

جامعة بغداد

كلية التربية للعلوم الصرفة (ابن الهيثم)

قسم الفيزياء

المرحلة الرابعة

المادة: الميكانيك الكمي

عدد الساعات الاسبوعية: 3

التدريسي: د. عقيل رزاق صالح

مفردات فيزياء الكم

الصف الرابع

عدد الساعات الاسبوعية ٣

١ - الأسس الفيزيائية للميكانيك الكمي

ما الميكانيك الكمي ، لماذا الميكانيك الكمي ضروري ، ازدواجية الجسم و الموجة للاشعاع الكهرومغناطيسي ، المظهر الموجي للجسيمات المادية ، مبدأ اللادقة لهايزنبرك ، مبدأ التقابل

٢ - الصفات الاولية للميكانيك الكمي

مقدمة ، دالة الموجة وتفسيرها - ، اشتقاق معادلة شرودنكر ، معادلة الموجة لشرودنكر ، المؤثرات ، الدوال العيارية ، القيم الذاتية ، الدوال الذاتية ، القيم المتوقعة ، الدوال الذاتية وثوابت الحركة ، حل معادلة شرودنكر المعتمدة على الزمن ، صفات مستويات الطاقة ودوال الموجة ، خواص المؤثرات انخفاض الاحتمالية ، الحالات المكتملة التماثل .

٣ - الجسيم الحر

مقدمة ، معادلة شرودنكر في بعد واحد ، منخفض الجهد والجدران الصلدة ، الجسيم الحر في ، صندوق الجهد ذي الابعاد الثلاثة كثافة الحالات ، الانعكاس والنفوذ ومن خلال جهد منخفض ، الجهد بارتفاع محدود .

٤ - التذبذب التوافقي الخطي

مقدمة ، الدالة الهاملتونية ، معادلة شرودنكر ، حل معادلة شرودنكر ، مستويات الطاقة والدوال الموجية ، قوانين الانتقاء ، الدوال الموجية للمتذبذب التوافقي التعامد والعيارية ، مقارنة النظرية الكلاسيكية مع النظرية الكمية .

٥- الذرة احادية الالكترون

الجهد المتناظر ، حل المعادلة التفاضلية ، دالة الموجة ، ذرة الهيدروجين ،
الزخم الزاوي ، مقارنة مع النظرية الكلاسيكية ، برم الالكترون ، معطوفات
باولي وتطبيقاتها على برم الالكترون .

٦- طرق التقريب

- أ- نظرية الاضطراب ، التقريب الاول ، الحالة غير المنحلة ،
التقريب الثاني ، الحالة المنحلة ، احتمالية الانتقال ، تطبيقات على
نظرية الاضطراب
ب- طريقة التقريب - التطبيقات
ج- طريقة التغير - التطبيقات

المصادر :

- ١- الميكانيك الكمي : تأليف الدكتور جاسم الحسيني والدكتور عبد السلام
عبد الامير
٢- اساسيات ميكانيك الكم : تأليف الدكتور سالم حسن الشماع والدكتور
امجد عبد الرزاق كرجية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

الميكانيك الكمي

تأليف

الدكتور عبد السلام عبد الأمير عباس
قسم الفيزياء - كلية العلوم
جامعة بغداد

الدكتور جاسم محمد الحسيني
قسم الفيزياء - كلية العلوم
جامعة بغداد

$$\int \psi^* F \psi dt = \int \psi (F \psi)^* dt$$

الطبعة الأولى

1400 هـ - 1980 م

حقوق الطبع محفوظة بجامعة بغداد

طبعة كلية العلوم

- 1-1 الأُس الفيزيائية للميكانيك الكمي 1
- 1-1 ما الميكانيك الكمي ؟ 2-1 لماذا الميكانيك الكمي ضروري ؟ 3-1 ازدواجية الجسيم والموجة للاشعاع الكهرومغناطيسي .
- 4-1 المظهر الموجي للجسيمات المادية . 5-1 مبدأ اللادقة لها يرتبرك . 6-1 مبدأ التقابل .
- 2- الصفات الاولية للميكانيك الكمي 29
- 1-2 دالة الموجة وتفسيرها . 2-2 اشتقاق معادلة شرودنكر . 3-2 معادلة الموجة لشرودنكر - المؤثرات . 4-2 الدوال العيارية . 5-2 القيم الذاتية والدوال الذاتية لـ x و p_x . 6-2 القيم المتوقعة - التباوت . 7-2 الدوال الذاتية وثابت الحركة . 8-2 حل معادلة شرودنكر المعتمدة على الزمن . 9-2 صفات مستويات الطاقة ودوال الموجة - الانحلال . 10-2 خواص المؤثرات . 11-2 انحفاظ الاحتمالية وتيار الاحتمالية . 12-2 الحالات المكمية . 13-2 التماثل .
- 3- المتذبذب التوافقي الخطي 92
- 1-3 مقدمة . 2-3 حل معادلة شرودنكر . 3-3 مستويات الطاقة والدوال الموجية . 4-3 الدوال الموجية للمتذبذب التوافقي متعامدة وعيارية . 5-3 مقارنة النظرية الكلاسيكية مع النظرية الكميية .

الصفحة

- 115 4- الجسم الحر
- مقدمة 1-4
 - معادلة شرودنجر في بعد واحد 2-4
 - خفض الجهد ذو الجدران الصلبة 3-4
 - الجسم الحر في صندوق الجهد ذي الأبعاد الثلاثة 4-4
 - كثافة الحالات 5-4
 - الانعكاس والنفوذ عن ومن خلال حاجز جهد 6-4
 - خفض الجهد المستطيل بارتفاع محدود
- 153 5- الذرة الاحادية الالكترون
- 1-5 الجهد التاثير كرويا 2-5
 - حل المعادلة التفاضلية 3-5
 - دالة الموجة $u(r, \theta, \phi)$ 4-5
 - ذرة الهيدروجين 5-5
 - الزخم الزاوي 6-5
 - مقارنة مع النذرية الكلاسيكية 7-5
 - بهم الالكترون
- 195 6- نظرية الاضطراب
- مقدمة 1-6
 - التقريب الاول لنظرية الاضطراب - الحالة غير المضلة 2-6
 - التقريب الثاني لنظرية الاضطراب 3-6
 - الحالة المضلة 4-6
 - احتمالية الانتقال 5-6
 - تطبيقات على نظرية الاضطراب
- 235 ملحق رقم (1)
- 243 ملحق رقم (2)

الصفحة

248	ملحق رقم (3)
250	المصادر
253	بعض المصطلحات الأجنبية وما يقابلها بالعربية

جامعة بغداد/ كلية التربية للعلوم الصرفة (ابن الهيثم)

قسم الفيزياء/ المرحلة الرابعة

المادة: الميكانيك الكمي

التدريسي : د. عقيل رزاق صالح

الكتاب موجود في التعليم المجاني في الكلية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة بغداد

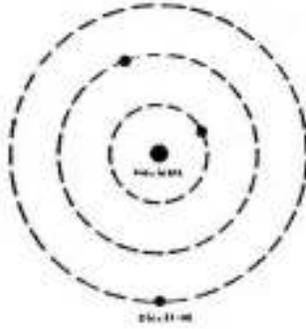
الميكانيك الكمي

تأليف

الدكتور عبد السلام عبد الأمير عباس
قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة بغداد

الدكتور جاسم محمد الحسيني
قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة بغداد

1980



الشكل (1 - 1)

والمعروف أيضا ان عدد البروتونات في النواة يساوي دائما عدد الالكترونات المتحركة حول النواة وعلى هذا فان الذرة على العموم هي منظومة System (أو كيان) متعادل كهربائيا .

ان الاختلاف بين ذرات العناصر المختلفة يعرّب الى اختلاف عدد الالكترونات التي تحويها كل من هذه الذرات ، وأبسط الذرات هي ذرة الهيدروجين التي تحتوي على إلكترون واحد، فقط ومعدّها تأتي ذرة الهيليوم التي تحتوي على إلكترونين وهلم جرا حتى نصل الى ذرات العناصر فوق اليورانيوم التي تحوي حوالي مائة الكترون عريبا .

ان النظرية الكلاسيكية والكهربائية كلاهما تكون أنظمة شظوية وغير متعارضة فيما بينها وهي تستند في الأساس على فرضيات يمكن التأكيد من صحتها بالتجربة ، وعلى ذلك فان إيجاد صيغة لنظرية جديدة كلها لا يكون ضروريا الا اذا وجدت تناقضات نوعيّة

الفصل الأول

الأسس الفيزيائية للميكانيك الكمي

The Physical Foundations of Quantum Mechanics

1-1 ما الميكانيك الكمي ؟

الميكانيك الكمي طريقة حساب جميع الظواهر الفيزيائية ، في كمال القياسين الذري والعياني (Macroscopic) ، وأنه كما سنرى - يستخدم طرقا أكثر انتظاما من الطرق المستخدمة في الفيزياء الكلاسيكية . ومن أهم ما يتصف به أنه عند معالجة الظواهر العيانية فان النتائج التي نحصل عليها من الميكانيك الكمي تتفق مع ما نحصل عليه من الميكانيك الكلاسيكي وهي حقيقة متوقعة طالما أن نتائج الميكانيك الكلاسيكي تتفق مع التجربة . أما في القياس الذري فان نتائج الميكانيك الكمي يمكن أن تختلف كثيرا عن نتائج الميكانيك الكلاسيكي . ولما كانت التطبيقات الأساسية للميكانيك الكمي هي في مجال الظواهر الذرية لذا فاننا سنقدم بصورة مختصرة النظرية الحديثة للتركيب الذري .

تتكون جميع أنواع المادة من ذرات كهرباء حوالي 10^{-10} m وتتكون الذرة الواحدة من نواة تحتل مركزها ويتحرك حولها عدد من الالكترونات - كما في الشكل (1-1) - كتلة كل منها تساوي 9.1×10^{-31} kg والالكترون الواحد يحمل شحنة كهربائية سالبة مقدارها 1.6×10^{-19} Coulomb ويرمز لها عادة بالرمز e . أما النواة فتتكون من عدد من البروتونات يحمل الواحد منها شحنة موجبة قيمتها العددية مساوية لشحنة الالكترون وعدد من النيوترونات المتعادلة الشحنة . وكتلة البروتون تساوي تقريبا كتلة النيوترون ، وكل منهما أثقل بكثير من الالكترون حيث تعادل كتلة البروتون بالتقريب 1840 مرة بقدر كتلة الالكترون .

كبيرة بين النظرية الكلاسيكية والتجربة والذي سنبه في الهند القادم .

2-1 لماذا الميكانيك الكمي ضروري ؟

أ . استقرار الذرة Stability of the Atom

التناقض الأساسي الأول يتعلق بالاستقرار الحقيقي لنموذج الذرة الذي وصفناه بصورة موجزة في الهند السابق . هنا على ما تقدم فإن الإلكترون في الذرة يدور حول النواة مغيرا اتجاه حركته باستمرار ولذا فهو جسم معجل . وفقا للنظرية الكهروضوئية الكلاسيكية فإن أي شحنة كهربائية متحركة يتم جعل تحت - بصورة لا تقبل الشك - اشعاعا كهروضوئيا . ولذلك فوجب أن يفقد الإلكترون الدائر حول النواة داخل الذرة جزءا من طاقته أثناء الدوران أي أنه يخسر طاقته بصورة مستمرة مادامت الحركة مستمرة وبالتالي فوجب أن ينتهي بحركة حلزونية مقترنة من النواة . لكننا لو تفقنا عن الحقيقة لوجدنا أن شيئا من هذا القبيل لا يحدث مطلقا . لان الذرة تحت الظروف الطبيعية تشكل مستقرا لا يبعث أي اشعاع . نغسر أنه تحت شروط خاصة ، مثل درجات الحرارة العالية ، وجد أنه يمكن أن تبعث الذرة لتبعث اشعاعا معينا يتصف عادة بطول موجة ذي قيم متوزعة ودقيقة جدا . بينما نجد أن النهج الكلاسيكي يتنبأ بأن طول الموجة هذا يتغير بصورة مستمرة أثناء اقتراب الإلكترون من النواة . ولنغرض التخلص من هذه التناقضات قدم العالم نيلز بوهر Niels Bohr الفرضيتين التاليتين :

الفرضية الأولى : يستطيع الإلكترون أن يدور في مدارات متميزة ومستقرة اذا كان زخم الزاوي يساوي حاصل ضرب عدد صحيح في مقدار ثابت قيمته 1.05×10^{-31} joule.sec أو $h/2\pi$.
الفرضية الثانية : يستطيع الإلكترون أن ينتقل من مدار الى آخر اذا حصل تغير في الطاقة ΔE بسبب امتصاص أو انبعاث في الاشعاع بحيث أن تردد الاشعاع يعطى

بالمعادلة :

$$\nu = \Delta E / h$$

وقد افترض بوهر أن الإلكترون يدور على مسار دائري مركزه النواة ونصف قطره r وسرعة زاوية ω . هنا على هذه الفرضيات نستطيع الان حساب النتائج المترتبة عليها بالنسبة لذرة الهيدروجين كما يلي :

اذا استخدمنا الأعدادات القطبية المستوية (r, θ) فإن الزخم الزاوي P_θ للإلكترون حول النواة يساوي $mr^2\dot{\theta}$ حيث $\dot{\theta} = d\theta / dt$. واستنادا الى الفرضية الأولى فوجب أن يكون :

$$P_\theta = mr^2\dot{\theta} = n\hbar$$

حيث n هو عدد صحيح وأخذ القيم 1 و 2 و 3 و \dots . وأوضح ان $\dot{\theta} = \omega$ السرعة الزاوية ω ولذا يمكن كتابة المعادلة المذكورة على النحو التالي :

$$mr^2\omega = n\hbar \quad (1-1)$$

ولما كانت قوة الجذب الاستاتيكي الكهربائي بين الإلكترون والنواة هي $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ، هذه القوة تزيدنا بالقوة الجاذبة نحو المركز والتي تساوي كتلة الإلكترون m في تعجيله المركزي $r\omega^2$ أي :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m\omega^2 r \quad (2-1)$$

وإذا حذفنا السرعة الزاوية ω بين المعادلتين (1-1) ، (2-1) وحل المعادلة الناتجة لـ r نحصل على :

$$T = \frac{me^4}{32\pi\epsilon_0^2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad \dots\dots (6-1)$$

والطاقة الكلية E_n هي :

$$E_n = V + T = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad \dots\dots\dots (7-1)$$

والخسارة في الطاقة عندما ينتقل الإلكترون في حالة متميزة بالعدد $n=n_1$ الى حالة متميزة بالعدد $n=n_2$ تعطى بالمعادلة :

$$\Delta E_{12} = \frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \quad \dots\dots\dots (8-1)$$

وتعما لفرضية بور الثانية فان تردد الأشعاع المطابق لانتقال الإلكترون من المدار n_1 الى المدار n_2 يعطى بالمعادلة :

$$\nu = \frac{\Delta E_{12}}{h} = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2\hbar^3} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \quad \dots\dots\dots (9-1)$$

وإذا عرفنا العدد الموجي $\bar{\nu}$ (Wave Number) بعدد التوجهات في المتر الواحد فان $\bar{\nu} = \frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda}$ حيث c سرعة الضوء في الفراغ و λ طول موجة الاشعاع ، وهو يعطى بالمعادلة التالية :

$$\bar{\nu} = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2\hbar^3} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} n^2 \quad \dots\dots (3-1)$$

والتعويض عن قيمة r من المعادلة (3-1) في المعادلة (1-1) وحل المعادلة الناتجة لـ ω نحصل على :

$$\omega_n = \frac{me^4}{16\pi^2\epsilon_0^2\hbar^3} \frac{1}{n^3} \quad \dots\dots\dots (4-1)$$

ومنه نجد أن هناك مجموعة واسعة من المدارات المستقرة عددها لانهاية يتميز بعضها عن البعض الاخر بتميز قيم n الممكنة المتعددة $n = 1, 2, 3, \dots$ كما هو واضح في المعادلتين (3-1) و (4-1) ولحساب الترددات الممكنة للأشعاع المنبعث حسب فرضية بور الثانية فيجب قبل كل شيء أن نتعرف على طاقة الإلكترون في مداره المستقر . فللكثرون طاقة كاملة V تساوي $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ وإذا عوضنا عن r من المعادلة (3-1) فان الطاقة الكلية تعطى بالمعادلة التالية :

$$V = -\frac{me^4}{16\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad \dots\dots\dots (5-1)$$

وأضافة الى الطاقة الكلية فتمتلك الإلكترون طاقة حركية T تساوي $\frac{1}{2}mv^2$ أو $\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$. وبالتعويض عن r و ω من المعادلتين (3-1) و (4-1) يمكن كتابة الطاقة الحركية على النحو التالي :

وإذا فرضنا أن :

$$R = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 ch^3}$$

فإن :

$$\bar{\nu} = R \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \dots\dots\dots (10-1)$$

حيث الثابت R يسمى بثابت ريدبيرك (Rydberg Constant) .

إن المعادلة (10-1) أعلاه تعتبر القياس الرئيسي لنجاح نظرية بور وذلك لأنها ماثلة لمعادلة تجريبية سبق أن توصل إليها العالم بالمسرح Balmer عام 1885 من قياسات أجزائها على طول الموجة في علم الطيف الذري .

إن نظرية بور وفرضياتها لا تكمل النظرية الكلاسيكية في الموضع الذي تكون فيه ناقصة بل هي بالأحرى تاقضها تماما . فالفرضية الأولى تؤكد وجود مدارات مستقرة للإلكترونات الدائرة حول النواة بينما النظرية الكلاسيكية تؤكد على عدم استقرار هذه المدارات . ومن الواضح فإن نظرية بور قد نجحت في تفسير الملاحظات التجريبية على الأشعاط المنبعثة لكنها لا تحولنا إلى نهاية الطريق بل علينا أن نجد نظرية موحدة تؤدي بشكل طبيعي إلى نتائج الفيزياء الكلاسيكية بالنسبة للظواهر المعاصرة وفي ذات الوقت تستطيع تفسير خاصية استقرار الذرة وطبقها وهذا ما سنبحث به ونتوصل إليه في الفصول القادمة عن طريق قواعد الميكانيك الكمي ونظرياته .

The Photoelectric Effect

ب . الظاهرة الكهروضوئية

لقد اكتشفت هذه الظاهرة من قبل العالم هيرتز Hertz عام 1887 حين وجد بالتجربة أن الشحنات السالبة (الإلكترونات) تبعث عن سطح بعض

الفلزات عند سقوط الضوء عليها فاطلق على هذه الإلكترونات اسم الإلكترونات الضوئية (Photoelectrons) . وقد لوحظ أن الانبعاث الإلكتروني يتمشى بالخصائص التالية :

أولاً - عدم انبعاث الإلكترونات إذا كان تردد الأشعاع الساقط على الفلز أقل من تردد حرج ذي قيمة معينة ν_0 والذي يعتمد على طبيعة السطح .

ثانياً - إذا كان تردد الأشعاع ν أكبر من ν_0 فإن الطاقة الحركية للإلكترونات المنبعثة تتماثل $(\nu - \nu_0)$ حيث h هو ثابت مسام يسمى بثابت بلانك (Planck's Constant) وقيمته تساوي 6.55×10^{-34} joule.sec وأن مقدار الطاقة الحركية للإلكترونات المنبعثة يعتمد على شدة الأشعاع الواسع .

ثالثاً - بعض الإلكترونات تبعث من السطح خلال 10^{-8} في الثانية من سقوط الأشعاع .

وإن هل تستطيع الفيزياء الكلاسيكية تفسير هذه النتائج ؟ إن الفيزياء الكلاسيكية تعزى انبعاث الإلكترونات إلى امتصاصها الطاقة اللازمة للانبعاث من الأشعاع الساقط على سطح الفلز . ومن المعلوم أن الإلكترون يحتاج إلى طاقة إضافية ϕ_0 تسمى بدالة الشغل (Work Function) (والتي تعتمد هي بدورها على نوع الفلز) للخروج من الفلز . ودالة الشغل هذه عبارة عن مقدار الطاقة التي يحتاجها الإلكترون ليعبر إلى سطح الفلز بطاقة حركية مقدارها صفر . وهذه الظاهر فليس بالإمكان تفسير الخصائص الثلاث المذكورة للظاهرة الكهروضوئية للأشعاط الضوئية :

أولاً - ليس بالإمكان التنبؤ بوجود التردد الحرج ν_0 بحيث إذا كان تردد الأشعاع الساقط على سطح الفلز أقل من ν_0 أنعدم الانبعاث الإلكتروني .

ثانياً - تنبأ النظرية الكلاسيكية ان الالكترونات تترك السطح بطاقة حركية مقدارها صفر مهما كان تردد الأشعاع الساقط .

ثالثاً - تنبأ النظرية الكلاسيكية بأن الزمن اللازم لانعكاس الالكترون طاقة مقدارها W_0 (دالة الشغل) يزيد على 10 sec . وبحسب ذلك يتطابق تؤنهم من الميكانيك الكلاسيكي على عملية التصادم بين الضوء الساقط والالكترون داخل الفلز .

لتحضر حقائق الظاهرة الكهروضوئية فقد وضع العالم ألبرت أنشتاين نظرية Albert Einstein نظريته المشهورة ونجح جائزة نوبل في الفيزياء عام 1905 كإثبات له عليها والتي أنتزعت بأن الضوء ليس أشعاع مستمر من الامواج ولكنه يتكون من رزاق من الدقائق Corpuscles . أي أن النظرية تقترح ان الأشعاع يتكون أساساً من رزاق من جسيمات متشابهة تسمى بالفوتونات Photons وهي نفسها التي نادى بها بلانك عند دراسته لنظرية الأشعاع الحراري المنبعث من الاجسام الساخنة . إضافة الى ذلك فان طاقة الفوتون الواحد E تعطى بالمعادلة :

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad \dots\dots\dots (11-1)$$

حيث ω هو التردد الدائري Circular Prquency ويرتبط بـ ν بالمعادلة $\omega = 2\pi\nu$. وقد افترض أن انبعاث الالكترون يحصل نتيجة للتصادم بين الفوتون الساقط والالكترون الذي يمتص جميع طاقة الفوتون الساقط . هذه الطاقة تنفسق في عملتين : أولاها هي انتزاع الالكترون من بين ذرات الفلز ومن السطح أيضا مقدارها يساوي دالة الشغل W_0 وثانيها طاقة الالكترون الحركية $\frac{1}{2}mv^2$. أي أن :

$$h\nu = W_0 + \frac{1}{2}mv^2 \quad \dots\dots\dots (12-1)$$

وصيغة أخرى ان طاقة الفوتون الساقط تساوي الطاقة اللازمة للانفلات مضافا اليها طاقة الالكترون الحركية . والمعادلة (1-12) هي معادلة انشتاين المشهورة لتفسير الظاهرة الكهروضوئية وقد ثبت نجاحها في تفسير الحقائق التجريبية الثلاثة المذكورة أعلاه كما يلي :

أولاً - ينبعث الالكترون فقط عندما تكون الطاقة التي يمتصها من الفوتون الساقط أكبر من W_0 أي أن $h\nu > W_0$ حيث $h\nu = W_0$

ثانياً - اذا كان تردد الأشعاع الساقط ν أكبر من ν_0 فان الالكترون ينبعث بطاقة حركية تساوي $K.E. = h\nu - W_0$ والتي تساوي $h(\nu - \nu_0)$ أيضا .

ثالثاً - لا يوجد تأخير في الزمن بين سقوط الأشعاع وانبعاث الالكترون لان بعض الالكترونات تتأثر بالفوتونات حالما يبدأ تأثير الأشعاع الساقط .

قبل مناقشة التناقض الظاهري بين النظرية الموجية للضوء ونظرية الفوتونات الجدية منبثت ظاهرة أخرى لم تستطع النظرية الكلاسيكية تفسيرها بصورة مقبولة ألا وهي تأثير (أوظاغرة) كومبتن .

The Compton Effect

• تأثير كومبتن

تأثير كومبتن أو كما يسمى أحيانا باستطارة كومبتن Compton Scattering يفاده أن الأشعة السينية X - Rays اذا مسرت خلال صفيحة معدنية فان بعضها منها يستطار بحيث ان الأشعاع المستطار يختلف في طول موجته عن الأشعاع الساقط . فاذا كان λ طول موجة الأشعاع الساقط و λ' طول موجة الأشعاع المستطار خلال الزاوية θ فالتجارب تعطى صفا لتغير طول الموجة الناتجة التاليسمة :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) \quad \dots\dots (13-1)$$

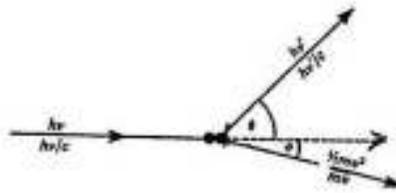
حيث c هي سرعة الضوء في الفراغ و m_0 كتلة المكون Rest Mass
للالكترون و h هو ثابت بلانك .

من المعروف أن التأثير اعلاه ينتج عن استقطار الأشعة السينية من قبل
الالكترونات الحرة في المعدن لكن النظرية الكلاسيكية عاجزة عن تقديم التفسير
الصحيح للتغير الحاصل في طول موجة الاشعاع والذي تعطيه المعادلة (13-1) .
وفي الحقيقة فان استقطار كوببتن هي دعم للنظرية الكمية اذا اعتبرنا الاشعاع عبارة
عن جسيمات ذات طاقة مكممة (Quantized) تماوى $h\nu$ وتمتطيطع
أن تتفاعل مع المادة دون أن تنص . ومن مبدأ تكافؤ الكتلة والطاقة
(Equivalence of Mass and Energy) فان طاقة الفوتون
 $h\nu$ تعادل كتلة مقدارها $h\nu/c^2$. وحيث أن الفوتون يتحرك بسرعة الضوء
 c فونبغي أن يكون له زخم مقداره :

$$P = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad \dots\dots\dots (14-1)$$

حيث λ هي طول موجة الاشعة السينية . وقد أعطى كوببتن الفوتونات خصائص
ميكانيكية كالطاقة والزخم والكتلة أثناء تصادمها مع الالكترونات الحرة في المادة واعتبر
التصادم مرنا Elastic Collision بحيث يمكن استخدام انحفاظ الزخم
والطاقة في عملية التصادم بين الفوتين الماقط والالكترون الحر في المادة .

ولغرض اشتقاق المعادلة (13-1) سنفترض فوتونا ماقطاً
طاقته $h\nu$ وزخمه $h\nu/c$ يتصادم تصادفاً مرنا مع إلكترون حر ساكن طاقته
 $m_0 c^2$ (Rest Energy) . بعد التصادم يستطير الفوتون بزاوية
مقدارها θ مع اتجاه الفوتون الماقط فتصبح طاقته وزخمه بعد التصادم $h\nu'$ ،
على التوالي بينما يرتد الالكترون باتجاه يصنع الزاوية ϕ مع اتجاه الفوتون
الماقط بكتلتها طاقته مقدارها W_0 وزخمها مقداره P_0 كما هو موضح في
الشكل (2-1) .



الشكل (2-1)

واستخدام قانوني انحفاظ الزخم بالطاقة لعملية تصادم كوببتن يمكن كتابة المعادلات
التالية :

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + P_0 \cos \phi \quad \dots\dots\dots (15-1)$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \theta - P_0 \sin \phi \quad \dots\dots\dots (16-1)$$

$$h\nu + m_0 c^2 = h\nu' + W_0 \quad \dots\dots\dots (17-1)$$

ويمكننا الآن حذف زاوية أرتداد الإلكترون θ من المعادلتين (15-1) و (16-1) وذلك بحل الأولى منها للحد $P_e \cos \theta$ والثانية للحد $P_e \sin \theta$ وتربيع المعادلتين الناتجتين ثم جمعها لتحصل على :

$$\frac{h^2 \nu^2}{c^2} - \frac{2h^2 \nu \nu'}{c^2} \cos \theta + \frac{h^2 \nu'^2}{c^2} = P_e^2$$

ومضرب طرفي هذه المعادلة في c^2 وإضافة وطرح الحد $2h^2 \nu \nu'$ الى طرفيها الايسر يمكن أن نكتب :

$$h^2 (\nu - \nu')^2 + 2h^2 \nu \nu' (1 - \cos \theta) = P_e^2 c^2 \quad \dots \dots (18-1)$$

أما حل المعادلة (17-1) ل W_e وتربيع الناتج فيعطينا

$$h^2 (\nu - \nu')^2 + 2h (\nu - \nu') m_0 c^2 + m_0^2 c^4 = W_e^2 \quad \dots \dots (19-1)$$

وحيث أن طاقة الإلكترون الكلية W_e وزخمه P_e يرتبطان تبعاً لجادى النظرية النسبية - بالعلاقة

$$W_e^2 = P_e^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad \dots \dots (20-1)$$

عندئذ يمكن حذف كل من W_e و P_e وذلك بطرح المعادلة (18-1) من المعادلة (19-1) ومن ثم التعويض عن $(W_e^2 - P_e^2 c^2)$ بالكمية $m_0^2 c^4$ لتحصل على :

$$2h (\nu - \nu') m_0 c^2 = 2h^2 \nu \nu' (1 - \cos \theta)$$

والتي بالامكان كتابتها على النحو التالي :

$$\frac{(\nu - \nu') c}{\nu \nu'} = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta)$$

وسهلة يمكن أن نهيمن أن المقدار في الطرف الايسر من المعادلة اعلاه يساوى $(\lambda' - \lambda) \cdot$ وأخيراً نحصل على المعادلة الخاصة باستطارة كوببتن وهي

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) \quad \dots \dots (13-1)$$

ويبين من المعادلة (13-1) ان التغير في طول الموجة لا يعتمد على طول موجة الفوتون الساقط وإنما يعتمد فقط على زاوية الاستطارة θ . وهذا نجد أن نظرية الفوتونات للتبوجات الكهرومغناطيسية قد نجحت في تفسير النتائج التجريبية في ظاهرة استطارة كوببتن .

د • توليد طول موجة الأشعة السينية الصغرى

Generation of the Minimum X-ray Wave Length

من المعروف ان الالكترونات ذات الطاقات العالية في انبوهة الأشعة السينية تستطيع أن تولد فوتونات أشعة سينية بطاقة عظمى محددة . وهي ظاهرة لا يمكن تفسيرها الا على أساس ان الاشعاع الكهرومغناطيسي يتصرف كفوتون عند تفاعله مع المادة . وسنبين فيما يلي كيفية اشتقاق طول موجة الأشعة السينية بدلالة فرق الجهد المسلط في انبوهة الأشعة السينية .

إذا تحرك الكترون بين فرق جهد مقداره V فان طاقته الحركية المكتسبة تساوى eV وعلى ذلك فان أكبر طاقة يستطيع أن يقددها بطبيعة الحال هي أيضاً eV والتي تتحول الى فوتون اشعة السينية ذو الطاقة العظمى

• تكوين الزوج (الالكترون والبوزترون)

Pair Production of Electron and Positron

تعتبر ظاهرة تكوين الزوج (الالكترون والبوزترون) دم آخر للنظرية الكمية للاشعاع • ويتولد الزوج في الهواء عندما تزيد طاقة الأشعة المؤينة على ضعف طاقة الكتون للبوزترون أو البوزترون أي أن طاقة فوتون الأشعة المؤينة يجب أن تكون أكبر من $2m_0c^2$ ووفقاً للمعادلة $h\nu > 2m_0c^2$. أما أقل طاقة فوتون للأشعة المؤينة لتوليد الزوج فهو بطبيعة الحال يجب أن يساوي $2m_0c^2$ والتي تعادل 1.02 Mev وتسمى الظاهرة العكسية لتكوين الزوج بـ"إفناء الزوج" (Annihilation) ويتم بتكوين فوتونين بطاقة كل منهما $h\nu$ بعد فناء الزوج •

3-1 ازدواجية الجسم والموجة للاشعاع الكهرومغناطيسي

The Wave - Particle Duality of Electromagnetic Radiation

ناقشنا في البند السابق بعض النتائج التجريبية وهي الظاهرة الكهروضوئية وتأثير كومبتن وتوليد طول موجة الأشعة المؤينة الصغرى وكذلك توليد وفناء الزوج ووجدنا أنه لم يكن بالإمكان تفسير هذه الظواهر بصورة مرضية إلا بافتراض الإشعاع الكهرومغناطيسي مكون من زدان من الجسيمات متناهماً بالفوتونات • ومن ناحية أخرى فالنتائج التجريبية للبصريات الفيزيائية الخاصة بالتداخل والحيود لا يمكن تفسيرها إلا بافتراض الطبيعة الموجية للاشعاع الكهرومغناطيسي • فكيف يمكن الآن لهذين الرأيين المتناقضين ظاهرياً أن يكونا متوافقين ؟

ان تجارب التداخل والحيود والتي تحتاج إلى التفسير الموجي (Wave Explanation) هي تجارب تتحرى فيها كيف وأين يعبر الضوء ؟

حسب نظرية الفوتونات للاشعاع • حدث ذلك يمكن كتابته

$$h\nu_{\max} = eV$$

أو ان

$$\nu_{\max} = \frac{eV}{h} \dots\dots\dots (21-1)$$

ومن العلاقة $\lambda = \frac{c}{\nu}$ فان $\lambda_{\min} = \frac{c}{\nu_{\max}}$ وبالتعويض في معادلة (21-1) الى

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eV}$$

حيث تسمى λ_{\min} بطول موجة الأشعة المؤينة الصغرى • وتعويض قيم الثوابت h ، c ، e نستطيع الحصول على قيمة λ_{\min} بدلالة فرق الجهد V كما يلي :

$$\lambda_{\min} = \frac{12396 \times 10^{-10}}{V} \text{ (m)}$$

$$\lambda_{\min} = \frac{12396}{V} \text{ (Å)} \dots\dots (22-1)$$

حيث يرمز الرمز Å إلى الانكسار Angstrom والذي يساوي إلى 10^{-10} m .

بينما تجارب الظاهرة الكهروضوئية وتأثير كومبتن وتوليد طول موجة الأشعة السينية الصغرى وتوليد وفناء الزوج والتي تحتاج الى التفسير الجسيمي (Particle Explanation) تتحرى فيها تفاعل الاشعاع الكهروضوئي مع المادة . لذلك نفترض ان الاشعاع الكهروضوئي يتكون اما من فوتونات لا تسير بخطوط مستقيمة وهو افتراض يختلف عما نادى به نيوتن في نظريته الشهيرة المسماة بنظرية الدقائق لتفسير طبيعة الضوء . وفي الوقت ذاته فعندما نتعامل مع عدد من الفوتونات الماقطة على نقطة معينة في حاجز بعد أن يمر الضوء مشعلا من خلال محرز الحيود فان شدة الضوء في تلك النقطة يحسب تبعاً للنظرية الموجية . وبينما يوفق هذا التفسير لحد ما بين التفسيرين الجسيمي والموجي للضوء الا أنه لا يذكر أي شيء عن مسار الفوتون الواحد عند مروره خلال محرز الحيود . فالفوتونات المتاثلة المارة من خلال محرز الحيود تصل الى نقاط مختلفة على الحاجز الذي يستلمها بعد حيودها . ولذا فيبدو من المعقول جدا أن نفترض بأن الفوتون لا يسير في مسار فريد (Unique Trajectory) عندما يعبر من خلال محرز الحيود بل أن هناك احتمالية معينة لوصوله الى نقطة معينة على الحاجز وهذه الاحتمالية تعين فقط من قبل جهاز الحيود . وعند قبول هذا التفسير ينبغي أن نفترض أن احتمالية وصول الفوتون الواحد الى نقطة معينة على الحاجز تتناسب مع شدة الضوء في تلك النقطة والمحسوبة بمسائل النظرية الموجية للضوء . وبناءً على هذا التفسير يمكن اعتبار موجات الضوء عبارة عن تموجات تترشد (Guide) الفوتونات بحيث ان شدة الموجة في أية نقطة تتناسب مع احتمالية وجود الفوتون في تلك النقطة .

ان الوصف الذي يقدمه هذا التفسير لحركة الفوتون يختلف كثيراً عما تعطيه النظرية الكلاسيكية . فالفيزياء الكلاسيكية دائماً تقدم وصفاً سببياً (Causal) من حيث انها تخصص مسارا معينا وعلى درجة كبيرة من الدقة لحركة الجسم في مجال قوة سا . بينما الوصف اعلاه ماهو الا وصف احتمالي للحصول على الفوتون في محل ما وبعض فقط احتمالية وجوده في ذلك المحل أو تلك النقطة . وفي حالة

التعامل بعدد كبير من الفوتونات فان بيانات دقيقة حول العدد الحقيقي في منطقة معينة يمكن الحصول عليها . وكما سنرى في المستقبل فان معالجة هذه الطائفة هي من اختصاص الميكانيك الكمي . أي ان النظرية تعطي الاحتمالية فقط بالنسبة لجسم واحد لكن المواصفات السببية ممكنة الى حد ما بالنسبة لعدد منها .

4-1 العنصر الموجي للجسيمات المادية

The Wave Aspect of Material Particles

اقترح العالم ديبرولي de Broglie عام 1924 أنه كما يتكون الضوء من فوتونات ترشدها موجة فهناك موجة أيضا ترشد الجسيمات المادية . ونفرض أيضا ان المعادلتين (1-11) و (1-14) تبقى صالحتين للجسيمات المادية أيضا . وعلاوة على ذلك نفقد فرض ان تفسير الموجة يبقى كما هو عليه في حالة الفوتونات ، أي أن احتمالية وجود الجسم المادي في نقطة لا زالت تتناسب مع شدة الموجة التي ترددها ν وطول موجتها λ والتي تعطىها المعادلتين المذكورتين . وبناءً على ذلك فان مدارات الالكترون في ذرة الهيدروجين وفقاً لنظرية بور يمكن أن تعرف بشرط ينص على أن λ محيط هذا المسار يجب أن يساوي عدداً صحيحاً من أطوال الموجة λ اذا صحت العلاقة $\lambda = h/p$ حيث h هو ثابت بلانك و p هو زخم الالكترون . واليك البرهان :

نفرض ان محيط مسار بور الدائري يعطى بالمعادلة

$$2\pi r = n\lambda \quad \dots\dots\dots (1-23)$$

، حيث n عدد صحيح ، فبالتمويض عن λ من المعادلة (1-23) نحصل على

$$2\pi r = n \frac{h}{p} = \frac{nh}{mv}$$

ان جسيمات اخرى غير الالكترونات تملك أيضا خصائص موجية • فمن اجراء تجارب الحويد على ذرات الهيليوم المتجانسة الطاقة والمارة في بلورات فلوريد الليثيوم أمكن التحرى عن وجود موجات ترافق هذه الذرات وقد أمكن كذلك التحقق من صحة المعادلة (1-26) في هذه التجارب •

ان التجارب المذكورة وغيرها قد أثبتت بشكل قاطع بأن جميع الجسيمات تملك الخصائص الموجية وهي حقيقة مذهلة كان لها تأثير كبير على أفكارنا الأساسية في تطوير علم حركة الجسيمات • وكانت نقطة انطلاق ما يسمى الان بالميكانيك الموجي

• Wave Mechanics

أمكنا أن نبين في البندين السابقين ان كل من المادة والضوء يملك خاصية الموجة والجسيمات وكل من هاتين الخاصتين يمكن التحقق منها بالتجربة لتأثير مذبذبة وتحت شروط معينة • فالضوء يتصرف كجسيم اثناء تفاعله مع المادة كما يحصل في الظاهرة الكهروضوئية ويتصرف كموجة اثناء انتقاله كما هي الحالة في ظاهرتي التداخل والحويد • أما الجسم ففي اثناء حركته تصاحبه موجة طولها يساوى طول موجة ديبرولي لكنه عندما يتفاعل مع المادة فانه يمتلك خصائص الجسم ويستطيع تبادل الطاقة والزخم •

5-1 مبدأ اللادقة لهايزنبرك

Heisenberg Uncertainty Principle

يعتبر مبدأ اللادقة الذى يتبع مباشرة من مبدأ الخصائص الموجية للمادة أساسى وهو يتعلق بما يسمى باللاتعيين Indeterminance أو اللادقة Uncertainty الذى لا يمكن تجنبه اثناء القياس التجريبي للجسيمات الفيزيائية بسبب عملية القياس نفسها •

ان من احدى الفرضيات الضمنية الاساسية في الميكانيك الكلاسيكي هي ان أية منظومة كلاسيكية • من حيث الاساس • يمكن أن تلاحظ بأية درجة كبريرة

أى أن :

$$p_{\theta} = mvr = n \frac{h}{2\pi r} = n\hbar \quad \dots\dots\dots (24-1)$$

وهذه العلاقة هي فرضية بور الاولى التي تنص على أن الزخم الزاوى للالكترون في المدار المستقر يساوى عددا صحيحا n مضروبا بالثابت \hbar • وطول الموجة λ المعروفة بالمعادلة (1-14) • $\lambda = h/p$ • تسمى طول موجة ديبرولي وهي طول الموجة الصاحبة لحركة الالكترون •

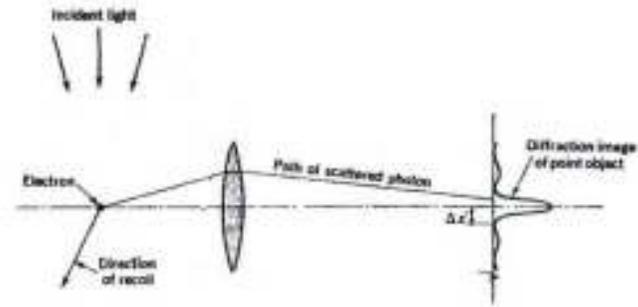
لقد تحقق زعم ديبرولي عام 1928 حين اكتشف العالمان دافوسون وكيرمر Davison and Germer تجريبا ان الالكترونات ذات الطاقة 200 eV الماقطة على سطح بلورة النيكل تتعكس عنها بطريقتين تشابه دائرة الحويد لموجات مستوية عن ذرات البلورة ذات المسافات البينية a المتتلة • وقد أمكن البرهنة بعد اجراء تجارب عديدة ان زاوية الحويد θ والتي تعطىها النظرية التلاسكوية بالمعادلة :

$$\theta \sim \frac{\lambda}{a} \quad \dots\dots\dots (25-1)$$

موافق لطول موجة يساوى بالضبط لطول موجة ديبرولي لالكترون طاقة 200 eV ويمكن حساب طول الموجة هذه بسهولة من المعادلتين $\lambda = h/p$ و $p = \sqrt{2mE}$ لنحصل على :

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \quad \dots\dots\dots (26-1)$$

من الدقة بدون أن يحدث أى تشويش مهم لحركتها • وطبيعة الحال فإن هذا الافتراض يكون مقبولا عند ما نعتبر حركة الأجسام الكبيرة • أما في حالة دراسة الأجسام الصغيرة فوجب أن تتضمن الوصف الكمي لها ولعملية القياس نفسها • ولتوضيح ذلك لنعتبر مسألة قياس موضع جسم صغير كالإلكترون مثلا ، الذي يمكن أن يتم من حيث الأساس باستعمال المجهر • ونفرض الحصول على تحليل عال High Resolution فوجب استخدام عدسة ذات فتحة كبيرة وأن يكون الضوء ذا طول موجي قصير • ولجعل التشويش على الإلكترون أقل ما يمكن فإنه يتحتم استخدام ضوء شدة أضائته صغيرة قدر الامكان ولذا فإننا نفترض استخدام فوتون واحد • ويمكن متابعة التجربة كما هو مبين بالشكل (3-1) حيث يسقط ضوء ضعيف جدا طاقة



الشكل (3 - 1)

فوتونه $h\nu$ عالية على الإلكترون فيزيئته • هذا الفوتون بعد اصطدامه بالإلكترون يستطير مارا خلال عدسة المجهر ويتابع حركته حتى يصل نقطة ما على الحاجز • أما الإلكترون فيرتد بسبب تصادمه مع الفوتون ويسير بعيدا في اتجاه ما كما هو مبين بالسهم • ولأن لتأمل : ماهي الدقة في تعيين موضع الإلكترون المقاس في هذه التجربة وما هو مقدار اللدقة التي أدخلت إلى حركته ؟ ان موضع الإلكترون معروف بدقة تقريبية فقط لأننا لانعلم موقع النقطة على حاجز الحيود التي وصلها الفوتون في الحقيقة

تحتاج إلى فوتونات عديدة للحصول على التماظر في نمط الحيود • لكننا نستطيع القول فقط ان الفوتون باحتمال كبير قد سقط على الحاجز ضمن حلقة الحيود الأولى • واللدقة معرفة بدلالة موضع الإلكترون تعين هنا بالاستناد إلى مبادئ البصريات الطبيعية على وجه التقريب بالعبارة :

$$\Delta x \approx \frac{f \lambda}{D} \dots \dots \dots (27-1)$$

حيث λ تمثل طول موجة الضوء الساقط ، f البعد البؤري و D قطر العدسة الشيئية للمجهر • وسبب عملية التصادم أثناء إجراء القياس لتعيين الموضع فإن للإلكترون يرتد بمقدار غير معلوم وذلك لأنه ليست هناك وسيلة لمعرفة من أى جزء من العدسة الشيئية قد نفذ الفوتون • وحيث أنه من الممكن ان يكون الفوتون قد نفذ من أى جزء من العدسة فإننا نتوقع أن يكون مقدار اللدقة في مركبة الزخم في الاتجاه x يساوي تقريبا :

$$\Delta P_x \approx P_x \frac{D}{2f} \approx \frac{h\nu}{c} \frac{D}{2f} \approx \frac{h}{\lambda} \frac{D}{2f} \dots \dots (28-1)$$

ومن المعادلتين (27-1) و (28-1) نجد أن مقدار اللدقة في الموضع والزخم يحويان طول موجة الضوء وأبعاد المجهر بحيث يكون أحدهما مقلوب الآخر • فلنفرض جعل Δx صغيرا ينهني أن يكون ΔP_x كبيرا والعكس بالعكس • والطاقة تتوضع أكثر عند ضرب المعادلتين (27-1) و (28-1) ببعضهما البعض هكذا :

$$\Delta x \Delta P_x \approx \frac{h}{2} \dots \dots \dots (29-1)$$

وهناك أيضا علاقة مشابهة للعلاقة (1-29) تخص الطاقة E

والزمن t بالشكل :

$$\Delta E \Delta t \approx h \quad \dots\dots\dots (30-1)$$

وهي علاقة مهمة في الفيزياء الذرية والجزيئية في حساب العمر الزمني للحالات المتهيجة . ويمكن تعميم مبدأ اللادقة لها فينطبق لتعيين اللادقة الصغرى لكميات دانيهيكية مترافقة P و Q هكذا :

$$\Delta P \Delta Q \approx h \quad \dots\dots\dots (31-1)$$

والأمثلة على الكميات المترافقة كثيرة منها (x, P_x) و (y, P_y) و (z, P_z) و (t, E) و (θ, P_θ) .

6-1 مبدأ التناظر The correspondence Principle

هذا المبدأ أول من اقترحه هو العالم إيبرهارد نيسن على أن :

"حركة مندوبة كما توصف بواسطة الميكانيك الكمي تتفق مع حركتها التي توصف بواسطة الميكانيك الكلاسيكي في الغاية التي فيها يمكن اءمال ثابت بلانك h ."

اذا كانت الهندسة كبيرة بما فيه الكفاية ولم تكن حاجتنا لدقة القياس كبيرة فان الميكانيك الكلاسيكي يزودنا بتقريب جيد لحركة المنظومة . هذا المبدأ يسمى أيضا بالغاية الكلاسيكية (Classical Limit) للميكانيك الكمي .
وسنورد في الفصول القادمة بعض الأمثلة مثل حركة المتذبذب التوافقي البسيط أو الجسم الحر في صندوق الجهد للتحقق من صحة هذا المبدأ .

تمارين الفصل الأول

(1) ناقش المعنى الفيزيائي للكمية الفيزيائية التي وحدتها joule.sec

(2) برهن ان طاقة الالكترون الكائنة والمتحرك في مدار دائري نصف قطره r تعطى بالعلاقة :

$$v = - \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

ناقش معنى الاشارة السالبة في هذه العلاقة .

(3) برهن بالطرق الكلاسيكية ان الطاقة الكلية E للالكترون الدائري بمدار دائري حول النواة في الذرة تعطى بالعلاقة :

$$E = - \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{e^2}{2r}$$

حيث r هو نصف قطر المدار . أي المدارات طاقتها طالية الكبيرة أم الصغيرة ؟

(4) جد قيمة نصف قطر مدار بور الأول a_0 باستخدام المعادلة (1-3) .

(5) (أ) - احسب السرعة الزاوية للالكترون عندما يكون في مداره الأول ومن ثم احسب سرعته الخطوية .

(ب) - بدلالة العدد الكمي n احسب نسبة سرعة الالكترون الى سرعة الضوء (v/c) .

$$\frac{v}{c} \sim \frac{7 \times 10^{-3}}{n} \quad \text{الجواب :}$$

(6) احسب قيمة ثابت ريديبيرك . الجواب :

$$10.9677576 \times 10^{-6} \text{ m}^{-1} = 10.9677576 \mu^{-1}$$

(7) احسب طاقة التأين لذرة الهيدروجين .

(8) احسب طاقة التهييج الاولى First Excitation Energy لذرة الهيدروجين بوحدة الالكترن فولت (eV) . تلميح للحل : ضع $n=2$ في المعادلة (7-1) .

(9) اذا كانت دالة الشغل للبوتموم تماوى 2.0 eV وكان طول موجة الاشعاع الساقط على البوتموم يساوى $3.6 \times 10^{-7} \text{ m}$ جد (أ) جهد الايقاف Stopping Potential للالكترونات الضوئية .

(ب) الطاقة الحركية وسرعة الالكترونات المتحررة .

(10) اذا كانت طاقة الارتباط (Binding Energy) للالكترن المقيد الداخلي (Inner Bound Electron) في الرصاص تماوى $9 \times 10^4 \text{ eV}$ وكانت الالكترونات الضوئية المتحررة من مادة الرصاص عند تشعيها باشعاع كهرومغناطيسي معدن تحتطبع الحركة بمسار دائرى نصف قطره 0.25 m عندما تمر بصورة عمودية على مجال مغناطيسي كثافة فيضه تماوى 10^{-2} T . فاحسب : (أ) طاقة الفوتونات الممتصة من قبل معدن الرصاص . (ب) زخم وطاقة الالكترونات الضوئية المتحررة .

(11) برهن ان اكبر تغيير ممكن في طول الموجة في استقطار كومبتن هو $2h/m_0c$ كذلك احسب طول موجة كومبتن الذى يعرف بـ $\lambda_0 = h / m_0c$ بعد التعويض عن الثوابت h و m_0 و c بتقريبها المعروفة . الجواب : $\lambda_0 = 24.26 \times 10^{-13} \text{ m}$

(12) اذا كان طول موجة الاشعة السينية المستقطرة بزاوية الكارون يساوى $\lambda = 1.00 \text{ \AA}$ وكانت زاوية الاستقطار تماوى 90° ، احسب (أ) التغير في طول الموجة $\Delta \lambda$.

(ب) الطاقة الحركية التي يترد بها الالكترن بوحدة الجول ووحدة الالكترن فولت .

(ج) طاقة الفوتون الساقط بوحدة الالكترن فولت .

(د) النسبة المئوية لخسارة طاقة الفوتون الساقط .

(هـ) ماذا تنتج من الفرع (د) ؟

(13) يصطدم فوتون طاقته 10^4 eV مع الكترن حر ساكن فاذا كانت زاوية الاستقطار تماوى 60° فاحسب :

(أ) تغير الطاقة للفوتون

(ب) تردد وطول موجة الفوتون الساقط

(ج) زخم الالكترن المرتد وطاقته الحركية

(14) برهن أنه في عملية استقطار كومبتن تكون العلاقة بين الزاويتين θ و ϕ كالاتي :

$$\cot \phi = (1 + \alpha) \tan \frac{1}{2} \theta$$

$$\alpha = \frac{h\nu}{m_0c^2} \quad \text{حيث :}$$

(15) احسب طول موجة ديبرولي :

(أ) لرصاصة بندقية كتلتها $1.0 \times 10^{-3} \text{ Kg}$ وسرعتها $3 \times 10^2 \text{ m/sec}$

(ب) لتلميح كتله 75 Kg يسير بسرعة 0.5 m/sec

(ج) لالكترن عجل بفرق جهد مقداره 100 volt

(20) في تحول نووي معين كان مقدار اللدقة في الذائقة في مستوى التهييج ΔE يساوي 0.414 eV . احسب زمن العمر للحالة المتهيجة النووية .

(21) حزمة متجانسة من الاشعاع الكهرومغناطيسي شدته 1 W/m^2 . احسب عدد الفوتونات في وحدة الحجم في الحالتين أدناه :

(أ) موجات الراديو ذات التردد 10^3 Hertz

(ب) اشعة كاما ذات طاقة 10 MeV

الجواب : (أ) $5 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$

(ب) $2 \times 10^3 \text{ m}^{-3}$

(22) اذا كانت شدة الضوء الصغرى التي تتحسس بها العين تساوي تقريبا 10^{-10} W/m^2 فما عدد الفوتونات في الثانية التي تدخل بؤبؤ العين في هذه الشدة اذا علمت أن طول موجة الضوء هو $5.6 \times 10^{-7} \text{ m}$ وأن مساحة بؤبؤ العين هي $0.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$

(16) (أ) اثبت ان طول موجة ديبرولي λ لحزمة متجانسة من الالكترونات والمتحركة بين فرق جهد V يعطى بالمعادلة التالية :

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meV}}$$

(ب) احسب قيمة λ اذا كان $V = 3600 \text{ volt}$

(17) برهن أن طول موجة ديبرولي لجسم كتله m يتحرك بالسرعة الاكبر احتمالا حسب توزيع ماكسويل - بولتزمان في درجة الحرارة T يعطى بالمعادلة

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mkt}}$$

حيث k يرمز الى ثابت بولتزمان .

(18) برهن أن طول موجة ديبرولي مقدرا بالانكستروم لالكترون معجل من المكسرون بفرق جهد مقداره V يعطى كما يلي :

$$(أ) \lambda = \frac{12.27}{\sqrt{V}} \text{ انكستروم}$$

$$(ب) \lambda = \frac{12.27}{\sqrt{V}} \left(\frac{eV}{2m_0c^2 + 1} \right)^{-\frac{1}{2}} \text{ انكستروم}$$

(19) استخدم العلاقة $\Delta x \Delta p_x \approx h$ لاثبات العلاقة التالفة $\Delta E \Delta t \approx h$ وهي علاقة اللدقة للزمن والطاقة .

جامعة بغداد

كلية التربية للعلوم الصرفة (ابن الهيثم)

قسم الفيزياء

المرحلة الرابعة

المادة: الميكانيك الكمي

التدريسي: د. عقيل رزاق صالح

تمارين الفصل الاول

$$(4) \quad a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = ?$$

$$(6) \quad R = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2ch^3} = ?$$

$$(11) \quad \Delta\lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta)$$

$$\theta = 180^\circ$$

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m_0c}$$

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0c} = ?$$

$$(15) \quad \lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{mv} = ?$$

$$(أ) \quad m = 1 \times 10^{-3} \text{ kg}, v = 3 \times 10^2 \text{ m/sec}$$

$$(ب) \quad m = 75 \text{ kg}, v = 0.5 \text{ m/sec}$$

(15 ج)، (16 أ، ب)، (18 أ)

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2meV}} = \frac{12.27}{\sqrt{V}} \text{ \AA}$$

$$(15ج) \quad V = 100 \text{ volt}$$

$$\lambda = \frac{12.27}{\sqrt{100}} = ?$$

$$(16ب) \quad V = 3600 \text{ volt}$$

$$\lambda = \frac{12.27}{\sqrt{3600}} = ?$$

$$(19) \quad \Delta x \Delta P_x \approx h$$

$$\Delta x = v\Delta t$$

$$\Delta E = v\Delta P_x$$

$$\Delta E \Delta t \approx h$$

$$(20) \quad \Delta E \Delta t \approx h$$

$$\Delta t \approx \frac{h}{\Delta E} = ?$$

تتممة الثوابت الأساسية

القيمة	الرمز	الثابت
$9.6487 \times 10^4 \text{ C mol}^{-1}$	F	ثابت فزادى
$8.9874 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$	K_e	ثابت كولومب
$8.8544 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2$	ϵ_0	مجازية الفراغ Vacuum-permittivity
$1.0000 \times 10^{-7} \text{ m Kg C}^{-2}$	K_m	الثابت المغناطيسي Magnetic - Constant
$1.2566 \times 10^{-6} \text{ m Kg C}^{-2}$	μ_0	نفاذية الفراغ Vacuum - Permeability
$6.670 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ Kg}^{-2}$	γ	ثابت الجذب العام
9.7805 m s^{-2}	g	التعجيل الارضي في مستوى سطح البحر وعلى خط الاستواء

ثوابت عددية $\sqrt{2} = 1.4142$ ، $e = 2.7183$ ، $\pi = 3.1416$

$\sqrt{3} = 1.7320$

Fundamental Constants

الثوابت الأساسية

القيمة	الرمز	الثابت
$2.9979 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	c	سرعة الضوء
$1.6021 \times 10^{-19} \text{ C}$	e	الشحنة الاولية
$9.1091 \times 10^{-31} \text{ Kg}$	m_e او m	كتلة المكون للإلكترون
$1.6725 \times 10^{-27} \text{ Kg}$	m_p	كتلة المكون للبروتون
$1.6748 \times 10^{-27} \text{ Kg}$	m_n	كتلة المكون للنيوترون
$6.6256 \times 10^{-34} \text{ J s}$ $1.0545 \times 10^{-34} \text{ J s}$	h $\hbar = h/2\pi$	ثابت بلانك
$1.7588 \times 10^{11} \text{ Kg}^{-1} \text{ C}$	e/m	نسبة الشحنة الى الكتلة للإلكترون
$4.1356 \times 10^{-15} \text{ J s C}^{-1}$	h/e	نسبة الشحنة الكمية
$5.2917 \times 10^{-11} \text{ m}$	a_0	نصف قطر بور
$2.4262 \times 10^{-12} \text{ m}$	$\lambda_{c,e}$	طول موجة كومبتن للالكترون
$1.3214 \times 10^{-15} \text{ m}$	$\lambda_{c,p}$	طول موجة كومبتن للبروتون
$1.0074 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$	R	ثابت ريدبيرك
$9.2732 \times 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$	μ_B	مغناطون بور
$6.0225 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	N_A	عدد أفوكادرو
$1.3805 \times 10^{-23} \text{ J}^\circ\text{K}^{-1}$	k	ثابت بولتزمان
$8.3143 \text{ J}^\circ\text{K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$	R	ثابت الغازات
$2.2414 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$	V_0	الحجم الاعتيادي للغاز المثالي في الظروف القياسية (STP)

جامعة بغداد
كلية التربية للعلوم الصرفة (ابن الهيثم)
قسم الفيزياء

المرحلة الرابعة
المادة: الميكانيك الكمي
التدريسي: د. عقيل رزاق صالح

الفصل الثالث

المتذبذب التوافقي الخطي

The Linear Harmonic Oscillator

مقدمة :

المتذبذب التوافقي الخطي عبارة عن جسم طاقته الكامنة
 $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ حيث x يقيس المسافة من نقطة ثابتة هي نقطة
الأصل و k ثابت . هذه المسألة تقابل كلاسيكيا الحركة التوافقية
البسيطة التي يتحرك فيها جسم تحت تأثير القوة المعيدة $-kx$ لهيتم
روحا ومجيبا على مسار خطي بتردد دائري مقداره $(k/m)^{\frac{1}{2}}$. أما فسي
الميكانيك الكمي فستكون مسألة المتذبذب التوافقي الخطي أول تطبيق
للبيادى والنظريات التي مسرت علينا في الفصل السابق ، وذلك للأسباب التالية :
أولا - ان المتذبذب التوافقي الخطي هو أقدم مسألة في الميكانيك الكمي ومسئ
المفيد جدا أن نقارن بين ما قدمه بلانك بهذا الخصوص والنتائج التي نحصل
عليها من نظرية شرودنكر . ثانيا - المتذبذب التوافقي البسيط هو أبسط
مسألة يمكن الحصول فيها على مستويات متميزة (أو متقطعة) Discrete
للطاقة وترتبط هذه المسألة في تطبيقات عملية عديدة مثل اهتزاز جزيئات
و ذرات المسواد الصلبة البلورية التي تقرب عادة الى اهتزازات توافقية بسيطة
إذا كانت سعة الاهتزاز صغيرة ، وكذلك المجال الكهرومغناطيسي يمكن اعتباره
في تطبيقات كثيرة كعدد من الاهتزازات التوافقية البسيطة التي تقابل الحالات
الكلاسيكية المختلفة لاهتزاز المجال ، ثالثا - من الممكن فهم وداسة كثير
من الخصائص المميزة للميكانيك الكمي عند حل مسألة المتذبذب التوافقي
الخطي .

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} kx^2 \psi = E \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (4-3)$$

هذه المعادلة لها حلول لقيم متعددة للطاقة E نرمز لها عادة بالرموز
 E_n ($n = 0, 1, 2, \dots\dots\dots$) والدوال الذاتية المرافقة لها
 يرمز لها بـ ψ_n . وكما بينا في الفصل السابق فيمكن كتابتها :

$$\psi_n(x, t) = U_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} \quad \dots\dots\dots (5-3)$$

حيث $U_n(x)$ تحقق معادلة شرودنجر المستقلة على الزمن :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 U_n}{dx^2} + \left(\frac{1}{2} kx^2 - E_n \right) U_n(x) = 0 \quad \dots\dots\dots (6-3)$$

وهي تكون مجموعة كاملة من الدوال المتعامدة والتي يمكن بدلاتها التمييز
 عن أي دالة موجبة للمتذبذب التوافقي . هذا يكون الحل العام لسؤالنا التحركية
 التوافقية البسيطة كالاتي :

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n U_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} \quad \dots\dots\dots (7-3)$$

حيث A_n هي أعداد ثابتة .

2-3 حل معادلة شرودنجر

Solution of Schrodinger's Equation

فيمايلي سنحاول حل معادلة شرودنجر غير المعتمدة على الزمن :

1-3 الدالة الهاملتونية - معادلة شرودنجر

The Hamiltonian Function-Schrodinger Equation

عند معالجة مسألة فيزيائية في الميكانيك الكمي فاننا نبدأ عادة بحل
 معادلة شرودنجر غير المعتمدة على الزمن للمسألة . هذا الحل يؤدي الى
 الحصول على القيم الذاتية للطاقة والدوال الذاتية لها التي تمثل حالات
 مستقرة ممكنة تبقى المنظومة فيها لفترة كبيرة من الزمن . هذه الدوال تكون مجموعة
 كاملة من الدوال المتعامدة والتي يمكن بدلاتها أن تعرف الحالة الحقيقية للمنظومة .
 بالرجوع الى المعادلة (2-23) نستطيع كتابة دالة هاملتن كما يلي :

$$H(x, P_x) = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2 \quad \dots\dots\dots (1-3)$$

والموتر الهاملتوني يكون :

$$H^0(x, P_x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} kx^2 \quad \dots\dots\dots (2-3)$$

ومعادلة شرودنجر هي :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} kx^2 \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (3-3)$$

ولما كنا نرغب بايجاد القيم الذاتية للطاقة للمتذبذب فانه يستوجب كتابة معادلة
 شرودنجر بصيغتها :

$$\frac{d^2 U_n(y)}{dy^2} - y^2 U_n(y) = 0 \quad \dots\dots (12-3)$$

والان نجد الحل التقريبي للحالة التي تكون فيها y كبيرة . فاذا فرضنا أن :

$$U_n(y) = e^{cy^2} \quad \dots\dots (13-3)$$

يكون :

$$\frac{d^2 U_n(y)}{dy^2} = 4c^2 y^2 e^{cy^2} + 2c e^{cy^2}$$

والتعويض في المعادلة (12-3) نحصل على :

$$4c^2 y^2 e^{cy^2} + 2c e^{cy^2} - y^2 e^{cy^2} = 0 \quad \dots\dots (14-3)$$

وبإهمال الحد الوسطي في المعادلة (14-3) نحصل على :

$$(4c^2 - 1) y^2 e^{cy^2} = 0 \quad \dots\dots (15-3)$$

وللحصول على حل يختلف عن الصفر يجب وضع

$$4c^2 - 1 = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 U_n(x)}{dx^2} + (\frac{1}{2} Kx^2 - E_n) U_n(x) = 0 \quad \dots (6-3)$$

وذلك بتبسيطها أولاً بإجراء التعويضات التالية :

$$\left. \begin{aligned} \alpha^4 &= \frac{mk}{\hbar^2} = \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} \\ \lambda_n &= \frac{2E_n}{\hbar(k/m)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8-3)$$

عندها تتحول المعادلة (6-3) الى :

$$\frac{d^2 U_n(x)}{dx^2} + \alpha^2 (\lambda_n - \alpha^2 x^2) U_n(x) = 0 \quad \dots\dots (9-3)$$

وتبديل المتغير x الى :

$$y = \alpha x \quad \dots\dots\dots (10-3)$$

نحصل على المعادلة التالية :

$$\frac{d^2 U_n(y)}{dy^2} + (\lambda_n - y^2) U_n(y) = 0 \quad \dots\dots (11-3)$$

العددية البعد \cdot وعندما $y \rightarrow \infty$ فان الحد $\lambda_n U_n(y)$ يمكن اهماله بالمقارنة مع الحد $-y^2 U_n(y)$ والمعادلة أعلاه تأخذ صيغتها المحاذية التالية :

$$H_n(y) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r y^r \quad \dots\dots\dots (20-3)$$

في المعادلة التفاضلية (19-3) هذا العمل يستوجب إيجاد :

$$\frac{dH_n(y)}{dy} = \sum_{r=0}^{\infty} r a_r y^{r-1}$$

$$\frac{d^2H_n(y)}{dy^2} = \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) a_r y^{r-2}$$

والتعويض الان يؤدي الى النتيجة التالية :

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left[r(r-1)a_r y^{r-2} - 2ra_r y^r + (\lambda_n - 1) a_r y^r \right] = 0 \quad \dots (21-3)$$

ووضع معامل كل أس في المتسلسلة اعلاه للمتغير y مساويا للصفر نحصل على علاقة التكرار التالية :

$$(s+1)(s+2) a_{s+2} - [2s - (\lambda_n - 1)] a_s = 0 \quad \dots\dots\dots (22-3)$$

$$s = 0, 1, 2, \dots\dots\dots$$

ومنها نجد أن قيمتي c هما $c = \pm \frac{1}{2}$ والحل التقريبي يكون :

$$U_n(y) = e^{\pm \frac{1}{2}y^2} \quad \dots\dots\dots (16-3)$$

ولما كانت دالة الموجة $U_n(y)$ يجب أن تقترب من الصفر عندما تقترب y من اللانهاية فان الحل $e^{+\frac{1}{2}y^2}$ يجب أن يهمل ونحتفظ بحل تقريبي واحد هو :

$$U_n(y) = e^{-\frac{1}{2}y^2} \quad \dots\dots\dots (17-3)$$

وإذا أردنا الحصول على الحل المضبوط فاننا نضرب الحل التقريبي أعلاه بمتغير معتمد جديد $H_n(y)$ وثابت التعيين N_n هكذا :

$$U_n(y) = N_n e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y) \quad \dots\dots\dots (18-3)$$

والتعويض في المعادلة (11-3) نحصل على المعادلة التالية :

$$\frac{d^2H_n(y)}{dy^2} - 2y \frac{dH_n(y)}{dy} + (\lambda_n - 1)H_n(y) = 0 \quad \dots (19-3)$$

ومن الممكن الان حل المعادلة (19-3) بطريقة المتسلسلة الأسية

وذلك بتعويض :

يجب أن نختارها بشكل يجعل a_s لقيمة ما s صفراً ونفس الوقت نضع a_0 أو a_1 مساوية للصفر. بهذه الطريقة يمكن الحصول على مجموعة من كثيرات الحدود بتناظر زوجي وفردى في y على التعاقب وعندما تمزج كثيرات الحدود هذه مع $e^{-\frac{1}{2}y^2}$ فان ذلك سيؤدي الى دوال ذاتية زوجية التناظر وفردية في y على التعاقب.

ان اصغر قيمة لـ λ نختارها وتحقق هذا المطلب هي λ_0 حيث $\lambda_0=1$. فعند وضع $a_1=0$ حسب الطلب فان $U_0(y) \rightarrow 0$ عندما $y \rightarrow \infty$ وذلك يجعل $H_0(y)=1$ (على فرض $a_0=1$). القيمة التالية لـ λ هي $\lambda_1=3$ حيث $\lambda_1=3$ (ضع $a_0=0, a_1=2$) وعنده فان $H_1(y)=2y$ ونفس الطريقة فان $\lambda_2=5$ (ضع $a_0=2$ و $a_1=0$) وعليه فان $H_2(y) = 4y^2 - 2$ وبصورة عامة نجد من المعادلة (23-3) أننا اذا وضعنا :

$$\lambda_n = 2n+1, n = 0, 1, 2, \dots \quad (24-5)$$

فان $H_n(y)$ سيكون على شكل كثيرة الحدود من الدرجة n وتسمى حلول المعادلة التفاضلية (19-3) اذا كانت على شكل كثيرات الحدود بكثيرات حدود هيرمايت Hermite Polynomials من الدرجة n والتي يمكن كتابتها الان على النحو التالي :

$$\frac{d^2 H_n(y)}{dy^2} - 2y \frac{dH_n(y)}{dy} + 2nH_n(y) = 0 \quad \dots (25-3)$$

ويمكن ايضا تعريف كثيرة الحدود لهيرمايت بالشكل

$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n (e^{-y^2})}{dy^n} \quad \dots (26-3)$$

أو أن :

$$a_{s+2} = \frac{2s - (\lambda_n - 1)}{(s+1)(s+2)} a_s \quad \dots (23-3)$$

أى أنه بالامكان تعيين $H_n(y)$ بصورة كاملة لـ λ_n معرنة بواسطة ثابتين اعتباطيين هما a_0 و a_1 في المتسلسلة أعلاه. لنفحص الان تقارب حل المتسلسلة الأسية المعروفة بالمعادلتين (20-3) و (23-3). فان المعادلة الأخيرة تجسد أن :

$$\frac{a_{s+2}}{a_s} \rightarrow \frac{2}{s}$$

عندما $s \rightarrow \infty$. لذا فان المتسلسلة متقاربة لجميع القيم المحدودة للمتغير y . هذا التصرف يطابق تصرف الدالة e^{+y^2} أى أنه عندما يكون $y \rightarrow \infty$ فان الدالة $U_n(y)$ تماوى :

$$U_n(y) \sim e^{+y^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}y^2} \sim e^{\frac{1}{2}y^2}$$

وعليه فان $U \rightarrow \infty$ عندما $y \rightarrow \infty$ وتكون عندئذ الدالة $U_n(y)$ متباعدة وغير مقبولة. والطريقة الوحيدة لمنع تباعد الدالة الموجية لقيم y الكبيرة هو أن نجعل $H_n(y)$ على شكل كثيرة الحدود (Polynomial) بدلا من أن تكون متسلسلة لانها عسية الحدود. بهذه الطريقة فان $U_n(y) \rightarrow 0$ عندما $y \rightarrow \infty$. (لاحظ المعادلة 18-3). ويمكن عمل ذلك باختيار λ_n بشكل فيس المتسلسلة اللانهائية لـ $H_n(y)$ تتقطع في حد ما جاعلة الدالة $H_n(y)$ عسى شكل كثيرة الحدود. والتأمل في المعادلة (23-3) يبين بوضوح أن λ_n

وعليه فان :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2H_n(y)s^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(y)s^n}{n!}$$

ومساواة معاملات s^n في طرفي هذه العلاقة نحصل على

$$H_n'(y) = 2nH_{n-1}(y) \dots\dots\dots (28-3)$$

واذا أخذنا الان المشتقة الجزئية لطرفي المعادلة (27-3) بالنسبة لـ s نحصل على :

$$\frac{\partial g}{\partial s} = (-2s + 2y) e^{-s^2 + 2ys} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2s + 2y) H_n(y) s^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(y) s^{n+1}}{(n+1)!}$$

ومساواة معاملات s^n في طرفي العلاقة أعلاه نحصل على :

$$H_{n+1}'(y) = 2yH_n'(y) - 2nH_{n-1}(y) \dots\dots\dots (29-3)$$

وباستخدام المعادلتين (28-3) و (29-3) نحصل على ما يلي :

$$2(n+1)H_n'(y) = H_{n+1}'(y) = 2yH_n'(y) + 2H_n(y) - 2nH_{n-1}'(y)$$

$$= 2yH_n'(y) + 2H_n(y) - H_n''(y)$$

Generating Function بدلالة الدالة المولدة كما يمكن التعبير عنها

$g(s,y)$ التي تعرف بالشكل التالي :

$$g(s,y) = e^{y^2 - (s-y)^2} = e^{-s^2 + 2ys} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(y)s^n}{n!} \dots (27-3)$$

أي أن $H_n(y)$ تساوي $n!$ مضروبا في معامل s^n على فرض أن مفكوك الدالة هو $\sum_n a_n s^n$

فيما يلي نشتق المعادلة التفاضلية التي تحققها كثيرة حدود هيرمايميت من الدرجة n بالاستعانة بالدالة المولدة $g(s,y)$ ، لنأخذ المشتقة الجزئية لطرفي المعادلة (27-3) بالنسبة الى y :

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2s e^{-s^2 + 2sy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(y)s^n}{n!}$$

حيث $H_n'(y) = \frac{dH_n(y)}{dy}$ غير أنه بنفس الوقت لدينا :

$$2s e^{-s^2 + 2s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2H_n(y)s^{n+1}}{n!}$$

$$H_n = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (32-3)$$

أن الدوال الذاتية في المعادلة (30-3) تقابل القيم الذاتية لطاقة المتذبذب التوافقي الخطي التي تعطى بالمعادلة (31-3) وهي

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad n=0,1,2,\dots\dots\dots (33-3)$$

ومن المفيد جدا ان نقارن بين مقادير الطاقة التي حصلنا عليها من حل معادلات شرودنكر غير المعتمدة على الزمن للمتذبذب التوافقي مع المقادير التي يعطيها قانون بلانك ، $E_n = nh\nu = n\hbar\omega$ ، حيث نلاحظ أن الفرق بين المقادير هو $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ والذي يسمى بطاقة الصفر Zero - Point Energy وهي أقل طاقة يستطيع المتذبذب امتلاكها ، وفيما يلي ندرج في الجدول التالي الدوال الذاتية العيارية والطاقة التقابلة لها القيم $n = 0,1,2,3$

جدول (3-1)

n	$U_n(x)$	E_n
0	$(\alpha^{\frac{1}{2}}/\pi^{\frac{1}{4}}) e^{-\alpha^2 x^2/2}$	$\frac{1}{2} \hbar \omega$
1	$(\alpha^{\frac{1}{2}}/2^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{4}}) 2(\alpha x) e^{-\alpha^2 x^2/2}$	$\frac{3}{2} \hbar \omega$
2	$(\alpha^{\frac{1}{2}}/8^{\frac{1}{4}}\pi^{\frac{1}{4}})(4\alpha^2 x^2 - 2) e^{-\alpha^2 x^2/2}$	$\frac{5}{2} \hbar \omega$
3	$(\alpha^{\frac{1}{2}}/48^{\frac{1}{4}}\pi^{\frac{1}{4}})(8\alpha^3 x^3 - 12\alpha x) e^{-\alpha^2 x^2/2}$	$\frac{7}{2} \hbar \omega$

$$H_n''(y) = \frac{d^2 H_n(y)}{dy^2}$$

حيث

ومن النتيجة اعلاه نحصل على المعادلة التالية :

$$H_n'' - 2yH_n' + 2nH_n = 0 \quad \dots\dots\dots (25-3)$$

وهي المعادلة (25-3) التي مرت بنا .

3-3 مستويات الطاقة والدوال الموجبية

Energy Levels and Wave Functions

توصلنا الى الحلول المقبولة فيزيائيا لمعادلة شرودنكر غير المعتمدة على الزمن لمسألة المتذبذب التوافقي الخطي التي يمكن كتابتها الان بالشكل :

$$U_n(x) = N_n e^{-\alpha^2 x^2/2} H_n(\alpha x) \quad \dots\dots\dots (30-3)$$

حيث

$$\lambda_n = 2E_n / (\hbar \omega) = 2n+1 \quad , \quad \alpha = \sqrt{m\omega / \hbar} \quad \dots\dots (31-3)$$

هنا : ω هو التردد الدائري الكلاسيكي و $H_n(\alpha x)$ هي كثيرة حدود هيرمايت من الدرجة n ، والثابت N_n هو ثابت التعبير الذي سنجد قيمته فيما بعد كالاتي :

$$\delta_{mn} = 0, \quad m \neq n$$

$$= 1, \quad m=n$$

وواضح اننا كتبنا $U_m(x)$ بدلا من $U_m^*(x)$ لانها متساويان كما يبين الحل (30-3) أو الجدول (1-3) • واستخدام الدوال الموجية المعطاة بالحل (30-3) في شرط التعامد وللإيجاد نصل على التكامل التالي :

$$N_m N_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} H_m(\alpha x) H_n(\alpha x) dx = \delta_{mn}$$

وإذا تبديل المتغير x بالمتغير y حسب العلاقة $y = \alpha x$ نستطيع كتابة

$$\frac{N_m N_n}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_m(y) H_n(y) dy = \delta_{mn} \quad \dots\dots\dots (35-3)$$

ولايجاد هذا التكامل نستخدم تعريف الدالة المولدة كما يلي :

$$S(s, y) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(y) \frac{s^n}{n!} = e^{-s^2 + 2sy}$$

$$T(t, y) = \sum_{m=0}^{\infty} H_m(y) \frac{t^m}{m!} = e^{-t^2 + 2ty}$$

أما دالة الموجة للمتذبذب فتعرف بدلالة الدوال الذاتية

للطاقة على الشكل التالي :

$$\psi(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n U_n(y) e^{-iE_n t / \hbar}$$

وإذا استخدمنا المعادلتين (33-3) و (18-3) نستطيع

كتابة :

$$\psi(y, t) = e^{-i\omega t/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n N_n}{\alpha} e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y) e^{-in\omega t} \quad \dots(34-3)$$

4-3 الدوال الموجية للمتذبذب التوافقي متعامدة وعيارية

The Wave Functions are Orthonormal

لقد بينا في الفصل السابق أن الدوال الموجية التي تحقق معادلات شرودنجر هي دوال متعامدة وعيارية وقد عبرنا عن هذه الحقيقة من خلال المعادلة (2-64) • وفي حالة المتذبذب التوافقي الخطي نكتب المعادلة المذكورة

كما يلي :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U_m(x) U_n(x) dx = \delta_{mn}$$

والرجوع الى المعادلة (35-3) والتمويض فيها عن التكامل للحالة $n=m$ نحصل على ثابت التمييز N_n كما ورد في المعادلة (32-3) ،

$$N_n = (\alpha / \sqrt{\pi} 2^n n!)^{\frac{1}{2}} \quad \text{اي}$$

وكما يبد وفان الدوال المولدة المذكورة مفيدة لدراسة وتوضيح خصائص كثيرات الحدود لهيرمايت .

5-3 مقارنة النظرية الكلاسيكية مع النظرية الكمية

Comparison of Classical Theory with Quantum Theory

تختلف النتائج التي حصلنا عليها عن نتائج النظرية الكلاسيكية فيما يلي :

أولاً - طاقة الحالة الدنيا لا تساوى صفراً .

ثانياً - مستويات الطاقة غير متصلة بل متقطعة (Discrete) .

ثالثاً - في النظرية الكلاسيكية تتناسب كثافة الاحتمالية عكسياً مع الانطلاق . أما في النظرية الكمية فانها تعطي بالكمية $|U_n(x)|^2$ وبدون شك فهي تعطي تصرفاً مختلفاً عن تصرف المتذبذب الكلاسيكي .

أما تفسير اختلاف النتائج في النظريتين فيكون كالآتي :

أولاً . ان قيمة الطاقة E_0 للحالة الدنيا ضئيلة ولا يمكن قياسها بتجربة عيانية . فمثلاً لمتذبذب تردده الدائري الكلاسيكي $\omega = 10^6$ Hertz فان

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega = 0.5 \times 10^{-28} \text{ joule}$$

ثانياً . ان الفرق بين مستويين متتاليين للطاقة هو $\hbar \omega$ وعددياً يساوي 10^{-28} joule .

وهو بطبيعة الحال مقدار ضئيل جداً فلا عجب اذا بدت مستويات الطاقة

وكون منهما التكامل :

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(s,y) T(t,y) e^{-y^2} dy = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^n t^m}{n! m!} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(y) H_m(y) e^{-y^2} dy$$

..... (36-3)

غرضنا أن التكامل على الطرف الأيسر من (36-3) يمكن كتابته بعد التعميض عن الدالتين S و T كما يلي :

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(s,y) T(t,y) e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2+2sy} e^{-t^2+2ty} e^{-y^2} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2st - (y-s-t)^2} dy = e^{2st} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz$$

$$= e^{2st} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n s^n t^n}{n!} \quad \dots\dots\dots (37-3)$$

ومساواة معاملات $s^n t^m$ في الطرفين الايمن في المعادلتين (36-3) و (37-3)

اعلاه نتوصل الى ما يلي :

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(y) H_m(y) e^{-y^2} dy = 0, \quad n \neq m \quad \dots\dots\dots (38-3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(y) H_n(y) e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi} 2^n n! \quad , \quad n = m \quad \dots\dots\dots (39-3)$$

تمارين الفصل الثالث

(1) حل مسألة الحركة التوافقية البسيطة في خط مستقيم كلاسيكياً ، ومن ثم
جد كل من الطاقة الحركية والكامنة والكلية للمتذبذب التوافقي الخطي السدى
كتلته m وتردده الدائري ω .

(2) جد في التمرين السابق (أ) معدل الطاقة الكامنة (ب) معدل الطاقة
الحركية (ج) معدل الطاقة الكلية . أحسب كل معدل على فترة زمنية مقدارها
زمنذبذبة واحدة .

(3) اذا علمت ان كثافة الاحتمالية \mathcal{S}_0 في النظرية الكلاسيكية لتواجد المتذبذب
التوافقي الخطي في نقطة ما تتناسب عكسياً مع الانطلاق v فاثبت أن :

$$\mathcal{S}_0 = \frac{1}{Tv}$$

حيث T هي مدة الذبذبة الواحدة . واذا كانت E هي طاقة المتذبذب
الكلية فيرهن أن :

$$\mathcal{S}_0 = \frac{1}{T \sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2 x^2}}$$

حيث m كتلة المتذبذب و ω تردده الدائري . ارسم الان خطاً
بيانياً يبين العلاقة بين كثافة الاحتمالية \mathcal{S}_0 الكلاسيكية والازاحة x .

(4) افرض أن حالة المتذبذب في الزمن صفر ($t=0$) معروفة وتوصف بالدالة
 $\psi(x,0)$. جد الثوابت A_n في المعادلة (7-3) فافرض
ان $U_n(x)$ تكون دوال عيارية ومتعامدة .

متصلة (continuous) في النظرية الكلاسيكية .

ثالثاً . في تجربة عيانية ومطاقة كلية تقارب 10^{-7} joule فان $n \sim 10^{21}$
اذا كانت $\omega = 10^6$ Hertz . ولعل هذه القيم العاليية
لـ n يمكن فقط قياس معدل الاحتمالية لعدة تذبذبات لـ $U(x)$
ويمكن البرهنة ان هذا المعدل يتبع التنبؤ الكلاسيكي (لاحظ المسألة
رقم 24 في تمارين الفصل الثالث) .

(12) استخدم المعادلة (27-3) لاثبات العلاقات الثلاث التالية :

$$H_n'(y) = 2yH_n(y) - H_{n+1}(y)$$

$$H_{n+1}(y) = 2yH_n(y) - 2nH_{n-1}(y)$$

$$H_n'(y) = 2nH_{n-1}(y)$$

وإذا علمت أن $H_3(y) = (8y^3 - 12y)$ فتتحقق من صحة العلاقات الثلاث أعلاه .

(13) جهز الخطوات اللازمة للحصول على الدوال $U_n(x)$ في الجدول (1-3) .

(14) برهن أن :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

(15) باستخدام مبدأ اللادقة برهن أن الطاقة الدنيا للمتذبذب التوافقي الخطي هي $\frac{1}{2} \hbar \omega$.

(16) برهن أن الدوال الموجبة التالية هي دوال متعامدة وعيارية :

$$U_0(x) = \frac{\alpha^{\frac{1}{4}}}{\pi^{\frac{1}{4}}} e^{-\alpha^2 x^2 / 2}$$

الجواب :

$$A_n = \int_{-\infty}^{+\infty} U_n^*(x) \psi(x,0) dx$$

(5) جهز الخطوات اللازمة لاشتقاق المعادلة (11-3) .

(6) جهز الخطوات اللازمة للتوصل الى المعادلة (19-3) .

(7) أثبت أنه عند فك الدالة e^{+y^2} كمتسلسلة أسية فإن النسبة بين معاملي حدين متتاليين هي كما يلي :

$$\frac{a_{s+2}}{a_s} \longrightarrow \frac{2}{s}$$

• للقيم العالية لـ s

(8) جد H_0 ، H_1 ، H_2 ، H_3 مستخدماً التعريف (26-3)

(9) أثبت أن العبارات التي حصلت عليها في التمرين (8) تحقق المعادلة التفاضلية لهيرمايت . (المعادلة 25-3) .

(10) استخدم المعادلة (27-3) لتبرهن :

$$H_n(-y) = H_n(+y) \quad \text{إذا كانت } n \text{ زوجية فان}$$

$$H_n(-y) = -H_n(+y) \quad \text{وإذا كانت } n \text{ فردية فان}$$

لاحظ أن $V(+x) = V(-x)$ للمتذبذب التوافقي الخطي .

(11) أثبت أنه من الممكن اشتقاق المعادلة (26-3) باستخدام العلاقة المعطاة بالمعادلة (27-3) .

(ج) جد الاحتمالية لكي يكون المتذبذب التوافقي خارج سعة الحركة .

(د) جد الاحتمالية لكي يكون المتذبذب التوافقي خارج ضعف سعة

الحركة .

الجواب : $P_1 = 0.158$ ، $P_2 = 0.0046$

(22) احسب القيمة المتوقعة للطاقة الكامنة للمتذبذب التوافقي لحالة ذاتية للطاقة

ثم اثبت ان القيمة المتوقعة للطاقة الكامنة تساوي القيمة المتوقعة للطاقة

الحركية .

الجواب : $\langle V \rangle = \frac{1}{2}(n+\frac{1}{2}) \hbar \omega = \frac{1}{2} E_n$

(23) احسب $\Delta x \Delta P$ في حالة ذاتية للطاقة للمتذبذب التوافقي .

الجواب : $\Delta x \Delta P = \frac{E_n}{\omega} = (n+\frac{1}{2}) \hbar$

(24) قارن بين الاحتمالية الكلاسيكية والاحتمالية الكمية موضحا ذلك بالرسم

عندما تكون $n=10$ ثم ناقش الحالة من وجهة نظر مبدأ التبادل .

$$U_1(x) = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{4}}} (2\alpha x) e^{-\alpha^2 x^2/2}$$

$$U_2(x) = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{8^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{4}}} (4\alpha^2 x^2 - 2) e^{-\alpha^2 x^2/2}$$

(17) جد $\Delta x \Delta P_x$ مستخدما $U_1(x)$ و $U_0(x)$ في التمرين (16)

الجواب : $\frac{3}{2} \hbar$ ، $\frac{1}{2} \hbar$

(18) (أ) جد كثافة الاحتمالية الكلاسيكية للمتذبذب التوافقي الذي طاقته $\frac{1}{2} \hbar \omega$

(ب) جد كثافة الاحتمالية الكمية للمتذبذب التوافقي عندما تكون $n=0$

(ج) قارن بين الحالتين أعلاه موضحا ذلك بالرسم .

(19) (أ) جد كثافة الاحتمالية الكلاسيكية للمتذبذب التوافقي الذي طاقته $\frac{3}{2} \hbar \omega$

(ب) جد كثافة الاحتمالية الكمية عندما تكون $n=1$

(ج) قارن بين الاحتماليتين وناقش النتائج التي تحصل عليهم

من النظريتين .

(20) كرر ما عملته في التمرينين (18) و (19) عندما تكون $n=2$

(21) (أ) جد الغاية الكلاسيكية لحركة المتذبذب التوافقي عندما تكون طاقته

تساوي $\frac{1}{2} \hbar \omega$ والتي تسمى بسعة الحركة التوافقية البسيطة .

(ب) أوجد العلاقة بين سعة الحركة التوافقية البسيطة والثابت α المعطى

في المعادلة (3-8)

$$\therefore I = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \dots\dots\dots (3 - 2^{\circ})$$

وإذا اشتق طرفا المعادلة (3 - 2^o) بالنسبة لـ a نحصل على :

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \dots\dots\dots (4 - 2^{\circ})$$

وباجراء نفس العمل على المعادلة (4 - 2^o) نحصل على

$$\int_0^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}} \dots\dots\dots (5 - 2^{\circ})$$

والان باجراء التكامل المباشر نستطيع كتابة

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \dots\dots\dots (6 - 2^{\circ})$$

وأخذ مشتقة طرفي المعادلة (6 - 2^o) بالنسبة لـ a

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2} \dots\dots\dots (7 - 2^{\circ})$$