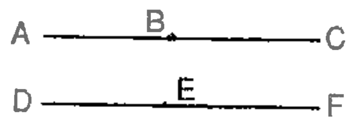
نستنتج من هذه البديهية ان كل قطعة تطابق نفسها، واذا كانت قطعة واحدة تطابق قطعة ثانية، فان

الثانية تطابق الاولى، واذا كانت قطعة واحدة تطابق قطعة ثانية، والقطعة الثانية تطابق قطعة ثالثة، فان الاولى تطابق الثالثة.

بديهية ١٣ (جمع القطع)

اذا كان (أ) $A-B-C$ ، (ب) $D-E-F$ ،
(جـ) $A-B \cong D-E$ و (ء) $B-C \cong E-F$ فان $A-C \cong D-F$.

مبرهنة ٥. (طرح القطع)



شكل (٤١)

اذا كان (أ) $A-B-C$ ، (ب) $D-E-F$ ،
(جـ) $A-B \cong D-E$ و (ء) $A-C \cong D-F$ فان $B-C \cong E-F$

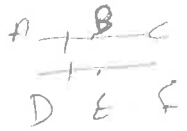
البرهان

نفرض ان $B-C$ لاتطابق $E-F$. فانه من بديهية ١١، توجد نقطة G بحيث ان $D-E-G$ و $B-C \cong E-G$. كذلك بما ان $B-C$ لاتطابق $E-F$ ، فانه من بديهية ١٢، نستنتج ان $E-F$ لاتطابق $E-G$ ، ومن هذا $F \neq G$.
لكن بما ان $A-B \cong D-E$ و $B-C \cong E-G$ ، فانه من بديهية ١٣ $A-C \cong D-G$. ولكن من الفرض $A-C \cong D-F$ فيكون من بديهية ١٢، $D-G \cong D-F$ ، ومن البديهيتين ١١ و ١٢ نستنتج ان $F = G$.
وهذا يقودنا الى تناقض. لذلك، فان فرضيتنا خاطئة.

وبذلك نستنتج ان B-C ≅ E-F.

مبرهنة ٥١

اذا كان A-C ≅ D-F و B نقطة بحيث ان A-B-C ،
فانه توجد ونقطة E بحيث ان D-E-F و A-B ≅ D-E.



البرهان

يترك كتمرين.

٥-١ تمارين

١- اذا كان A-B ≅ A-C ، هل ان B = C؟ ولماذا؟
٢- اذا كان A-B لاتطابق A-C، برهن ان B ≠ C.

٥-٢ مقارنة القطع

تعريف ٢٢

A-B تكون اصغر من C-D اذا وفقط اذا توجد نقطة E بحيث ان C-E-D و A-B ≅ C-E.

رمز

يرمز للعبارة "A-B اصغر من C-D" بالرمز
A-B < C-D
نبرهن الان بعض المبرهنات المعروفة حول العلاقة "اصغر من".

مبرهنة ٥٢

اذا كانت A-B و C-D اي قطعتين، فانه تتحقق واحدة فقط ممايلي:

$$A\text{-}B < C\text{-}D \quad \text{و} \quad A\text{-}B \cong C\text{-}D, \quad C\text{-}D < A\text{-}B$$

البرهان

يترك كتمرين.

مبرهنة ٥٣

اذا كان $C\text{-}D > A\text{-}B$ و $A\text{-}B \cong E\text{-}F$ فان $E\text{-}F < C\text{-}D$

البرهان

بما ان $A\text{-}B < C\text{-}D$ ، فانه توجد نقطة G بحيث ان C-G-D و $A\text{-}B \cong C\text{-}G$ ، بما انه من الفرض $A\text{-}B \cong E\text{-}F$ ، فانه من بديهية ١٢، $E\text{-}F \cong C\text{-}G$. لذلك من تعريف ٣٢، يكون $E\text{-}F < C\text{-}D$.

مبرهنة ٥٤

اذا كان $A\text{-}B < C\text{-}D$ و $C\text{-}D \cong E\text{-}F$ ، فان $A\text{-}B < E\text{-}F$.

البرهان

من تعريف ٣٢، توجد نقطة G بحيث ان C-G-D ، و $A\text{-}B \cong C\text{-}G$ من مبرهنة ٥١، توجد نقطة H بحيث ان

$E\text{-}H\text{-}F$ ، و $E\text{-}H \cong C\text{-}G$ بمـا ان $A\text{-}B \cong C\text{-}G$ فانه من بديهية ١٢، $A\text{-}B \cong E\text{-}H$ ، لذلك، فان $A\text{-}B < E\text{-}F$.

مبرهنة ٥٥ هل ان اثبت ان الاصغر من للقطع هو علاقة متعدية ، برهن ذلك

اذا كان $A\text{-}B < C\text{-}D$ و $C\text{-}D < E\text{-}F$ فان $A\text{-}B < E\text{-}F$.

البرهان

بما ان $A\text{-}B < C\text{-}D$ ، فانه توجد نقطة G بحيث ان $C\text{-}G\text{-}D$ و $A\text{-}B \cong C\text{-}G$. بما ان $C\text{-}D < E\text{-}F$ ، فانه توجد نقطة H بحيث ان $E\text{-}H\text{-}F$ و $C\text{-}D \cong E\text{-}H$.
ومن مبرهنة ٥٤، نستنتج ان $A\text{-}B < E\text{-}H$. لذلك توجد نقطة I بحيث ان $E\text{-}I\text{-}H$ و $A\text{-}B \cong E\text{-}I$.
بما ان $E\text{-}H\text{-}F$ و $E\text{-}I\text{-}H$ ، فانه من مبرهنة ٤، $E\text{-}I\text{-}H\text{-}F$.
لذلك، $E\text{-}I\text{-}F$ ، وبذلك يكون $A\text{-}B < E\text{-}F$.

٥-٢ تمارين

١- برهن اذا كان $A\text{-}B\text{-}C$ ، فان $A\text{-}B < A\text{-}C$.
٢- برهن اذا كان $A\text{-}B\text{-}C\text{-}D$ ، فان $A\text{-}B < A\text{-}D$.

٥-٣ تطابق الزوايا والمثلثات

مجموعة البديهيات

بديهية ١٤ (بديهية انشاء زاوية)

لتكن BAC زاوية وليكن DF شعاعا على خط m، فانه في كل جهة من m يوجد شعاع واحد فقط DE بحيث

$\angle BAC \doteq \angle EDF$.

بديهية ١٥

تطابق الزوايا هو علاقة تكافؤ.

بديهية ١٦

في مثلثين ABC و DEF ، اذا كان $A-B \doteq D-E$ ، $A-C \doteq D-F$ و $\angle A \doteq \angle D$ ، فان $\angle B \doteq \angle E$ و $\angle C \doteq \angle F$.

ان هذه البديهية تنص على انه عندما ضلعان والزاوية المحددة بهما في مثلث تطابق على التوالي ضلعين والزاوية المحددة بهما من مثلث آخر، فان الزوايا الباقية متطابقة. ماهو الفرق بين هذه البديهية ومبرهنة اقليدس الرابعة؟ المبرهنة تنص على ان تحت نفس الفرض، فان المثلثين يتطابقان. لذا نحتاج الى تعريف تطابق مثلثين.
كمثال ناخذ المثلثين ABC و DEF توجد ستة طرق مختلفة لوضع تناظر متباين بين رؤوسهما، وكمايلي :

١- $C \leftrightarrow F$ ، $B \leftrightarrow E$ ، $A \leftrightarrow D$

٢- $C \leftrightarrow E$ ، $B \leftrightarrow F$ ، $A \leftrightarrow D$

٣- $C \leftrightarrow F$ ، $B \leftrightarrow D$ ، $A \leftrightarrow E$

٤- $C \leftrightarrow D$ ، $B \leftrightarrow F$ ، $A \leftrightarrow E$

٥- $C \leftrightarrow E$ ، $B \leftrightarrow D$ ، $A \leftrightarrow F$

٦- $C \leftrightarrow D$ ، $B \leftrightarrow E$ ، $A \leftrightarrow F$

كذلك، بما ان رؤوس المثلث تعين الاضلاع، فان

اي تناظر بين رؤوس مثلثين يؤدي الى تناظر بين الاضلاع، وبما ان للزاوية رأس وحيد، فان اي تناظر بين الرؤوس يؤدي الى تناظر بين الزوايا.

رمز تعريف رمز التناظر للمثلثين

بالرمز $\Delta ABC - \Delta DEF$ نعني التناظر التالي :

$A-B \leftrightarrow D-E$	$\angle A \leftrightarrow \angle D$	$A \leftrightarrow D$
$B-C \leftrightarrow E-F$	$\angle B \leftrightarrow \angle E$	$B \leftrightarrow E$
$A-C \leftrightarrow D-F$	$\angle C \leftrightarrow \angle F$	$C \leftrightarrow F$

تعريف ٢٣ تعريف التطابق او تناظر متطابق

ليكن ABC و DEF مثلثين، اذا وجد على الاقل تناظر واحد $\Delta ABC - \Delta XYZ$ ، حيث ان X, Y, Z هي D, E, F في ترتيب ما ، بحيث ان

$$\angle A \cong \angle X \qquad A-B \cong X-Y$$
$$\angle B \cong \angle Y \qquad B-C \cong Y-Z$$
$$\angle C \cong \angle Z \qquad A-C \cong X-Z$$

فان هذا التناظر يدعى تناظر متطابق. ويقال عن المثلثين متطابقان.

رمز

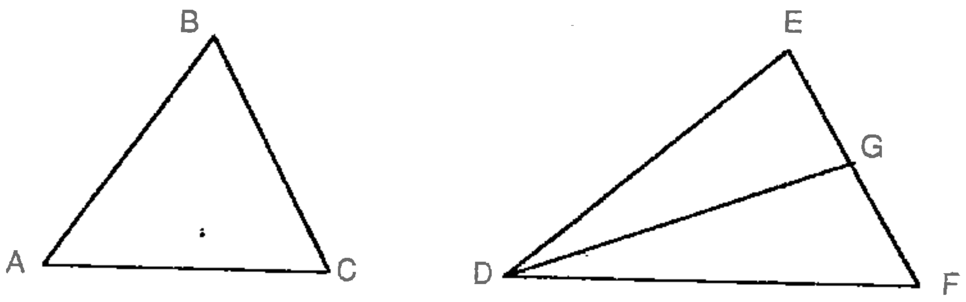
اذا كان $\Delta ABC - \Delta DEF$ هو تناظر متطابق للمثلثين ABC و DEF، فانه يرمز لهذا بالرمز:

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

مبرهنة ٥٦ (S A S)

اذا كان ضلعان والزاوية المحددة بهما في مثلث تطابق ضلعين والزاوية المحددة بهما من مثلث آخر، فان المثلثين يتطابقان.

بعبارة اخرى، اذا كان في مثلثين ABC و DEF،
$A\text{-}B \cong D\text{-}E$ ، $A\text{-}C \cong D\text{-}F$ ، و $\angle A \cong \angle D$ ، فان
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$



شكل (٤٢)

البرهان

$\angle C \cong \angle F$

من بديهية ١٦، $\angle E \cong \angle B$. كل ما نحتاجه من تعريف ٢٣، ان نبرهن ان $B\text{-}C \cong E\text{-}F$ نفرض ان العبارة خطأ.

من مبرهنة ٥٢، اما $B\text{-}C < E\text{-}F$ او $E\text{-}F < B\text{-}C$.

نفرض ان $B\text{-}C < E\text{-}F$.

من تعريف $<$ ، توجد نقطة G بحيث ان $B\text{-}C \cong E\text{-}G$ و $E\text{-}G\text{-}F$

ومن بديهية ٦، E, G, F نقاط مختلفة وتقع على مستقيم واحد.

اي ان F, G تقعان على المستقيم EF. ومن مبرهنة ٢٨(و)، F و G في نفس الجهة من DE. في المثلثين ABC

و DEG ، من بديهية ١٦، نستنتج ان $\angle EDG \cong \angle BAC$،
ولكن من الفرض $\angle EDF \cong \angle BAC$ ،
لذلك، من بديهية ١٤، نستنتج ان $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DG}$ ، اي
ان $F, G \in DF$ وهذا يناقض مبرهنة ٢.
لذلك، فان الفرض بان $E\text{-}F < B\text{-}C$ يؤدي الى
تناقض ، وبنفس الطريقة في الحالة الاخرى.
لذلك، فان $E\text{-}F \cong B\text{-}C$ وان $\Delta EDF \cong \Delta BAC$

تعريف ٢٤

زاويتان لهما ضلع مشترك وضلعيهما الاخرين يكونان شعاعين متعاكسين يقال عنهما تكونان زوجا خطيا .

تعريف ٢٥

زاويتان تطابقان على التوالي زاويتين لزوج خطي يقال عنهما متكاملتين، احداهما مكملة للاخرى.
من هذا التعريف ومن بديهية ١٥، تستنتج المبرهنة التالية:

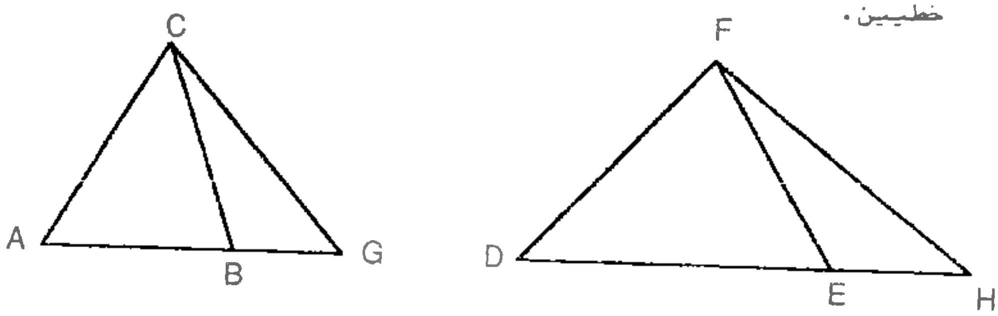
مبرهنة ٥٧

• اذا كانت زاويتان تكونان زوجا خطيا ، فانهما متكاملتان.

مبرهنة ٥٨

اذا كانت زاويتان متطابقتين ، فانه تتطابق كذلك الزاويتان اللتان تكونان معهما، على التوالي، زوجين

خطيين.



شكل (٤٣)

البرهان

لتكن ∠ ABC ≅ ∠DEF. من بديهية ٩، توجد نقطة G بحيث ان A-B-G ، وتوجد نقطة H بحيث ان D-E-H. لذا يكون الشعاعان BA و BG متعاكسين، وكذلك الشعاعان ED و EH ، وتكون الزاويتان ABC و CBG زوجا خطيا، وكذلك الزاويتان DEF و FEH. نختار النقاط H, D و F بطريقة لاتؤثر على التعميم بحيث ان A-B ≅ D-E ، B-C ≅ E-F ، و B-G ≅ E-H.

يجب ان نبرهن ان ∠ FEH ≅ ∠ CBG

في المثلثين ABC و DEF :

A-B ≅ D-E ، ∠ ABC ≅ ∠ DEF ، و B-C ≅ E-F

لذلك من مبرهنة SAS ، D-F ≅ A-C

و ∠ BAC ≅ ∠ EDF

من بديهية ١٣، A-G ≅ D-H لذلك مرة ثانية نطبق مبرهنة SAS على Δ CAG و Δ FDH، فيكون Δ FDH ≅ Δ CAG ، وهذا يؤدي الى ان F-H ≅ C-G وان ∠ DHF ≅ ∠ AGC.

في المثلثين CBG و FEH :

∠ EHF ≅ ∠ BGC ، E-H ≅ B-G ، و H-F ≅ G-C

لذلك، من بديهية ١٦، نستنتج ان

يمكن البرهان دون البديهية ١٦

$\angle CBG \cong \angle FEH$

نتيجة (١)

مكملات الزوايا المتطابقة تكون متطابقة

البرهان

نستنتج هذا من تعريف ٢٥، بديهية ١٥، ومبرهنة ٥٨.

تعريف ٢٦

يقال عن زاويتين لهما رأس مشترك بانهما زاويتان رأسيتان اذا وفقط اذا شعاعي زاوية واحدة هما الشعاعين المعاكسين لشعاعي الزاوية الاخرى.

نتيجة (٢)

تكون الزاويتان الرأسيتان متطابقتين.

البرهان

ينتج هذا من تعريف ٢٦، مبرهنة ٥٨، والخاصية الانعكاسية لبديهية ١٥.

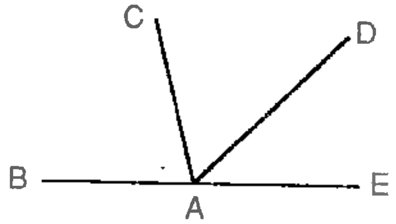
تعريف ٢٧

زاويتان لهما رأس مشترك وضلع مشترك، وضلعيهما الآخرين في الجهتين المتعاكستين لخط

الضلع المشترك، تدعيان زاويتين متجاورتين.

نتيجة (٣)

اذا كانت زاويتان متكاملتين ومتجاورتين، فانهما تكونان زوجا خطيا.



شكل ٤٤

شكل (٤٤)

البرهان

لتكن $\angle BAC$ و $\angle CAD$ زاويتين متكاملتين وان B و D في الجهتين المتعاكستين للخط AC. يجب ان نبرهن ان $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}$ شعاعين متعاكسين وان $\angle BAC$ و $\angle CAD$ تكونان زوجاخطيا. ليكن $\overrightarrow{AE}$ الشعاع المعاكس الى AB. فانه من مبرهنة ٢٧ ⟵ D, E في نفس الجهة من الخط AC.

بما ان $\overrightarrow{AE}$ هو الشعاع المعاكس للشعاع AB ، فتكون الزاويتان $\angle BAC$ و $\angle CAE$ زوجا خطيا. ومن مبرهنة ٥٧، تكون الزاويتان $\angle BAC$ و $\angle CAE$ متكاملتبن، وبما ان الزاويتين $\angle BAC$ و $\angle CAD$ متكاملتان، ومن بديهية ١٥ ، $\angle BAC = \angle BAC$ فان من نتيجة ١ ، $\angle CAD \doteq \angle CAE$.

ومن بديهية ١٤، $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$.

لذلك يكون الشعاع AD هو الشعاع المعاكس للشعاع

$\overrightarrow{AB}$ ، وان الزاويتين $\angle BAC$ و $\angle CAD$ تكونان زوجا خطيا.

تمارين ٥-٣

١- اذا كان $\angle ABD \cong \angle ABC$ هل ان $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$؟ لماذا؟

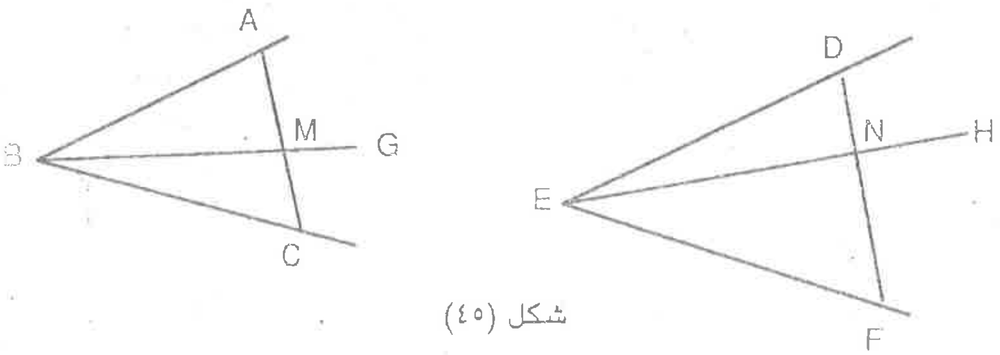
٢- اذا كان $\angle ABD$ لاتطابق $\angle ABC$ ، برهن على ان $\overrightarrow{BD} \neq \overrightarrow{BC}$.

٣- اذا كان $D\text{-}F \cong B\text{-}C$ و $A\text{-}C \cong D\text{-}E$ ، و $\angle D \cong \angle C$ ماهو التناظر المتطابق للمثلثين ABC و DEF؟

٥-٤ جمع وطرح الزوايا

مبرهنة ٥٩

اذا كان $\angle DEF \cong \angle ABC$ وان $\overrightarrow{BG}$ شعاع في داخل $\angle ABC$ ، فانه يوجد شعاع $\overrightarrow{EH}$ في داخل $\angle DEF$ بحيث ان $\angle DEH \cong \angle ABG$ و $\angle HEF \cong \angle GBC$.



شكل (٤٥)

البرهان

من بديهية ١١، نختار النقاط D, F بطريقة لاتؤثر على المفهوم العام، بحيث ان $A\text{-}B \cong D\text{-}E$ ،

و $C-B \cong F-E$.

ومن مبرهنة SAS ⟵ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ، وان $A-C \cong D-F$ ، $\angle EFD$ و $\angle BCA \cong \angle EFD$ و $\angle BAC \cong \angle EDF$.

بما ان BG يمر براس الزاوية $\angle ABC$ ويقع في داخل الزاوية، فانه من مبرهنة ٤٣، BG يقطع A-C في نقطة ولتكن M.

بما ان $A-C \cong D-F$ وان A-M-C ،من مبرهنة ٥١، توجد نقطة N بحيث ان $D-N \cong A-M$ وان D-N-F.

من مبرهنة ٤٤، وتعريف ١٧ يكون الشعاع $\overrightarrow{EN}$ هو الشعاع المطلوب EH الذي يقع في داخل $\angle DEF$.

بما ان $A-C \cong D-F$ و $A-M \cong D-N$ و A-M-C و D-N-F فانه من مبرهنة ٥٠ (طرح القطع)، يكون $M-C \cong N-F$ ،

في ΔABM و ΔDEN :

$\angle BAM = \angle BAC \cong \angle EDF = \angle EDN$ ⟵ $\angle BAM \cong \angle EDN$

$A-M \cong D-N$ و $A-B \cong D-E$ ، فانه من مبرهنة SAS ،

$\Delta ABM \cong \Delta DEN$ ⟵ $\angle ABM \cong \angle DEN$

وبنفس الطريقة، فان المثلثين MBC و NEF يتطابقان، ولذلك فان $\angle MBC \cong \angle NEF$،

$\angle ABG = \angle ABM \cong \angle DEN = \angle DEH$

لذلك، $\angle ABG \cong \angle DEH$.

$\angle GBC = \angle MBC \cong \angle NEF = \angle HEF$، لذلك $\angle GBC \cong \angle HEF$

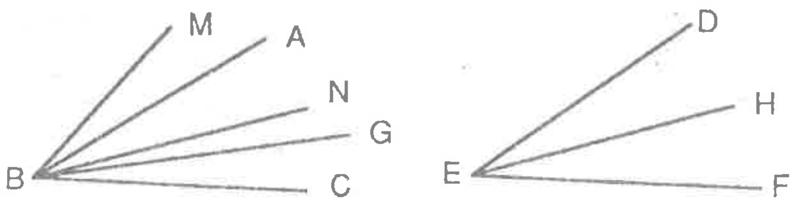
مبرهنة ٦٠. (جمع الزوايا)

لتكن $\angle ABC$ و $\angle DEF$ زاويتين لهما، على التوالي، الشعاعين BG و EH يقعان في داخليهما،

و $\angle GBC \cong \angle HEF$ ، و $\angle ABG \cong \angle DEH$

فان

$$\angle ABC \cong \angle DEF$$



شكل (٤٦)

البرهان

من بديهية ١٤، يوجد شعاع $\overrightarrow{BM}$ في جهة الخط BC التي تحتوي A بحيث ان $\angle MBC \cong \angle DEF$. بما ان $\overrightarrow{EH}$ في داخل $\angle DEF$ ، فانه من مبرهنة ٥٩، يوجد شعاع $\overrightarrow{BN}$ في داخل $\angle MBC$ بحيث ان $\angle NBC \cong \angle HEF$ و $\angle MBN \cong \angle DEH$.
ولكن من الفرض $\angle GBC \cong \angle HEF$ ، لذلك من بديهية ١٥، $\angle GBC \cong \angle NBC$ ومن بديهية ١٤، $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BG}$

لذلك $\angle MBG = \angle MBN \cong \angle DEH \cong \angle ABG$

ومن هذا $\angle MBG \cong \angle ABG$ ومن بديهية ١٤ ، $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA}$

لذلك، $\angle ABC = \angle MBC \cong \angle DEF$

اي ان $\angle ABC \cong \angle DEF$

مبرهنة ٦١ (طرح الزوايا)

اذا كان $\angle CBD \cong \angle GFH$ و $\angle DBA \cong \angle HFE$ وان الشعاعين $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{FE}$ يقعان في داخل $\angle CBD$ و $\angle GFH$ ، على التوالي، فان $\angle ABC \cong \angle EFG$.

شكل (٤٧)

البرهان

بما ان $\angle GFH \cong \angle CBD$ وان $\overrightarrow{BA}$ شعاع في داخل
$\angle DBC$، فانه من مبرهنة ٥٩، يوجد شعاع $\overrightarrow{FI}$ في داخل
$\angle GFH$ بحيث ان $\angle HFI \cong \angle DBA$ و $\angle IFG \cong \angle ABC$.
لكن من الفرض $\angle HFE \cong \angle DBA$
فانه من بديهية ١٥، $\angle HFI \cong \angle HFE$
ومن بديهية ١٤ $\longleftarrow$ $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FI}$
لذلك $\angle EFG \cong \angle ABC$

تمارين ٥-٤

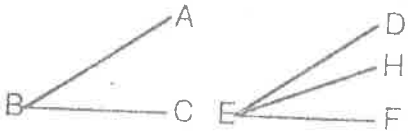
١- استخدم مبرهنة ٣٤ بدلا من مبرهنة ٤٥ وتعريف ١٧ لتحصل على النقطة M في مبرهنة ٥٩ .

٥-٥ مقارنة الزوايا

تعريف ٢٨

تكون زاوية $\angle ABC$ اصغر من زاوية $\angle DEF$ اذا وفقط اذا يوجد شعاع EH في داخل $\angle DEF$ بحيث ان $\angle ABC \cong \angle HEF$. ويرمز لهذا بالرمز :

$\angle ABC < \angle DEF$



شكل (٤٨)

مبرهنة ٦٢

لاي زوج من الزوايا، وليكن $\angle A$ و $\angle B$.
فانه تتحقق واحدة فقط ممايلي :

$\angle A < \angle B$ و $\angle A \cong \angle B$ و $\angle B < \angle A$

البرهان

يترك كتمرين.

مبرهنة ٦٣

اذا كان $\angle A < \angle B$ و $\angle A \cong \angle C$ ، فان $\angle B < \angle C$.

البرهان

لتكن $\angle B = \angle DBE$

بما ان $\angle A < \angle B$ ، ومن تعريف ٢٨، يوجد شعاع $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\angle B$ بحيث ان $\angle A \cong \angle FBE$.
ومن الفرض $\angle A \cong \angle C$ ، فانه من بديهية ١٥، $\angle C \cong \angle FBE$.

ومن ~~مبرهنة~~ ٢٨، $\angle C < \angle B$
تعريف

مبرهنة ٦٤

اذا كان $\angle A < \angle B$ و $\angle B \cong \angle C$
فان $\angle A < \angle C$.

البرهان

لتكن $\angle B = \angle DBE$ و $\angle C = \angle GCH$.
بما ان $\angle A < \angle B$ ، فانه من تعريف ٢٨، يوجد شعاع $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\angle B$ بحيث ان $\angle A \cong \angle FBE$.
$\angle B \cong \angle C$ و $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\angle B$ ، فانه من مبرهنة ٥٩، يوجد شعاع $\overrightarrow{CI}$ في داخل $\angle C$ بحيث ان $\angle FBE \cong \angle ICH$.
وبما ان $\angle A \cong \angle FBE$ ،
فانه من بديهية ١٥، $\angle A \cong \angle ICH$
ومن تعريف ٢٨، $\angle A < \angle C$.

مبرهنة ٦٥

اذا كان $\angle A < \angle B$ و $\angle B < \angle C$ ، فان $\angle A < \angle C$.

البرهان

لتكن $\angle B = \angle DBE$ و $\angle C = \angle GCH$.
بما ان $\angle A < \angle B$ ، فانه من تعريف ٢٨، يوجد شعاع $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\angle B$ بحيث ان $\angle A \cong \angle FBE$.
وكذلك $\angle B < \angle C$ ، فانه يوجد شعاع $\overrightarrow{CI}$ في داخل $\angle C$ بحيث ان $\angle B \cong \angle ICH$. وبما ان $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\angle B$، فانه من مبرهنة ٥٩، يوجد شعاع $\overrightarrow{CJ}$ في داخل $\angle ICH$ بحيث ان $\angle FBE \cong \angle JCH$. وبما ان $\angle A \cong \angle FBE$ ، فانه من

بديهية ١٥، $\angle A \hat{=} \angle JCH$.
من تعريف ١٧، $\overrightarrow{CJ}$ يقع بين $\overrightarrow{CH}$ و $\overrightarrow{CI}$ وان $\overrightarrow{CI}$ يقع بين $\overrightarrow{CG}$ و $\overrightarrow{CH}$ ، ومن مبرهنة ٤٦(أ)، $\overrightarrow{CJ}$ يقع بين $\overrightarrow{CH}$ و $\overrightarrow{CG}$ ، اي ان $\overrightarrow{CJ}$ يقع في داخل $\angle C$ وبما ان $\angle A \hat{=} \angle JCH$ فانه من تعريف ٢٨، $\angle A < \angle C$.

تمارين ٥-٥

١) برهن اذا كان $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\angle ABC$ ، فان $\angle FBC < \angle ABC$.

٢) برهن اذا كان $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\angle ABC$ ، وان $\overrightarrow{BE}$ في داخل $\angle FBC$ ، فان $\angle EBC < \angle ABC$.

الفصل الحادي عشر
الهندسة الاسقاطية التركيبية
Synthetic Projective Geometry

سندرس المستوي الاسقاطي آخذين بنظر الاعتبار الافكار الاساسية لهذه الهندسة بدون التعمق فى المواضيع.

يتضمن المستوي الاسقاطي المجموعة π لكلمات اولية تدعى نقاط ومجموعات جزئية من π تدعى مستقيمات والتي هي ايضا غير معرفة. سيرمز لنقاط π بالحروف الكبيرة $A, B, C, \ldots$ ومستقيمات π بالجروف الصغيرة $l, m, n, \ldots$.

والان نعيد ذكر بديهيات π التي ذكرت في الفصل الاول.

١١-١ بديهيات الوجود والوقوع

١ـ لاي نقطتين مختلفتين A و B في π ، يوجد مستقيم واحد فقط يحتويهما ، ذلك يعني، اذا كان $A, B \in \pi$ بحيث ان $A \neq B$.

$A, B \in L$ و $A, B \in m$ ، فان $l = m$.

٢ـ كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل.

٣ـ توجد في الاقل نقطة واحدة A ويوجد في الاقل مستقيم واحد l بحيث ان A لاتنتمي الى l.

٤ـ اي مستقيمين مختلفين يشتركان في نقطة واحدة في الاقل.

رموز

اذا كان $P \in l$ ، فاننا نقول: "النقطة P تقع على l"، او "P على l"، وكذلك: "l يمر من P"، او "l يحتوي P ".

اذا كان $A \in l$ و $B \in l$ ، فنرمز للمستقيم l بالرمز AB.

نقطة تقاطع المستقيمين l و m هي النقطة التي تنتمي الى المستقيمين l و m، ويرمز لها بالرمز: $l \cap m$.

مبرهنة ١

اي مستقيمين مختلفين l و m في π يتقاطعان بنقطة واحدة وواحدة فقط.

ليكن l و m مستقيمين مختلفين في π ، اي ان $m \neq l$. من البديهية ٤، توجد نقطة A بحيث ان $A \in l$ و $A \in m$.

نفرض وجود نقطة اخرى B، $B \neq A$ بحيث ان $B \in l$ و $B \in m$. فانه من البديهية ١، $l = m$ وهذا تناقض لان $m \neq l$. لذا فان فرضيتنا خاطئة.

وعليه، فان l و m يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.

مبرهنة ٢

اية نقطة في π يمر بها ثلاث مستقيمات في الاقل.

البرهان

لتكن P اية نقطة في π.

من البديهية ٣ ،يوجد مستقيم l بحيث ان P لاتقع على l.
كذلك من البديهية ٢، توجد على الاقل ثلاث نقاط على l، ولتكن A_1, A_2, A_3.

من البديهية ١ ،توجد المستقيمات PA_1, PA_2, PA_3 التي تمر من P وتكون مختلفة.

٢-١١ مبدأ الثنائية *(Principle of duality)*

ان نقاط ومستقيمات المستوي الاسقاطي π تتصف بخاصية مميزة وهي ان المستقيم والنقطة هما عناصر ثنائية في المفهوم الذي فيه اية عبارة صحيحة تتضمن عناصر π تبقى صحيحة عند تبديل النقطة والمستقيم احدهما محل الآخر.

تعريف ١

عبارتان تكون احداهما ثنائية (dual) للاخرى اذا امكن حصول واحدة من الاخرى بتبديل الكلمتين "النقطة" و "المستقيم"، احداهما محل الاخرى.

عبارة تدعى ثنائية نفسها (self dual) اذا حصلنا على نفس العبارة بتبديل الكلمتين "النقطة" و "المستقيم".

فمثلا، تعريف المثلث هو ثنائي نفسه.

لذلك، فان مبدأ الثنائية يكون كما يلي:

مبدأ الثنائية

اية عبارة صحيحة تتعلق بتعيين النقاط والمستقيمات في المستوي الاسقاطي تنتج عبارة ثانية صحيحة نحصل عليها من العبارة الاولى بتبديل الكلمتين "النقطة" و "المستقيم" احداهما محل الاخرى.

ان مبدأ الثنائية يستنتج من الحقيقة بان تبديل الكلمتين "النقطة" و "المستقيم" احداهما محل الاخرى في البديهيات الاربعة، نحصل على عبارات صحيحة.

بعبارة اخرى، يتحقق مبدأ الثنائية على البديهيات.

لذا، فان اية عبارة نحصل عليها من البديهيات تكون صحيحة.

ذلك، مبرهنة ١ هي ثنائية بديهية ١، مبرهنة ٢ هي ثنائية بديهية ٢، بديهية ٣ هي ثنائية نفسها، وثنائية بديهية ٤ لاي نقطتين يوجد على الاقل مستقيم واحد يحتويهما. هذه العبارة تكون صحيحة من بديهية١ . ان مبدأ الثنائية، كما سنرى فيما بعد، يلعب دورا

مهما في برهنة مبرهنات في الهندسة الاسقاطية.

تعريف ٢

بشكل على π نعني اي مجموعة جزئية من π وغير خالية. بصورة خاصة، سنركز اهتمامنا على الاشكال التالية.

تعريف ٣

حزمة مستقيمات (Pencil of Lines) هي مجموعة كل المستقيمات التي تمر بنقطة O. النقطة O تدعى راس الحزمة (vertex).

حزمة نقاط (pencil of points) هي مجموعة كل النقاط التي تقع على مستقيم l. المستقيم l يدعى محور الحزمة. (axis) .

١١-٣ التشكيلات وبديهية فانو (Configuration and Fano's Axiom)

تعريف ٤

مجموعة من m من النقاط وn من المستقيمات في π بحيث ان كل نقطة من m من النقاط يمر بها عدد ثابت وهو a من المستقيمات وكل مستقيم من n من المستقيمات يحتوي على عدد ثابت وهو b من النقاط هي تشكيل (m_a , n_b). كمثال يكون تشكيل المثلث $(3_2 , 3_2)$.

مبرهنة ٣

اذا كان (m_a, n_b) تشكيلا في المستوي الاسقاطي، فان $ma = nb$.

البرهان

بما ان كل نقطة من m من النقاط يمر بها a من المستقيمات، فانه ينبغي ان يكون ma من المستقيمات. لكن كل مستقيم يحتوي على b من النقاط، اي ان المستقيم يتكرر b من المرات.

لذلك، يكون عدد الخطوط $n = \dfrac{ma}{b}$

اي ان $ma = nb$

تعريف ٥

يقال عن تشكيل انه ثنائي نفسه (self-dual) اذا احتوى على عدد النقاط كعدد المستقيمات.
$(m_a\ n_b)$ هو ثنائي نفسه اذا كان $m = n$.
في هذه الحالة، $a = b$، لان $am = mb$. اي ان التشكيل ثنائي نفسه يكون (m_b, m_b). سنرمز لهذا التشكيل بالرمز (m_b). كمثال، المثلث هو (3_2) تشكيل ثنائي نفسه.
عندما $b = 1$، التشكيل المحتمل الوحيد هو نقطة وخط يحتويها.
اذا كان $b = 2$، فان (m_2) هو تشكيل يتضمن m من النقاط

و m من المستقيمات. كمثال، النموذج الذي تشكيله (5_2) يعطى بالشكل التالي:

شكل (١٠٩)

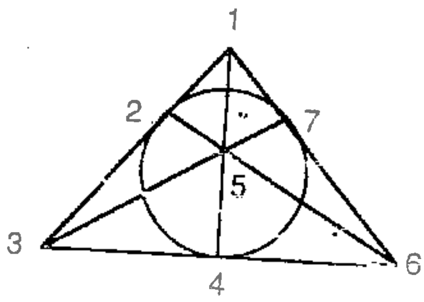
الحالة $b\geq3$ تعطينا تشكيلات عديدة، الطريقة العامة لوضع جدول لتشكيل من نوع (m_b)،

ليكن $1,2,\ldots,m$ ترمز الى m من النقاط و $[1],[2],\ldots,[m]$ ترمز الى m من المستقيمات. نكتب هذه المستقيمات في صف و b من النقاط الموجودة على مستقيم معين تكون في عمود تحت المستقيم. فيكون في هذا الترتيب عمودين مختلفين لايشتركان باكثر من نقطة واحدة وكل رقم يجب ان يقع في b من الاعمدة، لان كل نقطة تكون محتواة في b من المستقيمات. كمثال على ذلك، نأخذ التشكيل (7_3)

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
1	1	1	2	2	3	3
2	4	6	4	5	4	5
3	5	7	7	6	6	7

نلاحظ حقيقتين مهمتين حول هذا التشكيل. اولهما، انه من الممكن تشكيل واحد فقط، طالما كل الاعمدة ترتب بطريقة واحدة وتنتج نموذجا واحدا، حيث اذا بدلنا 4 الى 5 ، كمثال، في عمود، يجب ان نبدل كل 4 الى 5 والعكس بالعكس. ثانيا، نجد من الصعوبة تمثيل هذا التشكيل بمخطط، حيث انه لايوجد تمثيل مالم نعتبر 2,4,7 تقع على مستقيم واحد كما في الشكل

التالي:



شكل (١١٠)

لذلك، لايمكن ان نسمح المستوي الاسقاطي بقبول تشكيل (7_3) لسببين: اولا، لايسمح المستوي الاقليدي بتشكيل (7_3) بسبب المستقيمات المنحنية، وثانيا، سيقتصر المستوي الاسقاطي على سبع نقاط فقط، حيث مع اي سبع نقاط نحصل على تشكيل واحد فقط.

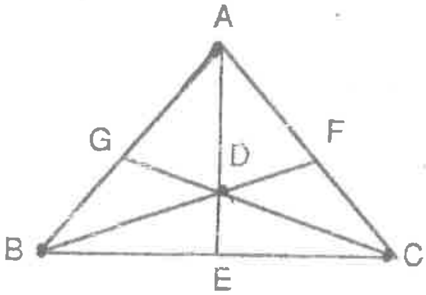
طالما غرضنا توسيع المستوي الاسقاطي، يكون من الضروري ان نضيف بديهية تؤكد على عدم وجود تشكيل (7_3).

من اجل ذلك، يجب ان نناقش رباعيات الزوايا التامة.

تعريف ٦ د.الهنا ج صباحي

اربع نقاط في π، لاتوجد اي ثلاثة منها على مستقيم واحد، وستة مستقيمات تتعين من ازواج من هذه النقاط تكون رباعي زوايا تام (a complete quadrangle).

تدعى هذه النقاط رؤوس والمستقيمات التي تتعين من هذه النقاط اضلاع رباعي الزوايا التام. سنرمز لرباعي الزوايا التام برؤوسه وعادة نطلق عليه رباعي زوايا، ونقول رباعي الزوايا (ABCD) كما في الشكل التالي:



شكل (١١١)

ضلعان في رباعي الزوايا يقال عنهما متقابلين اذا لم يشتركا باي رأس. توجد ثلاثة ازواج من هذه الاضلاع المتقابلة في رباعي الزوايا. نقطة تقاطع زوج من الاضلاع المتقابلة لرباعي الزوايا تدعى نقطة قطرية (a diagonal point) لرباعي الزوايا. رباعي الزوايا له ثلاث نقاط قطرية.

في هذا الشكل، تكون الرؤوس A, B, C, D. فالاضلاع هي BC, BD, CD, DA, AB, AC. الضلع المقابل للضلع AB هو CD ونقطة تقاطعهما G هي نقطة قطرية لرباعي الزوايا (ABCD). وبنفس الطريقة، E و F نقطتان قطريتان.

قد تقع النقاط E, F, G على مستقيم واحد او لاتقع. اذا اخذناها على مستقيم واحد، نحصل على تشكيل (7_3). طالما لانرغب بادخال تشكيل (7_3) ، سنأخذ النقاط لاتقع على مستقيم واحد.

يقودنا هذا الى بديهية فانو:

بديهية ٥: النقاط القطرية لرباعي الزوايا التام لاتقع على مستقيم واحد.

لذلك النقاط القطرية لرباعي الزوايا التام تكون مثلثا يدعى المثلث القطري لرباعي الزوايا التام.

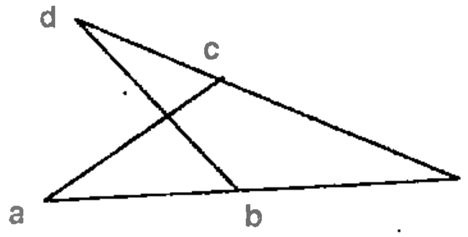
يجب ان نلاحظ، انه في اي وقت نضيف بديهية جديدة الى البديهيات الاربعة الاصلية، يجب ان نبين ان البديهية الجديدة تحقق مبدا الثنائية. غير ذلك،

لايتحقق مبدأ الثنائية في المنظام الموسع. لبيان ان ثنائية بديهية ٥ هي عبارة صحيحة نأخذ التشكيل $(6_2, 4_3)$، ثنائي رباعي زوايا تام.

تعريف ٧

اربعة مستقيمات في π، لايوجد اي ثلاثة منها تلتقي بنقطة واحدة، وست نقاط تتعين من تقاطع ازواج من هذه المستقيمات، تكون رباعي اضلاع تام (a complete quadrilateral).

المستقيمات التي تكون رباعي اضلاع تام تدعى اضلاعه والنقاط المتعينة من المستقيمات تدعى رؤوسه. نرمز لرباعي الاضلاع التام باضلاعه، فمثلا، رباعي اضلاع تام (abcd) كما في الشكل التالي:



شكل (٢١٧)

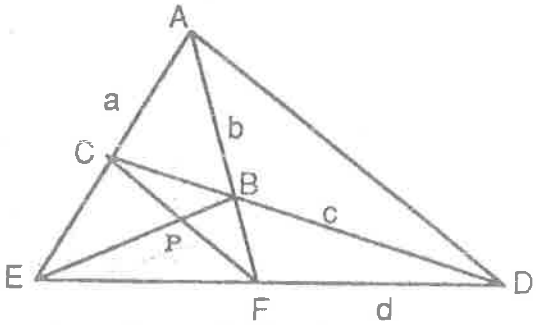
راسان لرباعي اضلاع تام يقال عنهما متقابلين اذا لم يقعا على نفس الضلع. توجد ثلاثة ازواج من هذه الرؤوس المتقابلة في رباعي اضلاع تام. المستقيم الواصل بين زوج من الرؤوس المتقابلة لرباعي اضلاع تام يدعى خطا قطريا (a diagonal line).

والان نبرهن ثنائية بديهية فانو (بديهية ٥) في المبرهنة التالية.

مبرهنة ٤ .(ثنائية بديهية ٥)

الخطوط القطرية لرباعي اضلاع تام لاتلتقي بنقطة واحدة.

البرهان



شكل (١١٣)

ليكن (abcd) رباعي اضلاع تام. فان الرؤوس لهذا الرباعي هي:

$$a \cap b = A \quad , \quad c \cap d = D$$
$$b \cap c = B \quad , \quad a \cap d = E$$
$$a \cap c = C \quad , \quad b \cap d = F$$

الخطوط القطرية تكون: AD, BE, CF

لتكن $CF \cap BE = P$

يجب ان نبرهن ان P لاتقع على AD.

ناخذ رباعي الزوايا التام (BCEF). نقاطه القطرية هي: P, A, D

من بديهية ٥، النقاط القطرية P, A, D لاتقع على مستقيم واحد.

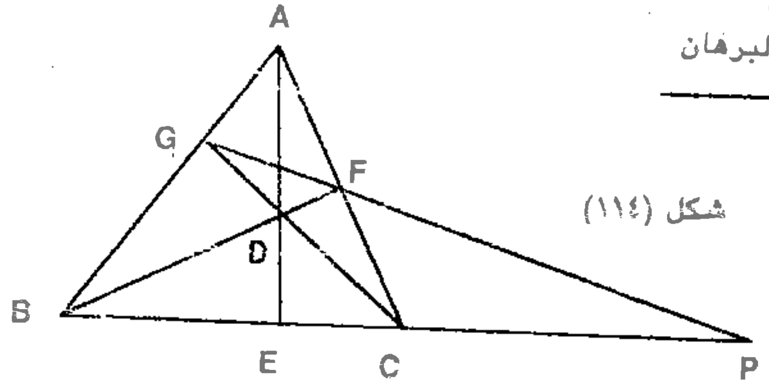
لذلك، فان P لاتقع على المستقيم AD.

المبرهنة التالية نستنتجها من بديهية ٥.

مبرهنة ٥

المستقيم في مستوي اسقاطي يحقق البديهيات الخمس يحتوي على اربع نقاط في الاقل.

البرهان



شكل (١١٤)

نأخذ رباعي زوايا (ABCD) كما في الشكل.

لتكن E, F, G نقاطه القطرية. بما ان النقطتين G و F لاتقعان على المستقيم BC، فان المستقيمين GF و BC مختلفان.

لذلك يجب ان يتقاطعا في نقطة واحدة، ولتكن P.

$B \neq P$، لانه اذا كان $P = B$، فان GF يقطع AB في نقطتين مختلفتين B و G وهذا يناقض مبرهنة ١. بنفس الطريقة، $P \neq C$. وكذلك من بديهية ٥، $P \neq E$.

هكذا، P هي النقطة الرابعة على الخط BC، التي تختلف عن B، C، و E.

١١-٣ تمارين

١- برهن على ان رباعي الزوايا التام هو تشكيل $(4_3, 6_2)$ وان رباعي الاضلاع التام هو تشكيل $(6_2, 4_3)$.

٢- برهن على انه في مستوي اسقاطي يحقق البديهيات الخمس كل نقطة يمر بها على الاقل اربعة خطوط.

٣- برهن على انه توجد في مستوي اسقاطي يحقق البديهيات الخمس ثلاث عشر نقطة على الاقل.

٤- هل تستطيع ان تزرع سبع اشجار في سبعة خطوط بحيث ان على كل خط ثلاث اشجار؟ اعطي الاسباب.

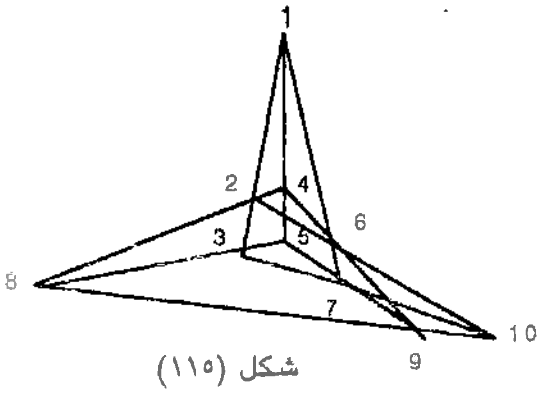
٥- هل تستطيع ان تزرع عشر اشجار في عشرة خطوط بحيث ان كل خط يحتوي على ثلاث اشجار ؟ اعط الاسباب.

١١-٤ بديهية ديزارك (Desarques Axiom)

لناخذ الجدول التالي لتشكيل (10_3)

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]
1	1	1	2	2	3	3	4	5	8
2	4	6	4	6	5	7	6	7	9
3	5	7	8	10	8	10	9	9	10

يجب ان يلاحظ ان بكتابة المستقيمات التي تحتوي النقطة ١، يكون عندنا عدة احتمالات، طالما توجد عشر نقاط، هذه ليست الحالة في تشكيل (7_3) ، حيث من الممكن ان ثلاثة مستقيمات تشترك نقطة واحدة بالاساس في طريقة واحدة. على كل حال، في حالة (10_3)، نحصل على 10 تشكيلات مختلفة. كذلك، من الممكن تمثيل معظم التشكيلات (10_3) بمخطط. التشكيل المذكور اعلاه يدعى تشكيل ديزارك. ويمثل بالشكل التالي:



شكل (١١٥)

تعريف ٨

يكون مثلثان في π منظورين (perspective) من نقطة O اذا وجد تناظر متباين بين رؤوس المثلثين بحيث ان كل المستقيمات الواصلة بين الرؤوس المتناظرة تمر من نقطة O. تدعى O مركز المنظورية.

رمز

يرمز للمثلثين ABC و A'B'C' المنظورين من نقطة O بحيث ان A,B,C تناظر A',B',C' على التوالي، بالرمز

$$\Delta ABC \stackrel{O}{\bar{\wedge}} \Delta A'B'C'$$

ان ثنائي تعريف ٨ يكون كما يلي:

يكون مثلثان في π منظورين من مستقيم l اذا وجد تناظر متباين بين اضلاع المثلثين بحيث ان كل نقاط تقاطع الاضلاع المتناظرة تقع على المستقيم l. يدعى l محور المنظورية.

رمز

اذا كان ΔABC و $\Delta A'B'C'$ منظورين من l بحيث ان AB, BC, CA تناظر A'B', B'C', C'A' على التوالي، يرمز لهذا:

$$\Delta ABC \stackrel{l}{\bar{\wedge}} \Delta A'B'C'$$

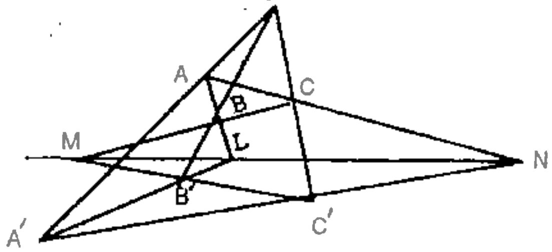
كمثال، في الشكل السابق، تشكيل ديزارك، المثلث المتكون من 6 ,4 ,2 والمثلث المتكون من 3,5,7 منظورين من 1 لانه يوجد تناظر متباين بحيث ان كل المستقيمات التي تمر من الرؤوس المتناظرة تلتقي بالنقطة 1 . كذلك، يكونان منظورين من المستقيم [10] ، لان نقاط تقاطع الاضلاع المتناظرة للمثلثين تقع على المستقيم [10]. ونفس الشيء يبين لاي مثلثين في هذا التشكيل.

بكلمات اخرى، لتقبل تشكيل ديزارك، من الضروري ان يحقق المستوي الخاصية بانه اذا كان مثلثان منظورين من نقطة، فانهما يكونان منظورين من مستقيم. المستوي الاسقاطي الذي عرفناه (الذي يحقق البديهيات من ١ الى ٥) ليس ضروريا ان يحقق هذه الخاصية. لذلك، من الضروري ان ندخل بديهية ديزارك التالية.

بديهية ٦

اذا كان مثلثان في مستوي اسقاطي منظورين من نقطة، فانهما يكونان منظورين من مستقيم.

هذا يعني، اذا كان ΔABC و $\Delta A'B'C'$ مثلثين بحيث ان AA', BB', CC' تلتقي جميعا في نقطة O (اي ان المثلثين منظوران من O)، فان النقاط $L = AB \cap A'B'$ ، $M = BC \cap B'C'$ و $N = CA \cap C'A'$ تقع على مستقيم واحد.



شكل (١١٦)

سنبرهن الان ثنائية بديهية ٦ في المبرهنة التالية.

مبرهنة ٦ (ثنائية بديهية ديزارك)

اذا كان مثلثان في مستوي اسقاطي منظورين من مستقيم، فانهما يكونان منظورين من نقطة.

البرهان

ليكن ABC و A'B'C' مثلثين منظورين من مستقيم l، ليكن $AB' \cap AB = L$ ، $BC' \cap BC = M$ و $AC' \cap AC = N$ فان L, M , N تقع على المستقيم l. يجب ان نبرهن على ان المستقيمات AA', BB', CC' تلتقي بنقطة.

لتكن $O = BB' \cap CC'$ سنبرهن ان AA' يمر من O. المثلثان LBB' و NCC' منظورين من M، اي ان

$$\Delta LBB' \;\overset{M}{\overline{\overline{\wedge}}}\; \Delta NCC'$$

لذلك، من بديهية ٦، النقاط $LB \cap NC = A$ ، $BB' \cap CC' = O$ و $B'L \cap C'N = A'$ تقع على مستقيم واحد. ان هذا يبين ان AA' يمر من O والمثلثين يكونان منظورين من النقطة O.

١١-٤ تمارين

١- في التشكيل (10_3) المذكور في هذا البند (شكل ١١٥) ، جد مثلثين منظورين من النقطة 2 وجد محور المنظورية للمثلثين.

٢- ليكن (ABCD) رباعي زوايا تام. نقاطه القطرية هي النقاط $E = AD \cap BC$ و $F = BD \cap AC$ و $G = CD \cap AB$. برهن ان $L = EF \cap AB$ ، $M = FG \cap BC$ ؛ و $N = GE \cap AC$ تقع على مستقيم واحد.

٣- اكتب جدولين مختلفين للتشكيل (10_3).

١١-٥ المجموعات التوافقية (Harmonic Sete)

سنناقش الان نتيجة اخرى لبديهية فانو، اي، مفهوم المجموعات التوافقية. نحصل على بعض خواص المجموعات التوافقية كذلك من بديهية ديزارك. على كل حال، سنبتدأ بتعاريف اساسية.

تعريف ٩

ليكن F شكلا و P نقطة لاتنتمي الى F، نقاط F والنقطة P تعين حزمة مستقيمات مع P كرأس تدعى قطع نقطي (point section) للشكل F من P.

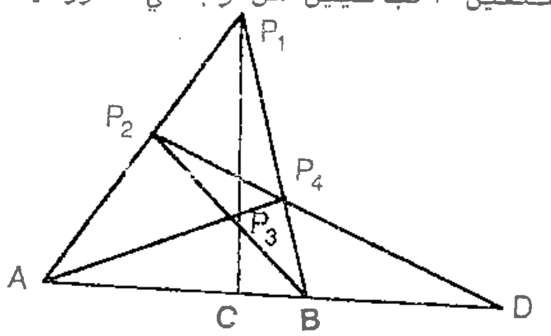
ثنائي تعريف ٩

ليكن F شكلا و l مستقيما لاينتمي الى F، مستقيمات F والمستقيم l تعين حزمة نقاط مع l كمحور تدعى قطع خطي (line section) للشكل F من l.

كمثال، قطع خطي لرباعي زوايا تام يتعين من مستقيم l هو حزمة من ست نقاط على l. كذلك، قطع نقطي لرباعي زوايا تام يتعين من نقطة P ليست على رباعي الزوايا هو حزمة من اربعة مستقيمات.

تعريف ١٠

مجموعة مرتبة من اربع نقاط A, B, C, D على مستقيم l هي مجموعة توافقية من نقاط اذا وجد رباعي زوايا تام فيه A و B نقطتين قطريتين و C و D تقعان على الضلعين الباقيين من رباعي الزوايا التام.



شكل (١١٧)

من التعريف ٩، من الواضح ان A, B, C, D تكون مجموعة توافقية اذا كانت هي القطع الخطي لرباعي الزوايا التام المتعين من خط يحتوي A و B كنقطتين قطريتين لرباعي الزوايا.

الرمز H(AB, CD) يرمز للعبارة "A, B, C, D تكون مجموعة توافقية".

بما ان A و B تلعبان نفس الدور، فانه يمكن ان تستبدلا، اي ان:

$$H(AB,\ CD) \longleftrightarrow H(BA,\ CD)$$

بنفس الطريقة، يمكن ان تستبدل النقطتين C و D الواقعتين على الضلعين الباقيين:

$$H(AB,\ CD) \longleftrightarrow H(AB,\ DC)$$

بهذا، يكون عندنا المبرهنة التالية.

مبرهنة ٧

$$H(BA,\ CD) \longleftrightarrow H(BA,\ DC) \longleftrightarrow H(AB,\ DC)$$

$H(AB, CD) \longleftrightarrow$

قاعدة لغوية

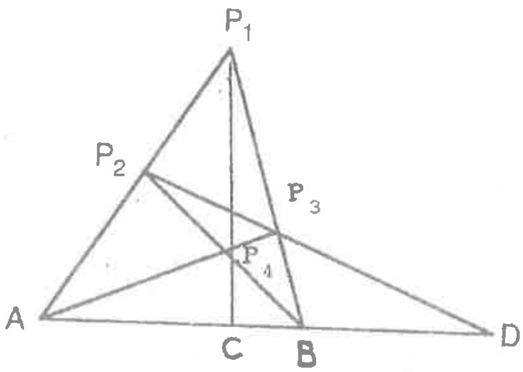
اذا كان $H(AB, CD)$ ، فانه يقال ان D النقطة التوافقية الرابعة للنقاط A, B, C ، او هي المرافق التوافقي للنقطة C بالنسبة الى A و B.

من مبرهنة ٧، يستنتج اذا كانت D مرافق توافقي الى C بالنسبة الى A و B، فان C هي مرافق توافقي الى D بالنسبة الى A و B.

مبرهنة ٨

ليكن A, B, C ثلاث نقاط مختلفة على مستقيم l. فانه من الممكن ايجاد مرافق توافقي الى C بالنسبة الى A و B.

البرهان



شكل (١١٨)

لتكن P_1 نقطة لاتقع على l، نصل AP_1 ، ولتكن P_2 نقطة على AP_1 بحيث ان $A \neq P2$ و $P_2 \neq P_1$. نصل CP_1 ، BP_2 ، و BP1. لتكن

$$P_4 = CP_1 \cap BP_2$$

$$P_3 = AP_4 \cap BP_1$$

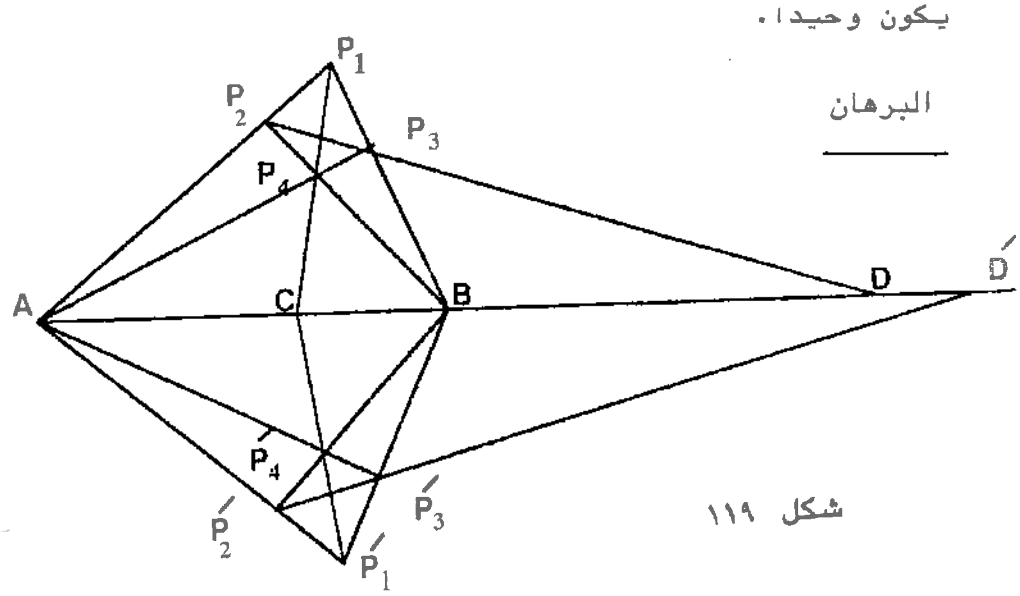
فان $(P_1\ P_2\ P_3\ P_4)$ هو رباعي الزوايا المطلوب، وفيه A و B نقطتين قطريتين و C نقطة على الضلع P_1P_4.

لتكن $D = P_2P_3 \cap l$

فتكون D هي المرافق التوافقي الى C بالنسبة الى A و B.

مبرهنة ٩ للطلاع

لتكن C, B, A ثلاث نقاط على مستقيم l، فان المرافق التوافقي للنقطة C بالنسبة الى A و B يكون وحيدا.



البرهان

شكل ١١٩

من مبرهنة ٨، لتكن D مرافق توافقي الى C بالنسبة الى A و B فيوجد رباعي زوايا تام $(P_1P_2P_3P_4)$.

لتكن 'D مرافق توافقي الى C بالنسبة الى A و B، فيوجد رباعي زوايا تام آخر $(P'_1P'_2P'_3P'_4)$ حيث ان

$$A = P_1P_2 \cap P_3P_4 = P'_1P'_2 \cap P'_3P'_4$$
$$B = P_1P_3 \cap P_2P_4 = P'_1P'_3 \cap P'_2P'_4$$
$$C = P_1P_4 \cap 1 = P'_1P'_4 \cap 1$$
$$D = P_2P_3 \cap 1, \; D' = P'_2P'_3 \cap 1$$

يجب ان نبرهن ان $D = D'$

من ثنائية بديهية ٦،

بما ان

$$\Delta P_1P_3P_4 \overset{O}{\underset{\overline{\wedge}}{=}} \Delta P'_1P'_3P'_4 \longleftarrow \Delta P_1P_3P_4 \overset{1}{\underset{\overline{\wedge}}{=}} \Delta P'_1P'_3P'_4$$
$$\Delta P_1P_2P_4 \overset{M}{\underset{\overline{\wedge}}{=}} \Delta P'_1P'_2P'_4 \longleftarrow \Delta P_1P_2P_4 \overset{1}{\underset{\overline{\wedge}}{=}} \Delta P'_1P'_2P'_4$$
$$O = P_1P'_1 \cap P_3P'_3 \cap P_4P'_4$$
$$M = P_1P'_1 \cap P_2P'_2 \cap P_4P'_4$$
$$\Longleftarrow O = M$$

لذلك،

$$\Delta P_2P_3P_4 \overset{O}{\underset{\overline{\wedge}}{=}} \Delta P'_2P'_3P'_4$$

ومن بديهية ٦، النقطة $P_2P_3 \cap P'_2P'_3$ تقع على خط واحد مع النقطتين A و B، حيث ان

$A = P_3P_4 \cap P'_3P'_4$

و

$B = P_2P_4 \cap P'_2P'_4$

لكن $AB = l$ ، لذلك

$P_2P_3 \cap P'_2P'_3 \in l$

$l \cap P_2P_3 = D$

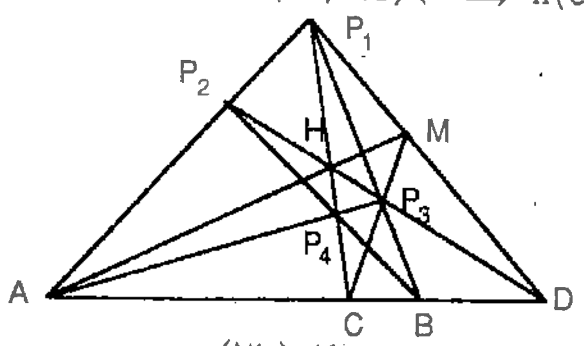
$l \cap P'_2P'_3 = D'$ ،

$\longleftarrow$ $D = D'$

مبرهنة ١٠

$H(AB, CD) \longleftrightarrow H(CD, AB)$

البرهان



شكل (١٢٠)

يمكن ان تبرهن هذه المبرهنة بايجاد رباعي زوايا تام الذي فيه C, D نقطتين قطريتين.

$H\ (AB,\ CD)$ $\longleftarrow$ يوجد رباعي زوايا تام $(P_1\ P_2\ P_3\ P_4)$ بحيث ان :

$A = P_1P_2 \cap P_3P_4$

$B = P_1P_3 \cap P_2P_4$

$C = P_1P_4 \cap l$

$D = P_2P_3 \cap l$

حيث ان A, B, C, D تقع على المستقيم l. نصل P_3C و P_1D.

لتكن
$$M = P_3C \cap P_1D$$
$$H = P_1P_4 \cap P_2P_3$$

من الواضح ان
$$\Delta P_2P_4H \overset{l}{\underset{\wedge}{=}} \Delta P_1P_3M$$

لان
$$B = P_2P_4 \cap P_1P_3$$
$$C = P_4H \cap P_3M$$
$$D = P_2H \cap P_1M$$

وان B, C, D على l.

من ثنائية بديهية ٦ ، يكون ΔP_1P_3M و ΔP_2P_4H منظورين من نقطة. بما ان $A = P_1P_2 \cap P_3P_4$ ، فان MH يمر من A. بهذا يكون عندنا رباعيٌ زوايا تام (P_1HP_3M) ، وفيه $D = P_1M \cap P_3H$, $C = P_1H \cap P_3M$ و $A = MH \cap l$ و $B = P_1P_3 \cap l$

ومن هذا نستنتج ان $H(CD, AB)$ وبنفس الطريقة نبرهن الاتجاه الآخر.

نتيجة

$$H(AB, CD) \longleftrightarrow H(CD, AB) \longleftrightarrow H(CD, BA) \longleftrightarrow H(DC, BA) \longleftrightarrow H(DC, AB) \longleftrightarrow H(AB, DC) \longleftrightarrow H(BA, DC) \longleftrightarrow H(BA, CD)$$

١١-٥ تمارين

١- برهن ان النقاط لمجموعة توافقية تكون مختلفة.

٢- من مبدأ الثنائية، عرف مجموعة توافقية من

مستقيمات.

٣- لتكن ثلاثة مستقيمات تمر بنقطة، جد المستقيم الرابع بحيث ينتج مجموعة توافقية من مستقيمات.

٤- برهن ان القطع الخطي لرباعي زوايا تام المتعين من مستقيم يحتوي على نقطة قطرية واحدة فقط هو حزمة من خمس نقاط.

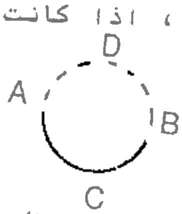
١١-٦ بديهيات الفصل *(Separation Axioms)*

نعرف مما تقدم ان المستقيم في المستوي الاسقاطي يحتوي على اربع نقاط في الاقل. وجود نقاط اكثر على المستقيم يتطلب بديهيات اضافية.

مجموعة جديدة من بديهيات تضمن وجود عدد غير منته من النقاط على المستقيم ترتبط مع المفهوم العام "للفصل" الذي نعرفه في حياتنا اليومية في حالات مثل غرفة في بيت تفصل عن غرفة اخرى بحائط، دولتين تفصل بينهما حدود دولية، قطعة من خيط تفصل الى جزئين بقطع واحد، او سلك دائري يفصل الى قطعتين بقطعين.

على المستقيم الاقليدي، نقطة واحدة C تفصل نقطة A من نقطة B بالمفهوم الذي فيه البداية من اي نقطة والتحرك باستمرار في نفس الاتجاه والمرور بالنقطة C.

هذا الوضع يختلف تماما، اذا كانت النقاط على دائرة



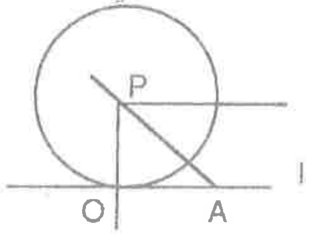
شكل (١٢١)

حيث ان A و B نهايتا قطعتان مختلفتان: واحدة، القطعة

بالخط الغامق، والاخرى، القطعة المنقطة. اذا كانت C في القطعة بالخط الغامق، يمكن التحرك من A الى B على القطعة المنقطة بدون المرور من C. لكن اذا وجدت نقطة D على هذه القطعة المنقطة، لايمكن التحرك من A الى B في اي اتجاه بدون المرور من واحدة او اخرى من النقطتين C او D.

هذا يعني ان نقطتين بدلا من واحدة تتطلب لفصل نقطتين على دائرة من زوج آخر من النقاط على الدائرة.

نفرض ان O نقطة على مستقيم l في المستوي الاقليدي و P مركز دائرة تمس l في O (كما في الشكل). فان اي مستقيم يمر من P يكون زاوية θ، $\theta \neq 90^\circ$ مع PO يقطع l في نقطة A. المستقيم الذي يصنع زاوية θ، $\theta = 90$ مع PO يكون موازيا الى l ومن ثم لايقطع l. ان هذا يفتقر الى تناظر متباين بين المستقيمات التي تمر من P ونقاط المستقيم I مثل عدم وجود جسر من جهة واحدة على نهر الى الجهة الاخرى. لاتوجد طريقة بواسطتها النقطة A تتحرك على المستقيم الاقليدي I الى يمين النقطة O وتستطيع الوصول الى نقطة في يسار O.



شكل (١٢٢)

في المستوي الاسقاطي، يختلف الوضع تماما. حيث يوجد جسر الى الجهة الاخرى، اذ كل مستقيم يمر من نقطة P للمستوي الاسقاطي يقطع l في نقطة A، و A تتحرك باستمرار من نقطة O، مستمرة في نفس الاتجاه، من الممكن ان ترجع A في آخر الامر الى نقطة البداية O

بالضبط كما لو كانت تتحرك على دائرة.

لذلك، المستقيم في المستوي الاسقاطي له خاصية دائرة، حيث يكون مثل منحني مغلق.

ان هذا يقودنا لفهم البديهيات التالية التي تتعلق بعلاقة اولية (غير معرفة) تدعى (الفصل). هذه البديهيات تصف ترتيب النقاط على دائرة، اي ان الفصل يكون لزوج من نقاط بزوج من نقاط.

رمز

الرمز AB / CD يستعمل ليرمز للفصل لزوج من نقاط A, B بزوج من نقاط C, D.

بديهيات الفصل (Separation Axioms)

بديهية ٧

الزوجان A, B و C, D لمجموعة توافقية من النقاط احدهما يفصل الآخر.

بتعبير آخر؛ اذا كان H(AB, CD) ، فان AB / CD.

بديهية ٨

اذا كان الزوجان A, B و C, D_1 احدهما يفصل الاخر وكذلك الزوجان A, D_1 و B, D_2 احدهما يفصل الآخر، فان الزوجين A, B و C, D_2 احدهما يفصل الآخر.

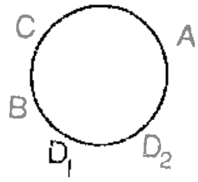
بتعبير آخر: اذا كان $AB / D_1 C$

و $A D_1 / D_2 B$

فان $AB / C D_2$

بديهية ٩

اذا كان الزوجان A, B و C, D احدهما يفصل الآخر، فان A, B, C, D نقاط مختلفة



شكل (١٢٣)

والان يمكن ان نعرف قطعة لمستقيم اسقاطي:

تعريف ١١

لتكن A,B,C ثلاث نقاط معلومة على المستقيم l، فان مجموعة كل النقاط X بحيث ان AB//CX هي قطعة المستقيم التي تكون A و B نهايتيها. الرمز AB//C يستعمل ليرمز لقطعة لاتحتوي النقطة C.

مبرهنة ١١

القطعة AB // C هي مجموعة غير خالية.

البرهان

لتكن A, B, C ثلاث نقاط على مستقيم l.
من مبرهنة ٨، يمكن ايجاد نقطة D التي هي مرافق توافقي الى C بالنسبة الى A و B. هذا يعني، H(AB, CD)، ومن بديهية ٧، AB / CD

ومن ثم، تقع D على قطعة المستقيم AB//c.

تعريف ١٢

مجموعة من نقاط $D_1, D_2, \ldots, D_n$ على مستقيم 1 يحتوي على ثلاث نقاط معلومة A, B, C تكون متتابعة توافقية (harmonic seqence) اذا كانت نقطة D_1 هي مرافق توافقي لواحدة من النقاط A, B, C بالنسبة الى النقطتين الاخريتين.
واي نقطة تتبع نقطة D_1 هي مرافق توافقي لاي واحدة من النقاط التي تسبقها من المتتابعة بالنسبة الى نقطتين آخريتين تسبقها في المتتابعة.
ان بديهيات الفصل ستستعمل الان لبيان ان المستقيم في المستوي الاسقاطي يحتوي على عدد غير منته من النقاط $D_1, D_2, \ldots, D_n$ التي تكون متتابعة توافقية بالاعتماد على تعريف ١٢.

مبرهنة ١٢

كل مستقيم في المستوي الاسقاطي يحتوي على عدد غير منته من نقاط.

البرهان

لتكن A, B, C ثلاثة نقاط معلومة على مستقيم معلوم 1. من مبرهنة ٨، يمكن ايجاد نقطة D_1 بحيث ان $H_1(AB, CD_1)$
وكذلك توجد نقطة D_2 بحيث ان $H_2(AD_1, CD_2)$ ،
وهكذا نستمر، فتوجد نقاط $D_3, \ldots, D_n$ على 1 بحيث ان $H_3(AD_2, D_3D_1), \ldots, H_n(AD_{n-1}, D_n D_{n-2})$

يجب ان نبين ان كل نقطة D_j من المتتابعة التوافقية $A, B, C, D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$ تختلف عن النقطة التي تسبقها. لعمل ذلك، يكفي ان نبين انه لاي عدد صحيح $1 < j \leq n$ ، فان D_j تختلف عن D_r ، حيث $1 \leq r < j$.

من بديهية ٧، نستنتج العلاقات التالية:

$(1) \ldots AD_j / D_{j+1} \quad D_{j-1}$

$(2) \ldots AD_{j-1} / D_j \quad D_{j-2}$

$(3) \ldots AD_{j-2} / D_{j-1} \quad D_{j-3}$

$(K) \ldots AD_{j-k+1} / D_{j-k+2} \quad D_{j-k} \quad \ldots\ldots (k)$

من (1) وبديهية ٩، $D_j \neq D_{j-1}$

من (1) و (2) وبديهية ٨،

$(K+1) \ldots AD_j / D_{j+1} \quad D_{j-2}$

ومن بديهية ٩، $D_j \neq D_{j-2}$

من (2) و (3) وبديهية ٨،

$(K+2) \ldots AD_{j-1} / D_j \quad D_{j-3}$

والتي مع (1) وبديهية ٨، يكون

$(K+3) \ldots AD_j / D_{j+1} \quad D_{j-3}$

ومن بديهية ٩، $D_j \neq D_{j-3}$

بنفس الطريقة، يمكن ان نبين باستعمال k من العلاقات، حيث $k = j-1$ وبديهية ٨، يكون

$AD_j / D_{j+1} \quad D_1$

ومن بديهية ٩، $D_j \neq D_1$

من هذا نستنتج ان النقاط $D_1, D_2, \ldots, D_n$ مختلفة.

وبما ان عدد هذه النقاط غير منته، فان المستقيم l يحتوي على عدد غير منته من النقاط، وبما انه يمكن ايجاد تناظر متباين بين المستقيم l واي مستقيم آخر في المستوي، فان اي مستقيم يحتوي على عدد غير منته من النقاط.

١١-٧ بديهية الاستمرارية (A Continuity Axiom)

مع كل نقطة في الهندسة الاسقاطية يقرن عددا يدعى احداثي النقطة بدون استخدام مفهوم المسافة. سنقدم هذا في الفصل القادم. على كل حال، ملاحظات قليلة عن هذا الربط تحث على اضافة البديهية الاخيرة للبديهيات الحالية.

في برهان المبرهنة ١٢، لقد وجدت النقاط $D_1, D_2, \ldots, D_n$ على المستقيم l الذي يحتوي النقاط المعلومة A, B, C. من الممكن ايجاد تناظر متباين بين هذه النقاط ومجموعة الاعداد الصحيحة.

$-r, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n$.

اولا، الاحداثيات $0, 1, \infty$ نقرنها على التوالي مع النقاط A, B, C، ومن ثم النقاط المتعاقبة $D_1, D_2, \ldots, D_n$ تقرن على التوالي مع الاحداثيات $2, 3, \ldots, n+1$ هذا يعني، اذا كانت، النقطة تناظر العدد الصحيح n يرمز لها $P(n)$، $P(1)$ هي مرافق

توافقي الى $P(\infty)$ بالنسبة الى $P(0)$ و $P(2)$، $P(3)$ هي المرافق التوافقي الى $P(\infty)$ بالنسبة الى $P(2)$ و $P(4)$، وهكذا. كذلك $P(0)$ هي المرافق التوافقي الى $P(\infty)$ بالنسبة الى $P(-1)$ و $P(1)$.

$P(-1)$ هي المرافق التوافقي الى $P(\infty)$ بالنسبة الى $P(-2)$ و $P(0)$ والخ.

اذا كان n احداثي $P(n)$، نجد برسم الشكل ان النقاط ..... ,$P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ ليست متساوية البعد فيما بينهما كما عندما الاحداثي يمثل المسافة من نقطة ثابتة على الخط.

توجد فجوات بين النقاط في الشكل. اذا وجدت نقاط بينهما، كما نرغب مستقبلا، فان وجودها يجب ان يؤكد بديهيا.

ستملأ هذه الفجوات في ولكل عدد نسبي m/n، حيث m, n عددين صحيحين موجبين، يناظر نقطة $P(m/n)$ على الخط. المجموعة الجديدة من النقاط تدعى الشبكة النسبية المتعينة من النقاط الثابتة $P(0)$, $P(1)$, $P(\infty)$.

ان هذه العملية لاتزود لنقاط $P(x)$، حيث ان X عدد غير نسبي، ولذلك سنأخذ البديهية الاخيرة - بديهية الاستمرارية - التي تخص هذا الموضوع، والتي تتضمن نظام الاعداد الحقيقية الموسع الذي يحتوي مجموعة الاعداد الحقيقية مع ∞ و$-\infty$.

بديهية ١٠. (بديهية الاستمرارية)

يوجد مستقيم اسقاطي l يحتوي على مجموعة من نقاط متشاكلة تقابليا (isomorphic) مع مجموعة اعداد لنظام الاعداد الحقيقية الموسع.

من هذه البديهية من الممكن ايجاد تناظر متباين بين نقاط المستقيم الاسقاطي واعداد نظام عددي هو

نظام الاعداد الحقيقية.

نقرن العدد X مع نقطة P للمستقيم يدعى احداثي النقطة. ويرمز للنقطة $P(X)$.

عندما يستخدم نظام الاعداد الحقيقية، فان النقطة $P(x)$ يقال عنها حقيقية، والنقطة التي تقرن مع الرمز ∞ تدعى عادة النقطة المحاذية $P(\infty)$ للمستقيم.

مجموعة الاعداد الحقيقية الموسعة غير مناسبة في الهندسة الاسقاطية طالما المستقيم في الهندسة الاسقاطية له خاصية دائرة. بدلا من ذلك، نأخذ $\{R,\infty\}$ التي نحصل عليها بأخذ $\infty = -\infty$.

وبذلك، فان المستوي الاسقاطي يحتوي على مستقيم يتضمن مجموعة نقاط متشاكلة تقابليا مع المجموعة $\{R,\infty\}$.

١١-٨ المنظورية والاسقاطية (Perspectivity and Projectivity)

ان هدف الهندسة الاسقاطية هو دراسة الخواص الهندسية لشكل يسقط من نقطة ما الى شكل آخر.

نفرض ان شكلاF يتضمن دائرة في مستويM ومستقيم يقطع الدائرة في نقطتين A, B. فانه، اذا وصلنا كل نقطة من الشكل F بنقطة O لاتقع على M بخط مستقيم، مستوي آخر 'M سيقطع كل من هذه الخطوط بنقطة. الشكل الناتج 'F من نقاط هو صورة، او اسقاط الشكل الاصلي.

من هذه العملية، يوجد تناظر بين نقاط F ونقاط 'F بحيث كل نقطة من شكل تناظر نقطة واحدة فقط من الشكل الآخر.

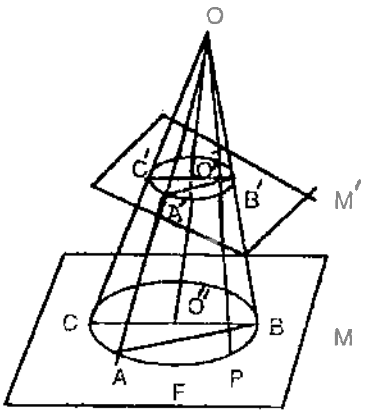
اذا اسقط 'F من نقطة اخرى 'O الى مستوي ثالث، فانه ينتج شكلا جديدا ''F، ويوجد ايضا تناظر

متباين بين F' و F'' ، ومن ثم بين F و F''. هذا التناظر الاخير يدعى تناظر اسقاطي.

التناظر الاسقاطي الخاص الذي فيه الخطوط الواصلة بين النقاط المتناظرة تلتقي بنقطة واحدة يدعى منظوريا.

بهذا، كل المنظوريات هي تناظرات اسقاطية، لكن ليس كل التناظرات الاسقاطية هي منظوريات.

نختبر الشكلين F و F' لملاحظة الخواص التي لاتتغير بالاسقاط. الخط المستقيم AB في F يناظر الخط المستقيم A'B' في F' ، والخطان، مثل AB و AP المتقاطعين يكونا بعد اسقاطهما خطين متقاطعين. وكذلك، نقاط على خط، مثل، C, O'', B تسقط الى نقاط C', O', B' ، والتي تقع ايضا على خط، لذلك النقاط المستقيمة والخطوط المتقاطعة هي خواص لشكل لايتغير بالاسقاط.



شكل (١٢٤)

تدعى هذه خواص اسقاطية كما في التعريف التالي:

تعريف ١٣

خاصية شكل لاتتغير باي اسقاط تدعى خاصية اسقاطية.

طول قطعة مستقيم ليس له صفة اسقاطية.

مسافة، طول، زاوية، ومساحة، كل هذه مفاهيم قياسية ومبرهنات تتعلق بهذه المفاهيم تدعى مبرهنات قياسية، فمثلا، مبرهنة فيثاغورس هي قياسية، كما في معظم مبرهنات الهندسة الاولية.

تصنف الاشكال الى نوعين: اسقاطية او قياسية. فمثلا، المثلث هو شكل اسقاطي، طالما المثلث يسقط الى مثلث، على فرض ان مركز الاسقاط لايقع في مستوي المثلث. مثلث متساوي الساقين، ربما يسقط الى مثلث غير متساوي الساقين وكذلك المثلث المتساوي الاضلاع، لذا هي قياسية، ليست اسقاطية. كذلك، بما ان بعض الدوائر تسقط الى اهليلج، فالخاصية كونها دائرة ليست اسقاطية. ان الهندسة الاسقاطية بالاساس تتعلق بالاشكال التي لها خواص اسقاطية اي الاشكال التي لاتتغير بعملية الاسقاط.

تعريف ١٤

شكلان F و F' في π يكونان منظورين من نقطة O اذا كانت النقاط في F في تناظر متباين مع نقاط F' بحيث ان كل المستقيمات الواصلة بين النقاط المتناظرة تمر بنقطة O، التي هي مركز المنظورية.

يرمز لهذا بالرمز

$$F \overset{O}{\underset{\overline{\overline{\wedge}}}{}} F'$$

ثنائي تعريف ١٤

شكلان F و 'F يكونان منظورين من مستقيم l اذا كانت المستقيمات في F في تناظر متباين مع مستقيمات 'F بحيث ان نقاط تقاطع المستقيمات المتناظرة تقع على المستقيم l، يدعى l محور المنظورية.

يمكن ان يعبر عن هذا بالرمز:

$$F \overset{l}{\underset{\bar{\bar{\Lambda}}}{}} F'$$

فمثلا، في تعريف ١٤ ، ليكن

$F = \{ A, B, C, \ldots \in l\}$

$F' = \{A', B', C', \ldots \in m\}$

وان $F' \overset{O}{\underset{\bar{\bar{\Lambda}}}{}} F$ بحيث ان A تناظر 'A ، B تناظر 'B ، وهكذا، فاننا نكتب:

$$A, B, C, \ldots \overset{O}{\underset{\bar{\bar{\Lambda}}}{}} A', B', C', \ldots$$

يؤدي هذا الى:

$$AA' \cap BB' \cap CC' \cap \ldots = O$$

بنفس الطريقة، اذا كان $F = l$ و $F' = m$ ، فان

$$l \overset{O}{\underset{\bar{\bar{\Lambda}}}{}} m$$

يعني ان نقاط l تكون في حالة تناظر مع نقاط m والمستقيمات الواصلة بين النقاط المتناظرة تمر بنقطة O.

كذلك يرمز $l \overset{O}{\underset{\bar{\bar{\Lambda}}}{}} m$ للتطبيق من l الى m بحيث ان

صورة $P \in l$ هي النقطة $OP \cap m \in m$.

من الواضح انه اذا كان $l \cap m = X$ و $l \overset{O}{\bar{\bar{\wedge}}} m$
فان نقطة التقاطع X تناظر نفسها، اي ان صورة X بموجب هذا التطبيق هي النقطة $X \in m$.

يؤدي هذا ايضا الى ان المنظورية تكون دائما في تناظر متباين وشامل، وان معكوسها يكون منظوريا ايضا. جد مثالا حول المنظورية من مستقيم.

لتكن l, m, n مستقيمات بحيث ان

$$l \overset{O}{\bar{\bar{\wedge}}} m \quad \text{و} \quad m \overset{O'}{\bar{\bar{\wedge}}} n$$

سنرمز للتطبيق من l الى n بالرمز :

$$l \,\bar{\wedge}\, n$$

الذي نحصل عليه من تركيب منظوريتين، اي ان صورة $P \in l$ هي النقطة $O'P' \cap n \in n$ ، حيث ان $P' = OP \cap m$

ان التطبيق $l \,\bar{\wedge}\, n$ ليس منظوريا، لان المستقيمات الواصلة بين النقاط المتناظرة مثل P, P' ربما لاتمر من نقطة مشتركة. ان هذا التطبيق يدعى اسقاطيا.

تعريف ١٥

الاسقاطية هي تطبيق لمستقيم l الى مستقيم n يعبر عنه كتركيب لسلسلة منتهية منظوريات.

بما ان المنظوريات دائما متباينة وشاملة، فانه من الواضح ان الاسقاطية تكون كذلك.

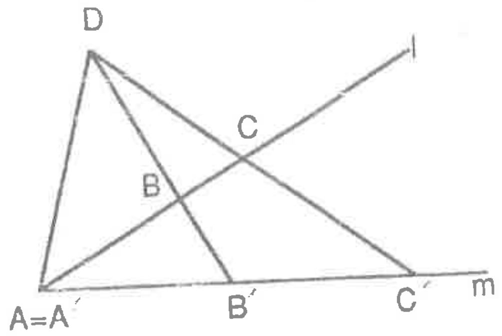
مبرهنة ١٣

لتكن A, B, C ثلاث نقاط مختلفة على مستقيم l

و 'C' , B' , C ثلاث نقاط مختلفة على مستقيم m، فانه توجد اسقاطية $m \bar{\wedge} l$ بحيث ان A تناظر 'A، B تناظر 'B ، و C تناظر 'C.

البرهان

الحالة (١)



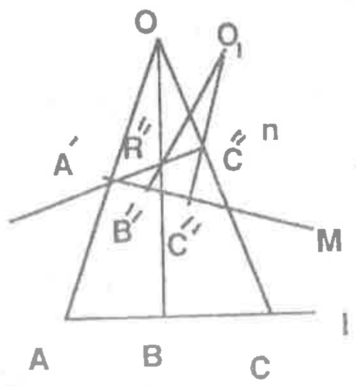
شكل (١٢٥)

اذا كان $A = A'$

نصل 'B, B و 'C, C ولتكن O نقطة تقاطع 'BB و 'CC.

فان $A', B', C' \overset{O}{\bar{\bar{\wedge}}} A, B, C$

الحالة (٢)



(شكل ١٢٦)

$l \neq m$ ولاتوجد اي نقطة من هذه النقاط مشتركة بين l و m.

لتكن O نقطة على المستقيم 'AA، و n مستقيما يختلف

عن كل من l و m ويحتوي على A'.

من O تسقط B, C الى n لذلك C'' ، B'' هما النقطتين المناظرتين على n. نصل B', B'' و C', C'' و لتكن $O_1 = B'B'' \cap C'C''$ ،

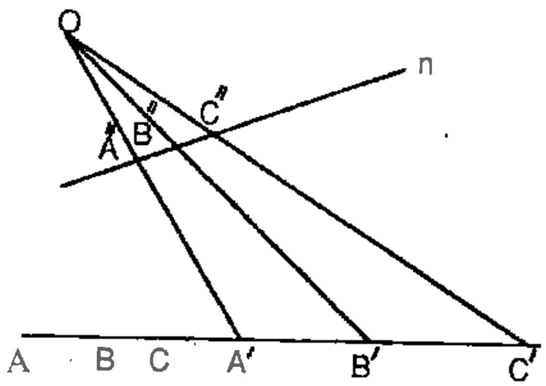
فان

$$A\ B\ C \ \overset{O}{\overline{\overline{\wedge}}}\ A'\ B''\ C'' \ \overset{O_1}{\overline{\overline{\wedge}}}\ A'B'C'$$

لذلك

$$A\ B\ C \ \overline{\overline{\wedge}}\ A'\ B'\ C'$$

الحالة (٣)



شكل (١٢٧)

اذا كان $l = m$

ليكن n مستقيما يختلف عن l. نأخذ نقطتين A'', B'' على n

ولتكن $O = A'A'' \cap B'B''$

نصل OC ، ولتكن $C'' = OC' \cap n$

لذلك، $A''\ B''\ C'' \ \overset{O}{\overline{\overline{\wedge}}}\ A'\ B'\ C'$

مثال

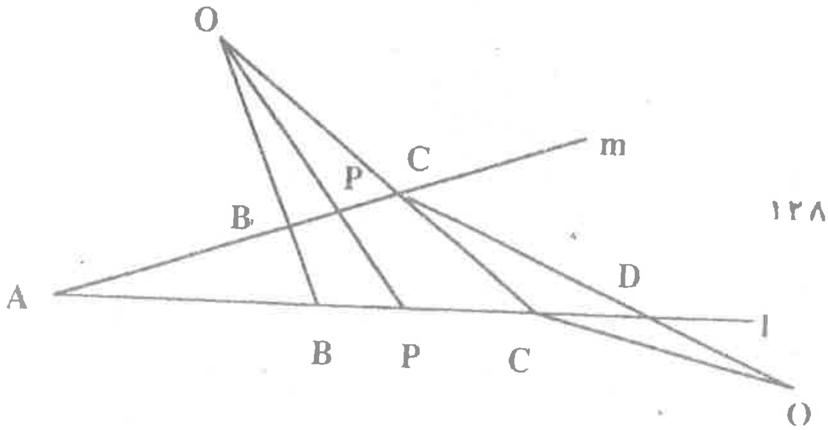
لتكن A, B, C, D اربع نقاط مختلفة على مستقيم
1. جد الاسقاطية $ABC \,\Pi\, ACD$ وجد النقطة التي تناظر اي نقطة P على l بموجب هذه الاسقاطية.
ليكن l و m مستقيمين يمران من A.
لتكن B', C' نقطتين آخريتين على m.
لتكن $O = BB' \cap CC'$

لذلك $ABC \xrightarrow[\Pi]{O} AB'C'$

لتكن $O' = B'C \cap C'D$

فان $AB'C' \xrightarrow[\Pi]{O'} ACD$

اي ان $ABC \xrightarrow[\Pi]{O} AB'C' \xrightarrow[\Pi]{O'} ACD$



شكل ١٢٨

بتطبيق الحالة ٢،

$ABC \;\pi\; A''B''C''$

لذلك، فان

$ABC \;\pi\; A'B'C'$

ومن هذا نستنتج ان $A\,B\,C \bar{\wedge} A\,C\,D$
النقطة المناظرة الى P هي النقطة $O'P'$ ∩ l حيث
$P' = m \cap O\,P$.

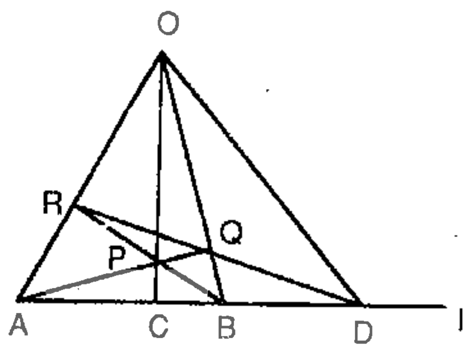
مبرهنة ١٤

اذا كانت A, B, C, D تكون مجموعة توافقية من نقاط على مستقيم l، فان القطع النقطي الى H(AB, CD) من نقطة O لاتقع على l هو مجموعة توافقية من مستقيمات.

بتعبير آخر:

المستقيمات التي تصل مجموعة توافقية من نقاط A, B, C, D على مستقيم l ونقطة O لاتقع على l هي مجموعة توافقية من مستقيمات.

البرهان



شكل(١٢٩)

لتكن A, B, C, D نقاط على l بحيث ان H(AB,CD) . ولتكن O نقطة لاتقع على l.

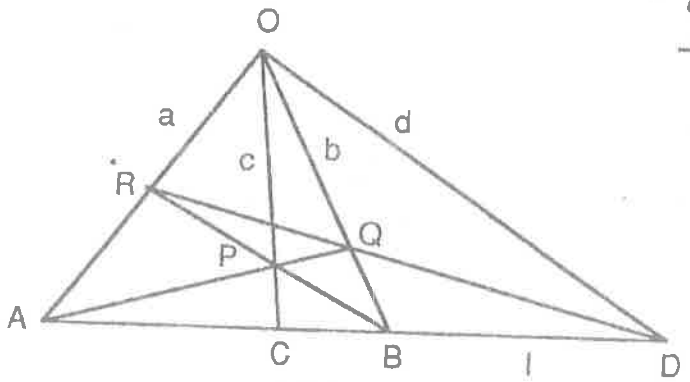
نرسم من A خطا يقطع OC و OB في نقطتين P و Q، على التوالي. وليكن BP يقطع OA في نقطة R. فانه يتكون رباعي زوايا تام (PQRO) وقطريه A و B حيث ان $A = PQ \cap OR$ ، $B = PR \cap OQ$ و $C = Op \cap l$. بما ان

النقطـــة التوافقيـــة الرابعـة وحيدة، فـان RQ يمـر من D، المستقيمـات BR, RD, AQ, AD تكون رباعي اضلاع وفيـه:
OA و OB خطين قطريين، بمـا ان OC و OD هما المستقيمان الواصلان بين O والراسين P و D، على التوالي، فـان المستقيمات OA, OB, OC, OD تكون مجموعة توافقية.

مبرهنة ١٥ (ثنائية مبرهنة ١٤)

اذا كانت a, b, c, d تكون مجموعة توافقية من مستقيمات تمر من نقطة O، فـان نقاط تقاطع هذه المستقيمات مع مستقيم l لايمر من O هي مجموعة توافقية من نقاط.
بتعبير آخر:
نقاط تقاطع مجموعة توافقية من مستقيمات a, b, c, d تمر من نقطة O مع مستقيم l بحيث ان $l \not\ni O$ هي مجموعة توافقية من نقاط.

البرهان



شكل (١٣٠)

ليكن
$A = a \cap l$ ،$B = b \cap l$ ، $C = c \cap l$ و $D = d \cap l$

ليكن m خطا اخرا يمر من A.

لتكن $P = m \cap CO$ و $Q = m \cap BO$

وبذلك يكون عندنا رباعي اضلاع، اضلاعه:

AD, DQ, PQ, PB وقطريه OA و OB.

لذلك، فان الضلعين DQ و PB يتقاطعان في نقطة R على OA.

ويكون عندنا رباعي زوايا (PQRO)، وفيه A و B نقطتين قطريتين، والضلعين من النقطة القطرية الثالثة يقطعان l في النقطتين C و D.

لذلك تكون A, B, C, D مجموعة توافقية من نقاط.

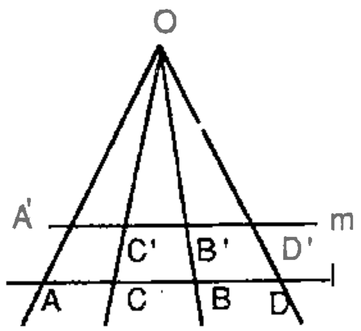
مبرهنة ١٦

الاسقاطية تحفظ الخاصية التوافقية

بتعبير آخر:

اسقاط مستقيم الى مستقيم آخر يرسل مجموعة توافقية من نقاط الى اية مجموعة اخرى توافقية من نقاط.

البرهان



شكل (١٣١)

لتكن A, B, C, D اربع نقاط على مستقيم l بحيث ان H(AB, CD). ولتكن $l \overset{O}{\bar{\bar{\wedge}}} m$

فان صور A, B, C, D هي A', B', C', D'، على التوالي التي هي القطع الخطي للمستقيمات OC, OD، OA, OB من المستقيم m. اي أن

$B' = OB \cap m$ ، $A' = OA \cap m$

$C' = OC \cap m$ و $D' = OD \cap m$.

ليكن $d = OD,\ c = OC,\ b = OB,\ a = OA$

بما ان H(AB, CD) ، فانه من مبرهنة ١٤، يكون H(ab, cd)

ومن مبرهنة ١٥، يكون H(A'B', C'D').

بهذا فقد برهنا، اذا كان H(AB, CD)

و A',B', C', D' $\overset{O}{\bar{\bar{\wedge}}}$ A B C D فان H(A'B', C' D)

، اي ان المنظورية تحفظ الخاصية التوافقية. بما ان الاسقاطية هي ببساطة تركيب لسلسلة منتهية من منظوريات، فان الاسقاطية تحفظ الخاصية التوافقية.