CHAPTER ONE

MATHEMATICAL LOGIC

المنطق الرياضياتي

علم المنطق هو أحد فروع علم الرياضيات الصرفة وهو علم حديث نسبياً، وقد أخذت أهميته تتزايد يوماً بعد يوم. يفهم من إسم هذا العلم أنه يشارك اللغات في وظائفها ومدلولاتها وتعبيراتها، فعلم المنطق يرتكز على مبادىء واضحة متفق عليها عالمياً، وله رموز خاصة به، ومن الجدير بالذكر أن كل علم أو بالاحرى كل فرع من فروع المعرفة له ألفاظ ومصطلحات خاصة به، إلا ان هذه الالفاظ ربما لا تستخدم في حديثنا اليومي، وقد يستخدم بعضها بمعنى مقارب لما تعنيه في حديثنا اليومي، وفي حالات يختلف معناها تماماً عن مقصودنا وذلك ربما يرجع الى عدم دقة التعبير عندنا وليس معناه قصوراً في اللغة المستخدمة في التعبير. ولما كان هذا الابهام غير مرغوب فيه وبخاصة في الرياضيات، فلم يترك الامر للإجتهاد في المنطق الرياضياتي، بل اتفق على رموز و أدوات لربط الجمل واعطيت معاني محددة تماماً لاتقبل اللبس والغموض وهذا يقودنا الى القول بان المنطق الرياضياتي لغة علمية متفق عليها بين الرياضياتيين، ولاغنى للرياضيات عن المنطق. فالرياضيات تحتاج الى تفكير منطقي ولا يكون برهان صيغة او مبرهنة رياضياتية مثلاً سهلاً ومقبولاً ما لم يستند في خطواته على سلسلة من الافكار مرتبط بعضها ببعض.

العبارات (التقارير): Statements

أن الجمل في اللغة العربية منها ماهي فعلية ومنها ماهي إسمية ومنها ماهي إستفهامية أو طلبية...الخ. وفي المنطق الرياضياتي نقسم الجمل الى قسمين هما:

(أ) جمل خبرية وهي التي تحمل إلينا خبراً ما.

(ب) جمل غير خبرية (إنشائية) وهي التي لا تحمل خبراً معيناً.

<u>Definition (1.1):</u>

A ***statement*** is a declarative sentence which is either (True: T) or (False: F), but not both. We use the letters ***p, q, r, s, …,*** **ect** to denote a proposition.

كل جملة تحمل خبراً ما ويمكن الحكم بأنها إما صائبة (True) وإما خاطئة (False)، ولا تكون صائبة وخاطئة في آن واحد تسمى **عبارة (او تقرير)**.

<u>Definition (1.2):</u>

A statement which has truth news sentence is called ***true statement*** and a statement which has false news sentence is called ***false statement***.

كل جملة خبرية صائبة تسمى **عبارة صائبة** وكل جملة خبرية خاطئة تسمى **عبارة خاطئة**.

Example (1.3):

(1) The sun is rises from the east. *News sentence (truth statement).*
(2) Baghdad is the capital of Iraq. *News sentence (truth statement).*
(3) 17 < 14. *News sentence (false statement).*
(4) Wow, this grove is very beautiful. *Sentence is not news (Wonder).*
(5) Please Fawaz, be wishful doing a good. *News sentence.*
(6) 3 + x = 7, where x is an integer. *News sentence.*
(We can't judge it as true or false unless we know the value of the variable x). Statements from this type called (***Propositional Functions***).

Negation of Statements:

If we want to negation the statement "*it's raining today*", we will say "*it doesn't rain today*". If the statement that we want to negation it is true, then the negation statement will be false. So, contrariwise.

نفي العبارة (التقرير): إذا أردنا أن ننفي العبارة "السماء تمطر اليوم" فإننا نقول "السماء لا تمطر اليوم". وإذا كانت العبارة المراد نفيها صائبة فإن نفيها تكون عبارة خاطئة والعكس بالعكس.

Example (1.4):

(1) 2+3=8. *false statement*. ***Negation:*** $2+3\neq 8$. *true statement*.
(2) Baghdad is a capital of Iraq. *true statement*. ***Negation***: Baghdad is not a capital of Iraq. *false statement*.

Often, we symbolized the statement as the letter of the alphabet to ease. In Example (1.4), if we symbol for the statement contained in paragraph (1) under the symbol "***p***", we will symbolize to the negation of this statement by "~***p***" (read negation of ***p*** or not ***p***). The two statements ***p*** and ~***p*** are impossible to be true or false at the same time. We will use the letter **T** to symbolize the word (True) and the letter **F** to symbolize the word (False). Then, we will generate a table which is called ***the right table*** (***truth table***) that describes the ***p*** and ~***p*** together as shown in the following table:

كثيراً ما نرمز لعبارة ما بحرف من حروف الهجاء للسهولة ففي المثال (1.4) إذا رمزنا للعبارة الواردة في الفقرة (1) بالرمز P فإننا نرمز لنفي هذه العبارة بالرمز P ~ (تقرأ نفي P) وحيث ان العبارتين P و P~ يستحيل ان يكونا صائبتين معاً أو خاطئتين معاً، فإننا لو جعلنا الحرف T يرمز لكلمة صائب (True) والحرف F يرمز لكلمة خاطىء (False)، لأمكننا تكوين جدول يدعى جدول الصواب (جدول الحقيقة) يصف P و P~ معاً كما هو موضح في الجدول الآتي:

p	$\sim p$
T	F
F	T

Table 1

ملاحظات:

(1) تسمى T و F بقيمتي الصواب (أو الحقيقة) ويستعاض عن كل منهما أحياناً بـ 1 و 0 على الترتيب.

(2) لاحظ أنه مهما كانت العبارة P فإنها إما أن تاخذ القيمة T أو القيمة F، أما قيمة صواب العبارة P ~ فيجب أن تخالف قيمة صواب P كما أشرنا الى ذلك آنفاً.

Definition (1.5):

A statement that carrying one news is called a ***simple statement*** (***primitive***), and if a statement carried two (or more than one) news then it is called ***compound statement***.

In other words, a proposition is said to be ***primitive statement***, if it cannot be divided into simpler proposition. And a proposition is called ***compound statement***, if it is compound of one or more primitive propositions using logical connective operators.

Example (1.6):

(1) Water freezes at zero degrees and boils at 100 degrees. (compound statement).

(2) Nawaf studies mathematics or geograph (compound statement).

(3) If 3 + 1 = 4, then 6 +7 = 13. (compound statement).

(4) Equilateral triangle abc if and only if it was Equiangular. (compound statement).

Basic Logical Connective Operators:

There are some basic logical operators that connect simple propositions to produce composite proposition. These operators are:

1. Conjunction operator (and):

Let p and q are two primitive propositions. The conjunction of p and q is denoted by **"$p \wedge q$"** and read as "p and q". If both p and q are true, then $p \wedge q$ is true, otherwise $p \wedge q$ is false.

Below is the truth table for the conjunction of two propositions:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Table 2

Example (1.7):

Assuming that *p*, *q*, *s* and *t* are respectively the following statements:
2 + 2 = 4, the moon orbits around Mars, passing the Euphrates River in Iraq, 3 = 0.

We find that *p*, *r* true statements, while *q*, *t* false statements. Thus by reference to the Table (2) conclude that:

$\boldsymbol{p \wedge s}$ is a true statement, but the $\boldsymbol{p \wedge q}$, $\boldsymbol{p \wedge t}$, $\boldsymbol{q \wedge t}$, $\boldsymbol{q \wedge t}$, $\boldsymbol{(p \wedge t) \wedge s}$ are all false statements.

2. Disjunction operator (or):

Let *p* and *q* are two primitive propositions. The disjunction of *p* and *q* is denoted by **"$p \vee q$"** and read as "p or q". We say that "$p \vee q$" is true when p is true or q is true or both are true. If both p and q are false, then $p \vee q$ is false.

Below is the truth table for the disjunction of two propositions:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Table 3

Example (1.8):

(1) 5 + 1 = 6 or 3×4 = 12. *correct statement*.
(2) 9 an even number or 9 an odd number . *correct statement*.
(3) Riyadh, the capital of Syria or Delhi, the capital of Algeria. *false statement*.

3. Conditional operator (If…then…):

Let *p* and *q* are two primitive propositions. The conditional statement "$p \rightarrow q$" is the proposition "if *p* then *q*". The conditional statement "$p \rightarrow q$" is false if *p* is true and *q* is false, otherwise "$p \rightarrow q$" is true.

Below is the truth table for the conditional operator of two propositions:

P	***q***	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Table 4

Example (1.9):

(1) $5 + 7 = 12 \longrightarrow 2 + 6 = 8$ **T**
(2) $5 + 7 = 11 \longrightarrow 2 + 6 = 8$ **T**
(3) $5 + 7 = 11 \longrightarrow 2 + 6 \neq 8$ **T**
(4) $5 + 7 = 12 \longrightarrow 2 + 6 = 7$ **F**

4. Bi-conditional operator (if and only if):

Let *p* and *q* are two primitive propositions. The bi-conditional statement "$p \leftrightarrow q$" is the proposition "*p* if and only if *q*". The bi-conditional statement "$p \leftrightarrow q$" is true when *p* and *q* have the same true value, otherwise "$p \leftrightarrow q$" is false.

Below is the truth table for the bi-conditional operator of two propositions:

P	***q***	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Table 5

For that we set true table in terms of tables (2) and (4) as follows:

A	**B**	**$A \to B$**	**$B \to A$**	**$(A \to B) \wedge (B \to A)$**	**$A \longleftrightarrow B$**
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

Table 6

Notes from the table (5) that the phrase $A \leftrightarrow B$ are truth when they are two statements A and B true together or false together.

Example (1.10):

(1) $5 + 3 = 8 \leftrightarrow 5 \times 3 = 15$. T

(2) Iraq is located in Europe, $\leftrightarrow 5 + 3 = 8$. F

(3) $5\times3 = 15 \leftrightarrow$ Fatima man's name. F

(4) Sanaa, the capital of Russia's $\leftrightarrow$ sugar tastes bitter. T

Definition (1.11): Logical Equivalence

Two statements that have the same truth values are called logically equivalent. The notation $p \equiv q$ or $p= q$ denotes that p and q are logically equivalent.

Example (1.12):

(1) $(p \to q) \leftrightarrow (q\to p) \equiv$ (Table 6).

(2) $p \equiv p \wedge p \equiv p \vee p \equiv \sim (\sim p)$ as in the following table.

P	**p**	**~p**	**$p \wedge p$**	**$p \vee p$**	**~(~p)**
T	T	F	T	T	T
F	F	T	F	F	F

Table 7

Theorem (1.13): De Morgan's Laws

Let p and q are two statements, define the following logical equivalence:

(A) $\boldsymbol{\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)}$

(B) $\boldsymbol{\sim (p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)}$

Proof:
(A) Consider the following truth table for $\sim(p \wedge q)$ and $(\sim p) \vee (\sim q)$

P	q	~p	~q	p∧ q	~(p ∧ q)	(~p) ∨ (~q)
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

Table 8

From columns sixth and seventh we see the equally of the right values and thus was required.
(B) To prove it is required in the same way (A) (leave to the student).

Note:

We can prove the validity of paragraph (B) from Theorem (1.13) in another way as follows:

Negation the right end of the relationship (B), we find that:

$\sim[(\sim p) \wedge (\sim q)] \equiv \sim(\sim p) \vee \sim(\sim q)$ *According to paragraph (A) of this Theorem.*

$\equiv p \vee q$ *Table (7)*

$\sim[(\sim p) \wedge (\sim q)] \equiv p \vee q$ (∗)

By the negation of the relationship (∗) we get the required proved which

$\sim(\sim[(\sim p) \wedge (\sim q)] \equiv \sim(p \vee q)$

Therefore; $(\sim p) \wedge \sim q) \equiv \sim(p \vee q)$

Theorem (1.14):

If p and q are any two statements, then: $p \to q \equiv \sim(p \wedge \sim q)$.

Proof: According from Definition (1.11) is enough to create table (9), in which we see that the fifth and sixth columns are equal in truth values so desired proved.

p	Q	~ q	p ∧ ~ q	p → q	~(p ∧ ~ q)
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T

Table 9

Definition (1.15):

A compound statement that is all it's values are true is called a ***logically truth***. And it is ***logically false*** if all it's values are false.

Example (1.16):

(1) A statement $p \vee \sim p$. *logically truth.*
(2) A statement $p \wedge \sim p$. *logically false.*

Consider the following table;

p	**~ p**	**p ∨ ~ p**	**p ∧ ~p**
T	F	T	F
F	T	T	F

Table 10

Note:

Some statements may be not logically truth and not logically false, as in the phrases $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$, for example.

Definition (1.17):

A statement p lead to a statement q, and represented that by symbol $p \Rightarrow q$, if the statement $p \rightarrow q$ is logically truth. As sometimes we say that p is the introduction and q is the result.

Example (1.18):

1) For any statement p, then $p \Rightarrow p \vee \sim p$. Since, $p \rightarrow p \vee \sim p$ is a logically truth statement.
2) For any two statements p and q, then $p \Rightarrow p \vee q$. Since, the statement $p \rightarrow p \vee q$ is a logically truth statement.
3) For any two statements p and q, then $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$. Since, the statement $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ is a logically truth statement.

Notes: Let p and q are two statements;

1) If $p \Rightarrow q$, then from the truth table for the compound statement $p \rightarrow q$, we show that:
   (A) The statement q is truth whenever the statement p is truth.
   (B) The statement p is false whenever the statement q is false.
2) If $p \Rightarrow q$ we express it by saying that, if the statement p is true, then it is enough to lead that the statement q is true too).

3) By the symbol $p \nRightarrow q$ we mean that the statement p does not lead to the statement q.
4) $p \Rightarrow q$ does not have a correct table, since the symbol "$\Rightarrow$" is not logical connective operator between the two statements p and q.

Definition (1.19):

Both statements p and q are lead to the other, in other words, the statement p is lead to the statement q and the statement q is lead to the statement p, and symbolized $p \Leftrightarrow q$, if the statement $p \leftrightarrow q$ is logically truth.

The symbol "$\Leftrightarrow$" is not logical connective operator between the two statements p and q. Therefore, $p \Leftrightarrow q$ dose not have truth table. Sometimes we will express the symbol "$\Leftrightarrow$" by saying ***"the necessary and sufficient condition"***. It also means equivalent to the word. And sometimes it can be used instead of the symbol "$\equiv$" as illustrated by the following example.

Example (1.20):

Let p and q are any two statements, then $\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$.

Solution: Following is the truth table for the statement $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \sim q$;

p	**q**	**~ q**	**p→q**	**p∧~q**	**~(p→q)**	**~(p →q) ↔ (p ∧~q)**
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	F	F	T

Table 11

Note; from the above table the statement

$\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \sim q$ is logically truth as shown in the seventh column. And since the truth values in columns fifth and sixth in that table are equal, which is consistent with the definition of parity, that is mean $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$. we would consider that the symbols $\Leftrightarrow$ or $\equiv$ have the same meaning.

Here it should be noted that if it is not considered $p \Leftrightarrow q$ accrued, we symbolized by the symbol $p \not\Leftrightarrow q$.

<u>Example (1.21):</u>

Verification the relationship between $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ or not, taking advantage of the comments received after the Example (1.18).

Solution:

(A) ***The first method***: From our knowledge of mathematical. We know that if the statement $x = 3$ is true, then it is necessarily lead to that statement $x^2 = 9$ is true, also. Since it cannot be $x = 3$ while the $x^2 \neq 9$. Thus, $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ verification.

(B) ***The second method:*** From our information also. We know that if the statement $x^2 = 9$ is false, then the statement $x = 3$ be false, also. Which means that, $x \neq 3$. Hence, $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ is verification.

<u>Note:</u>

If we have one statement, then the number of possible truth values of that statement is two. And if we have two different statements, then the number of possible truth values of the two statements is four. And if we have three different statements, then the number of possible truth values is eight. That is lead that we can proof that, if we have n different statements, then the number of possible truth values equal to 2^n that $B(n) = 2^n; \quad n \in \mathbb{N}$.

<u>ملاحظة:</u>

إذا كانت لدينا عبارة واحدة فإن عدد قيم صوابها الممكنة إثنان، وإذا كانت لدينا عبارتان مختلفتان فإن عدد قيم صوابهما الممكنة أربع، وإذا كانت لدينا ثلاث عبارات مختلفة فإن عدد قيم صوابها الممكنة ثمان، هذا ويمكن البرهان أنه إذا كان لدينا n من العبارات المختلفة فإن عدد قيم صوابها الممكنة يساوي 2^n أي أن $B(n) = 2^n; \quad n \in \mathbb{N}$

Theorem (1.22):

Consider the statements p, q and r. Then;

(1) $p \wedge p \equiv p$ as well as $p \vee p \equiv p$.

(2) $p \wedge q \equiv q \wedge p$ as well as $p \vee q \equiv q \vee p$ (substitution property)

(3) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ as well as $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ property (respectively) the merger.

(4) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ distribution of property.

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ distribution of property.

proof: We will prove that "$\wedge$" is distributed on "$\vee$", (leaving the rest of the proofs on the health properties mentioned in the theorem on the student) for that creating the following table and conclude that it's health is required, as shown in the two columns seventh and eighth.

p	**q**	**r**	**$p \wedge q$**	**$p \wedge r$**	**$q \vee r$**	**$p \wedge (q \vee r)$**	**$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$**
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	T	F	F
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	T	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Table 12

Exercises

1) If p representation for the statement "*the rain came down*" and q representation for the statement "*the ground is grow*". Write the verbal translator for each of the following:

(a) $p \wedge q$ (b) $p \vee q$ (c) $\sim p \wedge q$ (d) $p \rightarrow q$
(e) $q \leftrightarrow p$ (f) $\sim p$ (g) $\sim p \rightarrow \sim q$

2) If p and q are two statements proving that:

$$p \rightarrow q \equiv (\sim p) \vee q \equiv \sim(p \wedge \sim q) \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

3) Proved that the following statements truth logically:

(a) $p \rightarrow p \vee p$ (b) $p \rightarrow p \vee q$ (c) $p \wedge q \longrightarrow p$
(d) $p \wedge q \rightarrow q \wedge p$ (e) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

4) Prove that the following statement is not truth logically and not false logically

$$p \rightarrow p \wedge q.$$

5) If p, q and r are three statements imposed, prove that:

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r)$$

CHAPTER TWO

SET THEORY

نظرية المجموعات

إن "المجموعة" هي كلمة مألوفة لدينا نستخدمها دائماً في حياتنا اليومية، ولكن يستحيل تعريفها تعريفاً دقيقاً. وربما يكون أحسن ما نقول عنها إنها مفهوم رياضياتي (Mathematical Concept) شأنها شأن النقطة، والمستقيم والمستوي،....أول من استخدم نظرية المجموعات هو العالم الألماني جورج كانتور (1845 – 1918 م).

وللمجموعات لغة و رموز خاصة بها وتعد في حقيقة الامر أساساً ومنطلقاً لكثير من فروع الرياضيات المختلفة، فهي وسيلة ناجحة جداً لتوحيد لغة الرياضيات واعتبارها وحدة متماسكة. وتتكون المجموعة من أشياء متمايزة، ويجب أن تتحدد المجموعة تحديداً دقيقاً لا يقبل اللبس، نعني بذلك أننا إذا اعطينا شيئاً ما فإننا نستطيع الحكم ما إذا كان هذا الشيء ينتمي الى المجموعة المفروضة أم لا.

Definition 2.1:

A ***set*** is an unordered collection of objects. The objects are called ***the elements*** or ***members*** of the set.

المجموعة هي تجمع من الاشياء المعروفة بدون ترتيب والتي تسمى بالعناصر او اعضاء تنتمي للمجموعة.

NOTE:

1. The capital letters usually used to represents sets such as A, B, C, …, etc.
2. The small letters such as a, b, c, …, etc are used to represents the members or the elements of the set.
3. Membership in a set is denoted as follows: $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ denotes that a belong to a set A.
4. Non-membership to a set is denoted as follows: $\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{A}$ denotes that a does not belong to a set A.

Specifying a Set: طرق التعبير عن المجموعة

1. Listing members of a set: **الطريقة الجدولية**

In this way, we list all non-repeated members of a set separated by commas and contained in braces { }. The members are not in an order.

طريقة الحصر

وهذه الطريقة عبارة عن كتابة عناصر المجموعة بين قوسين من النوع {}، على أن توضع فواصل (فوارز) بين العناصر، ولا أهمية لترتيب العناصر هذه.

Example 2.2:

1. A= {1, 2, -5, 9}, B= {x, y, Ali, fish}, C= {y_1, y_2, y_3} are sets.
2. The set of vowel letters in English: V= {a, e, i, o, u}.
3. The set of even positive numbers less than 5 is: W= {0, 2, 4}.
4. The set of positive numbers less than 50 is: K= {1, 2, …, 49}.

2. Listing a set property: استخدام الصفة المميزة للمجموعة

In this way, we state the property that characterize the elements in a set in as follows: {x: p(x)}, where x is a variable and p(x) is an open sentence.

وهذه الطريقة كثيراً ما تستخدم بواسطة تحقيق هذا العنصر للصفة (أو الصفات) المميزة التي يجب أن يتمتع بها عنصر في هذه المجموعة وعندها نكتب المجموعة على الصورة الاتية:

S = {x:$P(x)$} أو S = {x | $P(x)$}

حيث x (متغير) عنصر إختياري من عناصر المجموعة S و $P(x)$ تعني عبارة أو جملة مفتوحة تحقق خاصية أو خواص معينة (وهذا ما نعني به الصفة أو الصفات المميزة للعنصر x).

Example 2.3:

A={x: x∈Q}.

B={x: x $is\ positive\ odd\ and$ x <10}={1, 3, 5, 7, 9}.

C={x∈N: 1≤x≤5}={1, 2, 3, 4, 5}.

Definition 2.4: Empty Set المجموعة الخالية

The set that contains no elements is called an empty set and is denoted by { } or ∅.

Example 2.5:

1. A={x∈N: 2< x< 3}=∅
2. B={x∈E: x^2 =1} = ∅
3. C= {x∈N: x< 0}={ }

If S be any set then, we will denote to it's number of elements by |S|.

إذا كانت S مجموعة ما فسنرمز لعدد عناصرها بالرمز |S|.

Definition 2.6: If |S| < ∞ then, we said that S is finite set, otherwise S is called Infinite Set.

Example 2.7:

1. A={a, b, c,..., z} is finite set.
2. N={1, 2, 3, ….} is an infinite set.

Quantifiers المسورات

Quantifiers are open sentences written in a special way.

There are two types of quantifiers:

1. **Universal quantifiers** العبارة المسورة كلياً
2. **Existential quantifiers** العبارة المسورة جزئياً

1. Universal quantifiers:

Let p(x) be an open sentence on a set A. The notation ‘‘$\forall x\in A$: $p(x)$’’ denote the **universal quantification** "تسوير كلي" of $p(x)$ and it reads as: ‘‘for all $x\in A$: $p(x)$’’ or ‘‘for every $x\in A$: $p(x)$’’ or ‘‘for each $x\in A$: $p(x)$’’. The symbol $\forall$ is called **universal quantifie** "كليا "مسورا. The set A is called **domain** المجال**.**

Example 2.8:

Let N be the set of all natural numbers, $p(x)$: x+2>1 such that $x\in$ N. This statement is truth for each $x\in$ N, and written as: $\forall\, x\in$ N : x + 2 > 1.

لتكن N مجموعة الاعداد الطبيعية ولتكن العبارة P(x) هي $x + 2 > 1$ حيث $x \in$ N. إن هذه العبارة صائبة دوماً مهما كانت x في N ونعبر عن ذلك بالصورة $\forall$ x$\in$ N : x + 2 > 1 .

Example 2.9:

Find the truth value of the following open sentence: $\forall\, x\in R$: x+1>x.

Let A=R. Since the statement $p(x)$: x+1>x is true for all $x\in R$, the quantification $\forall\, x\in R$; x+1>x is **true.**

2. Existential quantifiers:

Let p(x) be an open sentence on a set A. The notation ‘‘$\exists\, x\in A$, $p(x)$’’ denote the **existential quantification"تسويرجزئي "** of p(x) and it read as: ‘‘there exists x; p(x)’’ or ‘‘there is x; $p(x)$’’ or ‘‘some x; $p(x)$’’. The symbol $\exists$ is called **existential quantifier** "جزئيا "مسورا. The set A is called **domain** المجال.

Example 2.10: There exists seasons in Iraq do not have rain.

Example 2.11: Let N be the set of all natural numbers, $p(x)$: $x+4 < 6$,then there exists $x\in$ N such that the statement $p(x)$ is truth , and written as :$\exists\ x \in$ N : $x + 4 < 6$.

Remark 2.12:

1. The existential quantifier $p(x)$ on a domain A is **true** if and only if there exists one element at least satisfy the statement $p(x)$.

العبارة المسورة جزئياً تكون صحيحة اذا وجد عنصر واحد على الاقل يحقق العبارة.

2. The existential quantifier $p(x)$ on a domain A is **false** if and only if there is no element satisfy the statement $p(x)$.

العبارة المسورة جزئياً تكون خاطئة اذا لم يكن هناك عنصر يحقق العبارة.

De Morgan's law for the existential quantifier:

قانون دي موركان للعلاقة بين التسوير الجزئي والكلي

$\sim[\exists\ x\in A;\ p(x)] = \forall x\in A;\ \sim p(x)$.

Example 2.13: Let E be the set of all even numbers, and R be the set of all real numbers.

1. $\sim[\exists x\in E;\ x+2\notin E] = \forall x\in E;\ x+2\in E$.
2. $\sim[\forall x\in \mathrm{R}:\ x+1 > x] \equiv \exists\ x\in \mathrm{R}:\ \sim(x+1 > x) \equiv \exists\ x\in \mathrm{R}:\ x+1 \le x$.

ملاحظات:

(1) نفي العبارة $\forall\ x \in S : P(x)$.

إذا كانت العبارة "$\forall\ x \in S : P(x)$" خاطئة، فإننا نعبر عن ذلك بالصورة $\sim[\forall x\in S{:}P(x)]$، وهذا يعني أنه يوجد على الاقل $x \in S$ بحيث أن $P(x)$ عبارة خاطئة وهذا التعبير يمكن أن نترجمه رمزياً بالشكل $\exists\ x \in S : \sim P(x)$ أي أن:

$\sim[\forall\ x \in S : P(x)] \equiv \exists\ x \in S : \sim P(x)$.

(2) نفي العبارة $\exists\ x \in S : P(x)$.

إذا كانت العبارة "$\exists\ x \in S : P(x)$" خاطئة، فإننا نعبر عن ذلك بالصورة $\sim[\exists x\in S{:}P(x)]$، وهذا يعني أنه لا يوجد على الاطلاق $x\in S$ بحيث أن $P(x)$ عبارة صائبة. وبمعنى آخر فإنه مهما يكن $x \in S$ فإن $P(x)$ عبارة خاطئة، وهذا التعبير يمكن أن نترجمه رمزياً بالشكل $\forall\ x \in S : \sim P(x)$ أي أن:

$\sim[\exists\ x \in S : P(x)] \equiv \forall\ x \in S : \sim P(x)$.

Subsets المجموعات الجزئية

<u>Definition 2.14</u>: The set A is a subset of a set B (simply, $A\subseteq B$) if and only if every element of A is an element of B. In other words, (A$\subseteq$ B iff $\forall$ x; $x\in A$ $\Rightarrow x\in B$).

If A is *not a subset* of B then it is denoted by$A\nsubseteq B$, ($A\nsubseteq B$ if and only if ~[$\forall$ x; $x\in A$ $\Rightarrow x\in B$] if and only if $\exists x$; $x\in A$ $\wedge$ x $\notin$ B).

A set A is said to be proper subset of B (simply, $A\subset$ B) whenever $A\subseteq B$ and $A\nsubseteq B$.

<u>Example 2.15:</u> Consider the sets A= {2}, B= {1, 2, 3} and C = {4, 5} and D= {-2, 1, 2, 3, 4, 5}. Then $A\subseteq B$, $A\subseteq D$, $B\subseteq D$ *and* $C\subseteq D$. It is true that $A\subseteq$A, $B\subseteq B$, $C\subseteq C$ and $D\subseteq D$.

<u>Example 2.16:</u> Let A= {4, 9} and B={$x\in N$: 1<x<10}. Determine whether $A\subseteq B$ or$B\subseteq A$.

Solution: The set B be can be written as B={2,…,9}. Then $\forall x$, $x\in A$ $\Rightarrow x\in B$. Hence, $A\subseteq B$. But $B\nsubseteq A$ because, for example, $\exists x$=5$\in B$ $\wedge$ 5 $\notin$ A.

<u>Example 2.17:</u> Let A= {$x\in N$: x>3} and B={$x\in N$: x^2>4}. Is $A\subseteq B$? Is $B\subseteq A$?

Solution: Let $x\in A\Rightarrow$ $x\in N$ *and* x>3$\Rightarrow$ x^2>9

$\Rightarrow$ x^2>4 $\Rightarrow$ $x\in B$.

Therefore, $A\subseteq B$.

But $B\nsubseteq A$, since $\exists$ x= 3$\in$ B $\wedge$ 3$\notin$ A.

Theorem 2.18: Let A, B and C are any sets, then

1. $\emptyset\subseteq A$.
2. $A\subseteq A$.
3. If $A\subseteq B$ and $B\subseteq C$ then $A\subseteq C$.

Proof 1: To prove $\emptyset\subseteq A$, we must prove that the statement $\forall x\in\emptyset$ $\Rightarrow$x$\in$ A is truth. Since, F $\Rightarrow$(T $\vee$ F) = T, then $\emptyset\subseteq A$.

2: To prove $A\subseteq A$, we must prove that the statement $\forall x\in A\Rightarrow$x$\in$A is truth. Since, T $\Rightarrow$T=T, then $A\subseteq A$.

3: To prove, if $A \subseteq B$ and $B \subseteq C$ then $A \subseteq C$, we must prove that $\forall x \in A \Rightarrow x \in C$.
Since $x \in A$ and $A \subseteq B \Rightarrow x \in B$.
So, $B \subseteq C$ and $x \in B \Rightarrow x \in C$.
Hence, $\forall x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C$
Therefore, $\forall x \in A \Rightarrow x \in C$ and $A \subseteq C$.

Definition 2.19: Proper Subset المجموعة الجزئية الفعلية

A set A is called a ***proper subset*** of B and denoted by ($A \subset B$) if and only if $A \subseteq B$ and there exist an element $x \in B$ such that is $x \notin A$.

i.e., $A \subset B$ iff $\{\forall x \in A \Rightarrow x \in B\} \wedge \{\exists y: y \in B \wedge y \notin A\}$.

Example 2.20: Let $A=\{x \in N: x^2-16 \leq 0\}$and $B=\{x \in N: x^2-16=0\}$. Determine if $A \subset B$ or $B \subset A$.
Solution: $A=\{1, 2, 3, 4\}$ and $B=\{4\}$. It is clear that $B \subset A$, since $B \subseteq A$ and $\exists y=1 \in A \wedge 1 \notin B$.

Example 2.21: (H. W.)**:** Let A={fish, dog, bird}, $B=\{x,y,z,w\}$. Determine if $A \subset B$ *or* $B \subset A$.

Example 2.22: (H. W.): Let $A=\{x \in Z: -2 \leq x \leq 10\}$
and $B=\{x \in Z: x^2+9=0\}$
Determine if $A \subset B$ *or* $B \subset A$.

Definition 2.23: Equal Sets المجموعات المتساوية

Two sets A and B are equal if they both have the same elements or, equivalently, if each is contained in the other.

i.e. $A=B \; iff \; A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

$\leftrightarrow \{\forall x: x \in A \rightarrow x \in B\} \wedge \{\forall x: x \in B \rightarrow x \in A\}$

$\leftrightarrow \{\forall x: x \in A \leftrightarrow x \in B\}$.

يقال للمجموعة A انها تساوي المجموعة B اذا كان لكل منهما نفس العناصر.

Example 2.24: Let A be the set which elements is the numbers of 6125, and B be the set which elements is the numbers of 1652, then A = {6, 1, 2, 5} and B = {1, 6, 5, 2}. It is clear that $A \subseteq B$ and $B \subseteq A$, so A = B.

Corollary 2.25: The empty set $\emptyset$ is unique.

المجموعة الخالية $\emptyset$ وحيدة.

Proof: Let $\emptyset_1$ be an empty set such that $\emptyset \neq \emptyset_1$,

1. $\emptyset \subseteq \emptyset_1$ "by Theorem 2.18".
2. $\emptyset_1 \subseteq \emptyset$ "by Theorem 2.18".

So, "by Definition 2.27", we get $\emptyset = \emptyset_1$.

Exercises

1. If A = {0, 1, 2, 3, 4} then, find $|S|$ in the flowing:

a) $S = \{x: (x \in A) \wedge (2x - 4 = 0)\}$.
b) $S = \{x: (x \in A) \wedge (2x > 4)\}$.
c) $S = \{x: (x \in A) \wedge (x + 1 > 0)\}$.
d) $S = \{x: (x \in A) \wedge (x^2 = 0)\}$.
e) $S = \{x: (x \in A) \wedge (x^2 - x = 0)\}$.
f) $S = \{x: (x \in A) \wedge (2x + 1 \leq 0)\}$.

2. Write the following sets by using Listing a set property:
a) S = {4, 5, 6, 7, 8, 9}.
b) S = {1, 4, 9, 16, 25}.
c) S = {3, 6, 9, 12, …}.

3. Let $p(x)$: $\forall x \in \mathbb{N}$: $x + 5 \geq 11$, then find S_1 and S_2 such that S_1 make $p(x)$ be true for every elements in it and S_2 make $p(x)$ be false for every elements in it, where $\mathbb{N}$ is the set of all natural numbers. So, find $|S_1|$ and $|S_2|$.

Definition 2.26: Power Set مجموعة القوى أو مجموعة الاجزاء

Given a set X, the **power set of X** is the set of all subsets of X. The power set of X is denoted by $P(X)$.

$P(X)= \{A: A\subseteq X\}$ and $A\in P(X) \Leftrightarrow A\subseteq X$.

لتكن X مجموعة يقال لمجموعة كل المجموعات الجزئية من X انها مجموعة القوى ويرمز لها بالرمز $P(X)$.

Example 2.27: Find $P(X)$ for the following sets X:

1. $X=\{1,2,a\}$, $P(X)=\{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{a\}, \{1,2\}, \{1,a\}, \{2,a\}\}$.
2. $X=\{\emptyset\}$, $P(X)=\{\emptyset, X\}$.
3. $X=\{\{-2\}, 3\}$, $P(X)=\{\emptyset, X, \{\{-2\}\}, \{3\}\}$.

ملاحظات:

(1) لاحظ أ ن عناصر مجموعة القوى هي مجموعات أي أن $\emptyset,\{a\},\ldots,S \in P(S)$، في حين أن $\emptyset,\{a\},\ldots,S \subseteq S$.

(2) من الملاحظة (1) نستطيع أن نعرف مجموعة القوى لمجموعة ما X كما يلي:

$$P(X) = \{A : A \subseteq X\}$$

Set's Algebra

1. Union الاتحاد

The **union** of the sets A and B, denoted by $\boldsymbol{A\cup B}$, is the set of elements which belong to A **or** to B.

اتحاد المجموعتين A و B هي مجموعة العناصر التي تنتمي الى A او B .

$A\cup B=\{x: x\in A \text{ v } x\in B\}$.

$x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B$.

$x\notin A\cup B \Leftrightarrow x\notin A \wedge x\notin B$.

لاحظ ان $A\subseteq A\cup B$ و $B\subseteq A\cup B$.

Example 2.28: Let $A=\{x\in N: 1\leq x\leq 5\}= \{1, 2, 3, 4, 5\}$ and $B=\{x\in N: 8\leq x\leq 12\}=\{8, 9, 10, 11, 12\}$.

Find $A\cup B$, $B\cup A$, $A\cup A$ and $B\cup\emptyset$.

Solution: $A\cup B=B\cup A=\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

$A\cup A=A$.

$B\cup\emptyset=B$.

Example 2.29: Let $A= \{x\in R: -2\leq x \leq 5\} = [-2, 5]$,
$B= \{x\in E: x^2-16=0\} = \{4,-4\}$.
$C= \{1, 4\}$
Find $A\cup(B\cup C)$, $(A\cup B)\cup C$, $P(B)$, $P(C)$, $P(B\cup C)$.

Definition 2.30: Generalization of the union تعميم الاتحاد

Let $A_1, A_2, \ldots, A_n$ be any sets. Then:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$
$$= \{x : (x \in A_1) \vee (x \in A_2) \vee \ldots \vee (x \in A_n)\}$$
$$= \{x : \exists i : x \in A_i; 1 \leq i \leq n\}$$

2. Intersection: التقاطع

The **intersection** of the sets A and B, denoted by $\boldsymbol{A\cap B}$, is the set of elements which belong to both A **and** B.

تقاطع المجموعتين A و B هي مجموعة العناصر التي تنتمي الى A و B معاً.

$A\cap B= \{x: x\in A \wedge x\in B\}$.
$x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B$.
$x\notin A\cap B \Leftrightarrow x\notin A \vee x\notin B$.

Example 2.31: Let S = {1, 2, 3, 4} and T = {-1, 2, -3, 4}.
Then $S \cap T = \{2, 4\}$.

لاحظ ان $S\cap T \subseteq S$ وان $S\cap T \subseteq T$. إن هذا يعني أن $S\cap T$ مكونـة من جميع العناصر المشتركة بين S و T.

Definition 2.32: Generalization of the intersection

Let $A_1, A_2, \ldots, A_n$ be any sets. Then:
$$\bigcap_{i=1}^{n} = A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n = \{x: x\in A_i \ \forall i=1, 2, \ldots, n\}.$$

ملاحظة:

يقال عن مجموعتين A و B إنـهما منفصلتان (disconnected) إذا واذا فقط كان
$A \cap B = \varnothing$.

Definition 2.33: Universal Set المجموعة الشاملة (الكلية)

Universal set R is the set that contains all the elements or all the sets we have under discussion.

Then for every set S_i then, $S_i \subseteq R$ and $\bigcup_{i=1}^{n} S_i \subseteq R$.

المجموعة الشاملة هي المجموعة التي تحتوي جميع العناصر او المجموعات قيد المناقشة.

Example 2.34: Let $A=\{x, y, 3\}$, $B=\{2, -5, 100\}$, $C=\{2, 3, 1\}$. Find a universal set R.

Example 2.35: Let $A=\{x \in R: 2 \leq x \leq 5\}$ *and* $B=\{x \in R: -1 \leq x \leq 2\}$. Find a universal set R.

Example 2.36: Find a universal set R where

$A= \{1, 2, 3\}$,

B= {1, 2, 3, 4},

C = {1, 2, 3, 4, 5},

.

.

.

Then, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ can to be universal sets.

Example 2.37: Let $A= \{a, b\}$, B= $\{l, m\}$, C= $\{u, v\}$. Find a universal set R.

Solution: The sets $A \cup B \cup C = \{a, b, l, m, u, v\}$.

R = {α: α is the letter of English language}. Can to be Universal sets.

ملاحظة:

إذا اختيرت المجموعة الشاملة فيجب تثبيتها في المسئلة الواحدة. إذ لا يجوز اختيار أكثر من مجموعة شاملة في المسألة الواحدة.

Definition 2.38: The Complement المكملة أو المتممة

Let R be a universal set and A be any subset of R. The **complement** of a set A, denoted by A^c, is the set of elements which belong to R but do not belong to A. i.e, $A^c = \{x: (x \in R) \wedge (x \notin A)\}$.

We can show that $A \cap A^c = \emptyset$ and $A \cup A^c = R$.

Example 2.39: Let R={1, 2, …, 10},

$A=\{x\in N: 1\leq x\leq 3\}=\{1, 2, 3\}$,

$B=\{x\in N: 8\leq x\leq 10\}=\{8, 9, 10\}$,

$C=\{x\in N: 1\leq x\leq 2\}=\{1, 2\}$.

Find A^c, B^c, C^c, $(A\cup B)$, $(A\cap C)$ and $(C\cup B)$.

Solution: $A^c=\{4, 5,\ldots, 10\}$.

$B^c=\{1, 2,\ldots, 7\}$.

$C^c=\{3, 4, 5, \ldots, 10\}$.

$(A\cup B)^c=\{1,2,3,8,9,10\}^c=\{4,5,6,7\}$.

$(A\cap C)^c=\{1, 2\}^c=\{3, 4,\ldots, 10\}$.

3. Difference or relative complement: الفرق أو الفضلة

Let A and B are two sets. The **difference** between A and B, denoted as A-B or $A\backslash B$, is the set of all elements which belong to A but do not belong to B.

$$A/B \equiv A - B = \{x: (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

يقال لمجموعة العناصر التي تنتمي الى A ولا تنتمي الى B بأنها فضلة A على B .

Proposition 2.40: If R is a universal set, A and B are two subsets of R then, $A - B = A \cap B^c$.

Proof: $A- B = \{x: (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = \{x: (x \in A) \wedge (x \in B^c)\} = A \cap B^c$.

4. Symmetric Difference الفرق التناظري

The **symmetric difference** between two sets A and B is denoted by $A\Delta B$ and is defined as:

$$A\Delta B = \{x: ((x\in A) \wedge (x\notin B)) \vee ((x\in B) \wedge (x\notin A))\}.$$
$$= \{x: (x\in A- B) \vee (x\in B- A)\}.$$
$$= (A- B) \cup (B - A).$$

Example 2.41: If $A = \{\ell, m, n, t\}$ and $B = \{n, p, s\}$ then,

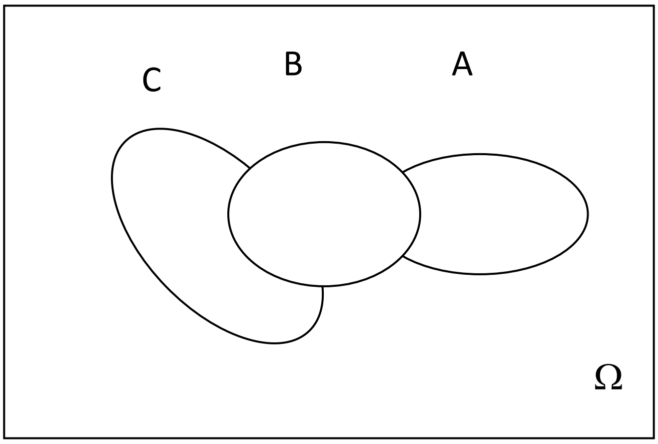
$$A\Delta B = (A- B) \cup (B- A)$$
$$= \{\ell, m, t\} \cup \{p, s\}= \{\ell, m, t, p, s\}$$

Question: Prove or disprove the following statement;

$$A\Delta B= B\Delta A.$$

أشكال ڤن Venn Diagrams

جون ڤن عالم رياضياتي إنجليزي (1843 – 1923 م). وهو أول من إستخدم الاشكال لتمثيل المجموعات، وقد ساعد استخدام الاشكال في تصوير وإدراك وتذليل كثير من الصعوبات فيما يتعلق بنظرية المجموعات. غير أن استخدام اشكال ڤن في برهنة المبرهنات غير مرغوب فيه، لوجود طرق أفضل وادق في التعبير وإنما يكتفي بأشكال ڤن للتوضيح فقط. لقد مّثل ڤن المجموعة برقعة مستوية محاطة بمنحن مغلق لا يتقاطع مع نفسه كأن تحاط عناصر المجموعة بدائرة أو مستطيل أو نحو ذلك. ويستخدم الشكل المستطيل كثيراً ليمثل المجموعة الشاملة Ω مثلاً، بينما توضح المجموعات الجزئية على هيئة أشكال بيضوية أو دائرية داخل المستطيل. كما يلي:



جداول الانتماء

تعرّف جداول الإنتماء بطريقة مشابهة للطريقة التي عُرّفت بها جداول الصواب (الحقيقة) في وحدة المنطق الرياضياتي. وإذا كانت $S \neq \varnothing$ مجموعة مفروضة وكان x عنصراً ما، فإما أن يكون $x \in S$ وإلا فإن $x \notin S$ ونعبر عن هذا (اختصاراً) بالجدول (1). وإذا كانت S_1 و S_2 مجموعتين مختلفتين وغير خاليتين، وكان x عنصر ما، فإن الجدول (2) يصف الاحتمالات الممكنة لانتماء هذا العنصر أو عدم إنتمائه للمجموعتين S_1 و S_2.

S
$\in$
$\notin$

Table 1

S_1	S_2
$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$

Table 2

هذا ويمكن ان نعمم هذه الفكرة لتشمل أكثر من مجموعتين مختلفتين. والآن لننشىء جداول الانتماء الخاصة ببعض العمليات معتمدين على التعاريف الاساسية لتلك العمليات.

أولاً : جدول الانتماء لعملية الاتحاد لمجموعتين A و B مبين في الجدول (3).
ثانياً : جدول الانتماء لعملية التقاطع لمجموعتين A و B مبين في الجدول (4).
ثالثاً : جدول الانتماء لمتممة مجموعة A بالنسبة لمجموعة معلومة مبين في الجدول(5).
رابعاً : جدول الانتماء للفرق بين مجموعتين A و B مبين في الجدول (6).
خامساً : جدول الانتماء للفرق التناظري لمجموعتين A و B مبين في الجدول (7).

A	B	$A \cup B$
$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

Table 3

A	B	$A \cap B$
$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

Table 4

A	A^c
$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$

Table 5

A	B	$A - B$
$\in$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

Table 6

A	B	$A \Delta B$
$\in$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

Table 7

ملاحظات

(1) يمكن استخدام العددين 1 و 0 عوضاً عن الرمزين $\in$ و $\notin$ على الترتيب في جميع جداول الانتماء.

(2) لاحظ أن جداول الانتماء مبينة على أساس التعاريف، وبالتالي فمن الممكن إعتبارها صالحة كتعاريف للإتحاد والتقاطع ...الخ.

(3) إن جداول الانتماء وسيلة ناجحة وسهلة جداً في برهنة كثير من المبرهنات المتعلقة بالمجموعات والعمليات عليها.

Some propositions (properties) of the set's al-gebra

Let A, B and C are three subsets of a universal set Ω. Then, the following statements are hold:

(i) $A \cup A = A$ and $A \cap A = A$.

(ii) $A \cup B = B \cup A$ and $A \cap B = B \cap A$.

(iii) $(A\cup B)\cup C = A\cup (B\cup C)$ and $(A\cap B)\cap C = A\cap (B\cap C)$.

(iv) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

and $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(v) $A \cup \emptyset = A$ and $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(vi) $A \cup \Omega = \Omega$ and $A \cap \Omega = A$.

(vii) $\Omega^c = \emptyset$ and $\emptyset^c = \Omega$.

(viii) $(A^c)^c = A$.

(ix) $A \cup A^c = \Omega$ and $A \cap A^c = \emptyset$.

(x) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ and $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

(xi) $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$.

(xii) $(A - B) \neq B - A$.

(xiii) $A - B \subseteq A$.

يتم برهان هذه المبرهنات (الخواص) بطريقتين: الاولى باستخدام تعاريف التقاطع، الاتحاد،...الخ والثانية باستخدام جداول الانتماء.

سنبرهن الخاصية (iv) والتي تنص على أن عملية الاتحاد تتوزع على عملية التقاطع. تاركين البقية كتمارين للطالب.

الطريقة الاولى:

$A \cup (B \cap C) = \{x: (x \in A) \vee x \in (B \cap C)\}$ من تعريف الاتحاد

$= \{x: (x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in C)\}$ من تعريف التقاطع

$= \{x: [(x \in A) \vee (x \in B)] \wedge [(x \in A) \vee (x \in C)]\}$

لان اداة الربط "$\vee$" تتوزع على اداة الربط "$\wedge$"

$= \{x: x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)\}$ من تعريف الاتحاد

$= (A \cup B) \cap (A \cup C)$ من تعريف التقاطع

الطريقة الثانية:

A	**B**	**C**	**A∪B**	**A∪C**	**B∩C**	**A∪(B∪C)**	**(A∪B)∩(A∪C)**
∈	∈	∈	∈	∈	∈	∈	∈
∈	∈	∉	∈	∈	∉	∈	∈
∈	∉	∈	∈	∈	∉	∈	∈
∈	∉	∉	∈	∈	∉	∈	∈
∉	∈	∈	∈	∈	∈	∈	∈
∉	∈	∉	∈	∉	∉	∉	∉
∉	∉	∈	∉	∈	∉	∉	∉
∉	∉	∉	∉	∉	∉	∉	∉

Table 8

Exercises

(1) Let A, B and C are three nonempty subsets of a universal set Ω. Prove the following statements by using three methods;
(a) Definitions (b) Belongs tables (c) Propositions.

(i) $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = (A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A.$

(ii) $[A^c \cap (A \cup B)]^c = A \cup B^c.$

(iii) $[A^c \cap (B \cap C^c)]^c = A \cup B^c \cup C.$

(iv) $(A \cap B) \cap (A^c \cap B^c) = \varnothing.$

(2) Let A, B and C are three nonempty subsets of a universal set Ω. Prove the following statement;

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$$

المجموعات العددية Sets of Numbers

أولاً: مجموعة الاعداد الطبيعية وسنرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$ أو $\mathbb{Z}^+$ (Natural Numbers) أي أن:

$\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3,\ldots\}$

وتسمى أيضاً مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة (Positive Integer Numbers) وهي أقدم الاعداد استخداماً.

ثانياً: مجموعة الاعداد الصحيحة السالبة (Negative Integer Numbers) ونحصل عليها من $\mathbb{Z}^+$ بضرب كل عنصر من عناصر $\mathbb{Z}^+$ بالعدد (-1) وسنرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}^-$ أي أن:

$\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3,\ldots\}$

ثالثاً: مجموعة الأعداد الصحيحة (Integer Numbers) وسنرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}$ ونعرفها كما يلي:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

رابعاً: مجموعة الاعداد النسبية (أو الكسرية أو القياسية) (Rational Numbers) وسنرمز لها بالرمز Q ونعرفها كما يلي:

$$Q =\{x: (x = p/q) \text{ and } (p, q\in Z) \text{ and } q \neq 0\}.$$

خامساً: مجموعة الاعداد غيرالنسبية (Irrational Numbers) وهي مجموعة الاعداد التي لا يمكن كتابتها وفق تعريف الاعداد النسبية وهي تحوي أعداداً أخرى مثل π ، e (e العدد النيبيري) والجذور الصم (مثل: $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{7},\ldots$) وسنرمز لها بالرمزIrr.

سادساً: مجموعة الاعداد الحقيقية (Real Numbers) وسنرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$ وتُعرف كمايلي

$$\mathbb{R}= Q \cup Irr.$$

وبصفة عامة فإنها مكونة من جميع الاعداد التي يمكن تمثيلها على مستقيم موجه X'OX . وبعبارة أخرى: فإن أي عنصر في $\mathbb{R}$ يقابله نقطة من نقاط المستقيم X'OX كما أن أية نقطة من نقاط المستقيم يقابلها عنصر في $\mathbb{R}$.

سابعاً : مجموعة الاعداد المركبة (او العقدية) (Complex Numbers) وسنرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$ وهي مجموعة تحوي تماماً المجموعة $\mathbb{R}$ ويمكن تعريفها كما يلي:

$\mathbb{C} = \{(x, y): [(x, y) \Leftrightarrow x + y\,\mathrm{i}] \wedge [(x, y \in \mathbb{R}) \wedge \mathrm{i}^2 = -1\,]\}$.

ملاحظات

(1) سنعرف $\mathbb{Z}^*$ كما يلي: $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}-\{0\}$ وكذلك الحال بالنسبة للمجموعات Q^*، $\mathbb{R}^*$، $\mathbb{C}^*$.

(2) لقد تم توسيع مجموعة الاعداد $\mathbb{Z}^+$ الى المجموعة $\mathbb{Z}$ نتيجة الحاجة الى حل معادلات من الشكل : $x + 2 = 0$.

(3) لقد تم توسيع مجموعة الاعداد $\mathbb{Z}$ الى المجموعة Q نتيجة الحاجة الى حل معادلات من الشكل : $2x - 1 = 0$.

(4) لقد تم توسيع مجموعة الاعداد Q الى المجموعة $\mathbb{R}$ نتيجة الحاجة الى حل معادلات من الشكل : $x^2 - 2 = 0$.

(5) لقد تم توسيع مجموعة الاعداد $\mathbb{R}$ الى المجموعة $\mathbb{C}$ نتيجة الحاجة الى حل معادلات من الشكل : $x^2 + 1 = 0$.

(6) تسمى المجموعة $\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ مجموعة الاعداد الكلية (Whole Numbers) أو مجموعة الاعداد الصحيحة غير السالبة (Non-Negative Numbers).

(7) إن $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset Q \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

مبدأ الثنوية (أو الازدواجية) Duality Principle

ينص هذا المبدأ على أن صحة علاقة ما تقتضي صحة علاقة أخرى، شريطة أن تكون العلاقة الثانية ناتجة من العلاقة الاولى بعد الاستعاضة عن كل إشارة من الاشارات الآتية بالاشارة الثنوية لها، وكل مجموعة بالمجموعة الثنوية لها:

الاشارة أو المجموعة	$\in$	$\subseteq$	$\subset$	$\cup$	$\cap$	A	Ω المجموعة الشاملة
ثنويتها	$\notin$	$\supseteq$	$\supset$	$\cap$	$\cup$	A^c	$\Omega' = \varnothing$ المجموعة الخالية

Example 1: Find the Duality of each of the following statements:

(i) $A \cap (A \cup B) = A$.

(ii) $(A\cup \Omega) \cup (A\cap \varnothing) = \Omega$.

Solution:

(i) $A^c \cup (A^c \cap B^c) = A^c$.

(ii) $(A^c \cap \varphi) \cap (A^c \cup \Omega) = \varnothing$.

Example 2: Prove the two statements (i) and (ii) in Example 1.

Proof:

(i) $A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B)$ (لان $\cap$ تتوزع على $\cup$)

$= A \cup (A \cap B)$

$= A$. (لان $A \cap B \subseteq A$)

(ii) $(A \cup \Omega) \cup (A \cap \varnothing) = \Omega \cup \varnothing$ (لان $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \subseteq \Omega$)

$= \Omega$.

Exercises

Find the Duality of each of the following statements;

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(ii) $A \subseteq B \Leftrightarrow A\cup B = B$.

(iii) $(E \cap \varnothing) \cap (E \cup \Omega) = \varnothing$.

(iv) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

CHAPTER THREE

PRINCIPLE OF MATHEMATICAL INDUCTION

مبدأ الاستقراء الرياضياتي

إن مبدأ الاستقراء الرياضياتي (أو الاستنتاج الرياضي أو التراجع) وسيلة قوية في برهان الكثير من المبرهنات والمسائل التي تتعلق بأعداد صحيحة موجبة. فعلى سبيل المثال لو طلب منا إثبات أن العبارة الآتية صائبة:

$$P(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}; \;\; \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$$

فإننا نلاحظ بالتجريب أن العبارة P(n) صائبة من أجل $n = 1, 2, 3, \ldots, 20$ مثلاً ولكن هذا لا يسمح لنا مطلقاً بأن نقول إن العبارة P(n) صائبة من أجل $n > 20$، لان مثل هذا الادعاء هو مجرد حدس لا يصح قبوله رياضياتياً مالم تؤيد صحته بالتجريب (وهذا أمر لا ينتهي) أو بالاثبات بشكل منطقي. ولهذا فقد توصل الرياضياتيون الى مبرهنة هامة تعرف بمبدأ الاستقراء الرياضياتي يستند اليها في برهان صحة مثل هذه المسائل الرياضياتية.

<u>Theorem 3.1: (Principle of Mathematical Induction):</u>

Let S be a non-empty subset of $\mathbb{Z}^+$. If the two conditions ((i) $1\in S$ and (ii) $k\in S \Rightarrow k + 1\in S$), then $S = \mathbb{Z}^+$.

Proof: Let $D = \mathbb{Z}^+ - S$, then there are two cases;

1) If $D = \phi$, then $S = \mathbb{Z}^+$.
2) If $D \neq \phi$, then there exists an element x belong to $\mathbb{Z}^+$ such that $x\notin S$.

Let m+1 is the smallest positive integer in D, then (from Definition 8 in chapter 2), $m+1\notin S$. That is mean $m\in S$. Then by hypothesis, $m+1\in S$. That is a contradiction. Hence, $D = \phi$ and $S = \mathbb{Z}^+$.

From, Principle of Mathematical Induction, if we have a statement P(n) is hold for every $n\in \mathbb{Z}^+$, then to prove the validation of this statement, we must prove the following two conditions:

1) If n=1, then the statement is true.
2) We will suppose that the statement P(n) is true for n= k, and must prove that the statement is true for n= k+1 (i.e. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Notes:

1) If any one of the above two conditions is not valid, then the statement P(n) is false.
2) If we prove that the statement P(n) is true for n= a, where a >1, and the second condition is valid, then the statement P(n) is true for all $n \geq a$.
3) The first condition is called the necessity step, and the second condition is called the induction step. So, the hypothesis in second condition is called the induction hypothesis.

<u>Example 3.2:</u> Prove that the following statement is true for all positive integers.

$$P(n) \equiv 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}; \forall\, n \in \mathbb{Z}^{+}$$

Proof:

1) If n= 1, then $P(n) = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ is true statement.
2) Suppose that the statement is true for n= k;

$$\text{i.e., } 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

3) Must prove that the statement is true for n= k+1;

$$\text{i.e., } 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}.$$

Since $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ is valid, then the following statement is valid also,

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1)$$

$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$
$$= \frac{(k+1)+(k+2)}{2}$$
$$= \frac{(k+1)+[(k+1)+1]}{2}.$$

Therefore, the statement P(n) is true for all $n \in \mathbb{Z}^+$.

Example 3.3: Prove or disprove the following statements:

1) $P_1(n) \equiv 3 + 6 + 9 + \ldots + 3n = \frac{3n(n+1)}{2} - 1;\ \forall\ n \in \mathbb{Z}^+$.

2) $P_2(n) \equiv 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = 3n - 2;\ \forall\ n \in \mathbb{Z}^+$.

Proof: (1): If n= 1, then;

The left hand side (L. H. S);

$P_1(n)= P_1(1)= 3$.

And the right hand side (R. H. S);

$P_1(1)= P_1(n) = \frac{3\times 1(1+1)}{2} - 1 = 2$.

Therefore, (L. H. S) ≠ (R. H. S). Hence, the statement $P_1(n)$ is false.

(2): If n= 1, then;

The left hand side (L. H. S);

$P_2(n)= P_2(1)= 1$.

And the right hand side (R. H. S);

$P_2(n)= 3(1)- 2= 1$.

Implies, (L. H. S)= (R. H. S).

Now, suppose that the statement $P_2(n)$ is true when n= k; i.e. $P_2(k)$ is valid then $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)= 3k - 2$. Must prove that the statement $P_2(n)$ is valid when n= k+1;

i.e. must prove $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)+ [2(k+1)- 1] = 3(k+1) -2$.

(R. H. S) = [3k – 2] + [2(k + 1)- 1]

= 3k – 2 + 2k + 2- 1

= 5k -1

$= (3k + 3) + 2k - 4$
$= 3(k + 1) + 2(k - 2) \neq 3(k + 1) - 2.$

Thus, the second condition is not valid. Hence, $P_2(n)$ is false.

Example 3.4: Prove or disprove the following statement;

$$P(n) \equiv n < 2^n; \ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Proof: If n=1; $P(1) \equiv 1 < 2^1 \Rightarrow 1 < 2$.

Suppose that the statement P(n) is true when n= K. To prove it is true when n= k+1.

Since, $k < 2^k \Rightarrow k + 1 < 2^k + 1$

$\Rightarrow k + 1 < 2^k \cdot 2$

$\Rightarrow k + 1 < 2^{k+1}$.

Thus, P(k+1) is valid and hence the statement P(n) is true.

Exercises

Prove the following statements by using the Principle of Mathematical Induction:

(1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$

(2) $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \dfrac{1}{2}[n(3n-1)]; \ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$

(3) $n^2 < n!; \ \forall n \geq 4; \forall n \in \mathbb{Z}^+.$

(4) $\sum_{k=1}^{n} 2k = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1); \ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$

CHAPTER FOUR

RELATIONS

العلاقات

نعرف من الهندسة التحليلية أن أي نقطة من مستوي منسوب لمحورين موجهين ومتقاطعين X'OX، Y'OY مثلاً، يكون لها احداثيان هما x و y ونعبر عن ذلك بالرمز $P(x, y)$. يسمى (x, y) زوجاً مرتباً، مركبته الاولى (اليسرى) هي x، ومركبته الثانية (اليمنى) هي y. ومن الواضح أن الزوج المرتب (y, x) لا يساوي الزوج المرتب (x, y) ما لم تكن $x = y$. ومن هنا تبرز اهمية الترتيب في الازواج المرتبة.

<u>Definition 4.1:</u> An ***ordered pair*** of elements x and y is denoted by (x, y) where x is called the first element and y is the second element.

<u>Remark 4.2:</u> Let x, y, z and w are four elements, then:
1) $(x, y) \neq (y, x)$ in general.
2) $(x, y) = (y, x)$ if and only if $x = y$.
3) $(x, y) = (z, w)$ if and only if $x = z$ and $y = w$.

<u>Definition 4.3:</u> Let A and B are two nonempty sets. Then ***the Cartesian product of A to B*** is denoted by **A × B** and defined as follows;

$$A \times B = \{(x, y): (x \in A) \wedge (y \in B)\}.$$
$$(x, y) \in A \times B \text{ if and only if } (x \in A) \wedge (y \in B).$$
$$(x, y) \notin A \times B \text{ if and only if } (x \notin A) \vee (y \notin B).$$

يعرف **حاصل الضرب الديكارتي** للمجموعة A في المجموعة B بأنه المجموعة A × B حيث:

$$A \times B = \{(x, y): (x \in A) \wedge (y \in B)\}$$

<u>Example 4.4:</u> Let A={1, 2} and B={2, 3}, then find both A × B and B × A.

Solution: A × B = {(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)}.

And B × A = {(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)}.

ملاحظة:

1. من الواضح أن $A \times B \neq B \times A$.
2. في الحالة التي تكون فيها المجموعتان A و B متساويتين يرمز لحاصل ضربهما إختصاراً بالرمز A^2 أو B^2.

Example 4.5: Let A= {x, y} and B= {1, 2, 3}. Find

A× B=

B× A=

A× A=

B× B=

Remark 4.6: If |A|= n and |B|= m, then |A× B|= n(m).

Example 4.7: Let $A=\{x: x\in N \wedge x^2\leq 10\}$, B={1, 2} and C={3}. Find

A× B=

B× A=

A× A=

B× B=

C× C=

(B∪ C)× A=

(B∩ C)× A=

(A- B)× B=

(A- B)× C=

<u>Theorem 4.8:</u> Let A, B, C and D be nonempty sets. Then:

1) $A\times \varnothing = \varnothing\times A = \varnothing$.
2) $A\times B= B\times A$ if and only if $A= B$.
3) $A\times (B\cap C)= (A\times B) \cap (A\times C)$.
4) $A\times (B\cup C)= (A\times B) \cup (A\times C)$.
5) $A\times (B- C)= (A\times B) - (A\times C)$.
6) $(A\times B) \cap (C\times D)= (A\cap C) \times (B\cap D)$.
7) If $C \subseteq A$ and $D \subseteq B$, then $C\times D \subseteq A\times B$.

Proof: 1) Suppose that $A\times \varnothing\neq \varnothing$. Then,

$$\exists(x, y)\in A\times\varnothing \Rightarrow x\in A \text{ and } y\in \varnothing \quad \text{(def. of } A\times B)$$

$$\Rightarrow x\in A \text{ and } F$$

$$\Rightarrow F. \qquad (p\wedge F= F)$$

Therefore, $A\times \varnothing= \varnothing$.

In similar way, we can show that $\varnothing\times A= \varnothing$. **(H. W.)**

2). Suppose that $A\times B= B\times A$, to prove $A= B$.

$$\forall x\in A \text{ and } \forall y\in B\Rightarrow (x, y)\in A\times B \qquad \text{(def. of } A\times B)$$

$$\Rightarrow (x, y)\in B\times A \qquad (A\times B= B\times A)$$

$$\Rightarrow x\in B \text{ and } y\in A \qquad \text{(def. of } B\times A)$$

$$\Rightarrow A\subseteq B \text{ and } B\subseteq A$$

$$\Rightarrow A= B.$$

Suppose that $A= B$, to prove $A\times B= B\times A$

$$A \times B = \{(x, y): (x \in A) \wedge (y \in B)\} \quad \text{(def. of } A\times B)$$

$$= \{(x, y): (x \in B) \wedge (y \in A)\} \quad \text{(since } A= B)$$

$$= B \times A.$$

3). $A\times(B\cap C) =\{(x, y): (x\in A) \wedge (y\in B\cap C)\}$ (def. of $A\times B$)

$=\{(x, y): (x\in A)\wedge(y\in B \wedge y\in C)\}$ (def. of $A\cap B$)

$=\{(x, y): (x\in A \wedge y\in B) \wedge (x\in A \wedge y\in C)\}$

$=\{(x, y): ((x, y)\in A\times B) \wedge ((x, y)\in A\times C)\}$

$= (A\times B) \cap (A\times C)$.

4) $A\times (B\cup C) =\{(x, y): (x\in A) \wedge (y\in B\cup C)\}$ (def. of $A\times B$)

$=\{(x, y): (x\in A)\wedge(y\in B \vee y\in C)\}$ (def. of $A\cup B$)

$=\{(x, y): (x\in A \wedge y\in B) \vee (x\in A \wedge y\in C)\}$

$=\{(x, y): ((x, y)\in A\times B) \vee ((x, y)\in A\times C)\}$

$= (A\times B) \cup (A\times C)$.

5) $A\times (B- C)= \{(x, y): (x\in A) \wedge (y\in B-C)\}$ (def. of $A\times B$)

$=\{(x, y): (x\in A) \wedge (y\in B \wedge y\notin C)\}$ (def. of $B-C$)

$=\{(x, y): (x\in A \wedge y\in B) \wedge (x\in A \wedge y\notin C)\}$

$=\{(x, y): ((x, y)\in A\times B) \wedge ((x, y)\notin A\times C)\}$

$= (A\times B) - (A\times C)$.

6) $(A\times B)\cap(C\times D)= \{(x, y): (x, y)\in A\times B \wedge (x, y)\in C\times D\}$

$=\{(x, y): (x\in A \wedge y\in B) \wedge (x\in C \wedge y\in D)\}$

$=\{(x, y): (x\in A \wedge x\in C) \wedge (y\in B \wedge y\in D)\}$

$=\{(x, y): (x\in A\cap C) \wedge (y\in B\cap D)\}$

$= (A\cap C) \times (B\cap D)$.

7) Let $(x, y)\in C\times D \Rightarrow x\in C \wedge y\in D$ (def. of $C\times D$)

$\Rightarrow x\in A \wedge y\in B$ (since, $C\subseteq A$ and $D\subseteq B$)

$\Rightarrow (x, y)\in A \times B$

Hence, $C\times D \subseteq A \times B$.

<u>Remark 4.9:</u> $(A \times B) \cup (C \times D) \neq (A\cup C) \times (B\cup D)$.

For example **(H. W.)**;

<u>Example 4.10:</u> Prove that $(A\times B)\cap(B\times A) = \varnothing \Leftrightarrow A\cap B = \varnothing$.

Proof: Suppose that $(A\times B)\cap(B\times A) = \varnothing$, to prove $A\cap B = \varnothing$. If not, then $\exists x\in A\cap B \Rightarrow x\in A \wedge x\in B$ (def. of $A\cap B$)

$$\Rightarrow (x, x)\in (A\times B) \wedge (x, x)\in (B\times A)$$
$$\Rightarrow (x, x)\in (A\times B)\cap(B\times A)$$
$$\Rightarrow (A\times B)\cap(B\times A)\neq \varnothing.$$

That is a contradiction. Hence, $A\cap B = \varnothing$.

Now, suppose that $A\cap B = \varnothing$, to prove $(A\times B) \cap(B\times A) = \varnothing$. If not, then $\exists (x, y)\in(A\times B)\cap(B\times A) \Rightarrow (x, y)\in A\times B \wedge (x, y)\in B\times A$

$$\Rightarrow (x\in A \wedge y\in B) \wedge (x\in B \wedge y\in A)$$
$$\Rightarrow (x\in A \wedge x\in B) \wedge (y\in A \wedge y\in B)$$
$$\Rightarrow (x\in A \cap B) \wedge (y\in A \cap B)$$
$$\Rightarrow A \cap B\neq\varnothing.$$

That is a contradiction. Hence, $(A\times B)\cap(B\times A) = \varnothing$.

<u>Definition 4.11:</u> (*Generalization of the Cartesian product*):

Let $A_1, A_2, \ldots, A_n$ be any sets. Then the Cartesian product of these sets is denoted by $\prod_{i=1}^{n} A_i$ and defined as follows;

$$A = \prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n.$$
$$= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): (x_1\in A_1) \wedge (x_2\in A_2) \ldots \wedge (x_n\in A_n)\}.$$
$$= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): x_i \in A_i;\ 1 \leq i \leq n\}.$$

<u>Example 4.12:</u> Let $\mathbb{R}$ be the set of all real numbers. Then

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \{(a_1,\ldots,a_n): a_i \in \mathbb{R};\ 1 \leq i \leq n\}.$$

وهذا يعني أن كل عنصر من $\mathbb{R}^n$ مكون من n مركبة من الاعداد الحقيقية وسترى مستقبلاً اهمية دراسة $\mathbb{R}^n$ (والتي تسمى فضاء ذا n بعداً بعد أن تعّرف عليها عمليات تتصف بصفات معينة). وبصورة خاصة عندما $n = 2$ فإن عناصر المجموعة $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ عبارة عن نقاط مستوي منسوب لمحورين موجهين ومتقاطعين. عناصر المجموعة $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ عبارة عن نقاط الفضاء الثلاثي منسوب الى ثلاثة محاور موجهة متقاطعة.

<u>سؤال:</u>

المجموعة $\mathbb{R}$ يمكن اعتبارها فضاء ذا بعد واحد فماذا تمثل عناصرها ؟

Exercises

1) If A= {x: $x \in N \wedge x \leq 3$}= {1, 2, 3}, B= {3, 4} and
C= {x: $x \in N \wedge 15 \leq x^2 \leq 40$}= {4, 5, 6}. Then find;

(i) $A \times B =$
(ii) $B \times A =$
(iii) $A \times C =$
(iv) $C \times A =$
(v) $B \times C =$
(vi) $C \times B =$
(vii) $(A \times B) \cap (B \times A) =$

(viii) $A \times (B \cup C) =$

(ix) $(A \times B) \cup (A \times C) =$

(x) $A \times (B \cap C) =$

(xi) $(A \times B) \cap (A \times C)$.

(xii) $A \times B \times C =$

(xiii) $A \times C \times B =$

(xiv) $B \times A \times C =$

(xv) $|A \times B \times C| =$
(xvi) $|(A \times B \times C) \cap (A \times C \times B)| =$

(xvii) $|(A \times B \times C) \cup (A \times C \times B)| =$

(xviii) $(A \times B) \cup (A \times B \times C)=$

(xix) $(A \times B) \cap (A \times B \times C)=$

2) If A= $\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ and B = $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, where $\mathbb{R}$ is the set of real numbers, prove that; $A\cap B= \varnothing$.
3) Write the members of a set A, where
   $A= \{(x,y): (x, y \in\mathbb{Z}^+) \wedge [(1 \le x \le 3) \wedge (1 \le y \le 2)]\}$.

Binary Relations العلاقات الثنائية

Definition 4.13: Let A and B are two sets. Any subset R of A×B is called a ***binary relation from A to B***. in other words,

R is a relation from A to B $\Leftrightarrow$ R$\subseteq$ A×B.

(x, y)$\in$ R can be written as xRy or x~y.

(x, y)$\notin$ R can be written as $x \not{R}\, y$ or $x \nsim y$.

If A= B, then R is a relation on A.

إذا كانت A ، B مجموعتين مفروضتين وكانت $R \subseteq A \times B$ قيل إن R علاقة ثنائية من A الى B. وفي الحالة الخاصة التي تكون A = B يقال إن R علاقة ثنائية على A

إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{1, 2, 4, 5\}$ فإن:

A×B ={(1,1), (1,2), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,4), (3,5)}

ولو طلب منا إيجاد مجموعة جزئية R من المجموعة A × B بحيث تكون عناصر R مكونة من جميع الثنائيات (الازواج) المرتبة التي تكون مركبتا كل منها متساويتين أي:

$R = \{(x, y): (x, y) \in A \times B \wedge x = y\} \subseteq A \times B$

فإننا نجد أن:

$R = \{(1, 1), (2, 2)\} \subseteq A \times B$

نقول في هذه الحالة إننا عرفنا علاقة ثنائية R (أو إختصاراً علاقة R إذا لم يكن ثمة إلتباس) من المجموعة A الى المجموعة B وهذه العلاقة هنا ما هي إلا علاقة التساوي المألوفة " = ".

إذا كان $(x, y)\in$ R فإننا نعبر عن ذلك بالشكل "x R y" ونعني بذلك أن المركبة x ترتبط بالمركبة y بواسطة العلاقة R. وعندما تكون $(x, y)\notin$ R فإننا نكتب " $x \not{R}\, y$ "

ووفقاً لما تقدم فإنه من الواضح أن $(1,1), (2,2) \in R$ وبالتالي فإن 1 R 1 وكذلك 2 R 2 بينما (1,2)$\notin$R وبالتالي فإن $1 \not{R}\, 2$ وحيث أن R هنا هي علاقة التساوي "=" فإنه يمكننا أن نكتب ما سبق كما يلي:

"=" = {(1,1),(2,2)}.

Example 4.14: Let A= {a, b, c}, B= {b, c, d} and $R_1 = \{(a,b), (a,c), (b,b), (c,c)\}$.

1) Is R_1 a binary relation from A to B?
2) Is R_1 a binary relation on A?
3) Is R_1 a binary relation on B?
4) If R$\subseteq$ A×B such that xRy $\Leftrightarrow$ x= y, then write the members of R.

ملاحظة: لاحظ فيما تقدم كنا قادرين على تحديد مجموعة جزئية من المجموعة A × B بواسطة تعريف علاقة R من A الى B. ولكن غالباً ما تعطى المجموعة الجزئية R بصرف النظر عن كوننا قادرين أو غير قادرين عل إيجاد معنى الرابط R (علاقة المساواة، علاقة أصغر،...، أو أية علاقة أخرى) بين المركبتين x و y. فمثلاً $R_1 \subset A \times B$ تعتبر علاقة ثنائية معرفة من A الى B بالرغم من أن معنى الرابط R_1 بين b ، b من جهة وبين a ، c من جهة أخرى ليست واضحة.

Definition 4.15: If R is a relation from A to B, then ***the inverse relation of R*** is denoted by R^{-1} and defined as;

$$R^{-1} = \{(y, x): (x, y) \in R\}$$

إذا كانت R علاقة ثنائية من A الى B فإن **العلاقة العكسية** للعلاقة R يرمز لها بالرمز R^{-1} وتعرف كالاتي:
$R^{-1} = \{(y, x): (x, y) \in R\}$

من هذا التعريف يتبين أن R^{-1} هي علاقة ثنائية من B الى A لان $R^{-1} \subset B \times A$.

Note: $(R^{-1})^{-1} = R$.

Example 4.16: Let A={1, 2, 4}, B={2, 3, 5} and $R \subseteq A \times B$, such that R= {(1, 2), (1, 3), (2, 2)}. Find;

1) $R^{-1}=$
2) $\{x: (x \in A) \wedge (x \; R \; y)\}=$
3) $\{x: (x \in A) \wedge x \not R \; y \}=$

Definition 4.17: Domain of a relation **مجال العلاقة**

The domain of a relation $R \subseteq A \times B$ is the set of the first coordinates of each pair. In other words:

$$\text{dom } R = \{x \in A;\ \exists y \in B: (x, y) \in R\}$$
$$= \{x \in A;\ \exists y \in B: xRy\}$$

It is clear that dom $R \subseteq A$.

منطلق العلاقة هو مجموعة المساقط الاولى للعلاقه.

Definition 4.18: Range of a relation **مدى العلاقة**

The range of a relation $R \subseteq A \times B$ is the set of the second coordinates of each pair. In other words:

$$\text{range } R = \{y \in B;\ \exists x \in A: (x, y) \in R\}$$
$$= \{y \in B;\ \exists x \in A: xRy\}$$

It is clear that range $R \subseteq B$.

مجال العلاقة هو مجموعة المساقط الثانية للعلاقه.

Example 4.19: If A={1, 3, 5, 7}, B={1, 2, 4, 6} and R = {(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 4), (3, 6), (5, 6)}. Then;
dom R={1, 3, 5} and range R={2, 4, 6}.

ملاحظات:

(1) سمينا R حيث $R \subset A \times B$ علاقة ثنائية من A الى B لان R تربط بين عنصرين الاول في A والثاني في B.

(2) بإستطاعتنا أن نعرف علاقة أحادية على مجموعة ما S. فمثلاً لو كانت $S = \mathbb{Z}^+$ فإنه يمكن أن نعرف علاقة أحادية على $\mathbb{Z}^+$ حيث نقول مثلاً إن R_1 تعني أن العنصر $x \in \mathbb{Z}^+$ هو عدد فردي وبذلك يكون لدينا:

$R_1 = \{1, 3, 5, \ldots\} \subset \mathbb{Z}^+$
$R_1^c = \{2, 4, 6, \ldots\} \subset \mathbb{Z}^+$

لاحظ أن $R_1 \cup R_1^c = \mathbb{Z}^+$ وأن $R_1 \cap R_1^c = \varnothing$ وهذا يعني أن R_1 جزأت $\mathbb{Z}^+$ الى مجموعتين منفصلتين.

(3) بالفكرة نفسها التي وردت في (1) و (2) يمكن أن نقول إن R_n مثلاً هي علاقة نونية على النونيات المرتبة للمجموعة $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

(4) إن العلاقة الثنائية R من A الى B تجزيء المجموعة $A \times B$ الى مجموعتين منفصلتين هما R ومتممتها R^c بالنسبة للمجموعة $A \times B$.

مثال:

لتكن $R \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ حيث $R = \{(x,y): x^2 + y^2 = 1\}$، $\mathbb{R}$ مجموعة الاعداد الحقيقية.

(أ) ماذا تمثل مجموعة النقاط في المستوي $\mathbb{R}^2$ التي تنتمي الى R؟

(ب) بيّن أي العناصر ينتمي الى R مما يلي:

$$(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}); (-1,0); (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}); (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0); (1,0); (1,1); (0,1).$$

الحل: **(أ)** إن R تمثل نقاط المستوي الواقعة على محيط الدائرة التي مركزها (0,0) ونصف قطرها الوحدة.

(ب) كل العناصر تنتمي الى R ما عدا النقطتين $(1,1)$;$(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ لان كلاً منهما لا تحقق معادلة الدائرة $(x^2 + y^2 = 1)$.

Properties of Binary Relation on a Set

خواص العلاقة الثنائية على مجموعة

إن دراسة العلاقة الثنائية R على (أو في) مجموعة A لها أهمية كبيرة لكثرة تطبيقاتها في الرياضيات خاصة وفي بعض العلوم الاخرى عامة.

Definition 4.20: A relation R on a set A is called ***reflexive*** if the pair $(x, x) \in R$ for each $x \in A$.

R is reflexive relation on A $\Leftrightarrow (x, x) \in R, \forall x \in A$.
$\Leftrightarrow x \sim x, \forall x \in A$.

R is not reflexive relation on A $\Leftrightarrow \exists x \in A, (x, x) \notin R$.
$\Leftrightarrow \exists x \in A, x \nsim x$.

إذا كانت R علاقة ثنائية على المجموعة A (أو إختصاراً: R علاقة على A) وكانت $\boldsymbol{xRx}$ محققة لجميع عناصر A (أي: $\forall x \in A: x\,R\,x$) قلنا إن R **علاقة انعكاسية** (Reflexive Relation).

Definition 4.21: A relation R on a set A is called ***symmetric*** if the pair (y, x)$\in$ R whenever the pair (x, y)$\in$ R.

In other words, the relation R on a set A is ***symmetric*** if the following condition satisfied:

$$\text{If } (x, y)\in R, \text{ then } (y, x)\in R \quad \forall x, y\in A.$$

And the relation R on a set A is ***not symmetric*** if

$$\exists (x, y)\in A\times A;\ (x, y)\in R \text{ but } (y, x)\notin R.$$

إذا كانت R علاقة على A تحقق الشرط

$$(x, y) \in R \;\Rightarrow\; (y, x) \in R$$

قلنا إن R **علاقة تناظرية** (**أو متماثلة أو متناظرة**) (Symmetric Relation).

Definition 4. 22: A relation R on a set A is called ***transitive*** if the pair (x, z)$\in$ R whenever the pairs (x, y), (y, z)$\in$ R.

In other words, the relation R on a set A is ***transitive*** if the following condition satisfied:

$$\text{If } (x, y), (y, z)\in R, \text{ then } (x, z)\in R \quad \forall x, y, z\in A.$$

And the relation R on a set A is ***not transitive*** if

$$\exists (x, y), (y, z)\in A\times A;\ (x, y), (y, z)\in R \text{ but } (x, z)\notin R.$$

إذا كانت R علاقة على A تحقق الشرط

$$(x,y), (y,z) \in R \;\Rightarrow\; (x,z) \in R$$

قلنا إن R **علاقة متعدية** (**ناقلة**) (Transitive Relation).

Definition 4. 23: A relation R on a set A is called ***Equivalence relation*** if it is reflexive, symmetric and transitive.

إذا كانت R علاقة على A وكانت R علاقة انعكاسية و تناظرية ومتعدية قلنا إن R **علاقة تكافؤ** على A (Equivalence Relation).

ملاحظات:

(1) لاحظ في التعاريف السابقة أن بإمكاننا الاستعاضة عن $(x, y) \in R$ بالتعبير $x \mathrel{R} x$ أي أن

$$x \mathrel{R} y \Leftrightarrow (x,y) \in R$$

(2) تكون R علاقة غير انعكاسية إذا وجد عنصر x في A بحيث:

$$x \not\mathrel{R} y \Leftrightarrow (x,x) \notin R$$

(3) تكون R علاقة غير تناظرية إذا وجد عنصر $(x, y) \in R$ بحيث:

$$\exists x \, R \, y \Leftrightarrow y \not R \, x$$

(4) تكون R علاقة غير متعدية إذا وجد عنصران $(x,y), (y,z) \in R$ بحيث $(x,z) \notin R$ وهذا يكافىء

$$\exists (x \, R \, y \wedge y \, R \, z) : x \not R \, z$$

(5) لا تكون R علاقة تكافؤ إذا لم يتحقق واحد على الاقل من الشروط الثلاثة الواردة في التعريف (23 .4) (أي الشرط اللازم والمكافىء لتكون R علاقة تكافؤ على المجموعة A هو أن تحقق R الشروط الثلاثة معاً وهي الانعكاسية والتناظرية والتعدي).

<u>Example 4. 24:</u> Let A= {1, 2, 3, 4} and R⊂ A×A such that

R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)}. Then is R;

(i) Reflexive?
(ii) Symmetric?
(iii) Transitive?
(iv) Equivalence?

<u>مثال:</u>

ناقش العلاقات الاتية من حيث كونها انعكاسية أو تناظرية أو متعدية ومن ثم بيّن أياً منها علاقة تكافؤ:

(أ) علاقة التعامد "⊥" على مجموعة مستقيمات المستوي $\mathbb{R}^2$.

(ب) علاقة أصغر من "<" على مجموعة الاعداد $\mathbb{Z}$.

(حـ) علاقة قاسم لـ "|" على مجموعة الاعداد $\mathbb{Z}^*$.

<u>الحل:</u>

(أ) إن علاقة التعامد على مجموعة مستقيمات المستوي ليست علاقة انعكاسية لان المستقيم لا يتعامد مع نفسه. ولكنها تناظرية لانه إذا كان $D, D' \in \mathbb{R}^2$ وكان $D \perp D'$ فإن $D' \perp D$. في حين انها لست متعدية لانه إذا كان $D, D', D'' \in \mathbb{R}^2$ وكان

$D \perp D' \wedge D' \perp D'' \not\Rightarrow D \perp D''$

نستنتج مما تقدم أن علاقة التعامد ليست علاقة تكافؤ.

(ب) إن علاقة أصغر من "<" على المجموعة $\mathbb{Z}$ ليست انعكاسية لانه $x \not< x : \forall x \in \mathbb{Z}$. كما إنها ليست تناظرية فواضح أنه إذا كانت $x, y \in \mathbb{Z}$ وكانت $x < y$ فإن $y \not< x$. ولكنها متعدية لانه إذا كانت $x, y, z \in \mathbb{Z}$ وكان $x < y \wedge y < z$ فإن $x < z$. نستنتج مما تقدم أن العلاقة "<" ليست علاقة تكافؤ.

(حـ) إن علاقة قاسم لـ "|" على $\mathbb{Z}^*$ انعكاسية لان أي عدد في $\mathbb{Z}^*$ قاسم لنفسه. ولكنها ليست تناظرية فمثلاً $2|6$ في حين $6\nmid 2$ وهي علاقة متعدية لانه إذا كانت $x, y, z \in \mathbb{Z}^*$ وكانت $x|\ y$ و $y \mid z$ فإن $x \mid z$. نستنتج مما تقدم ان العلاقة "|" ليست علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}^*$.

سؤال:

هل أن علاقة التوازي "||" على مجموعة مستقيمات المستوي علاقة تكافؤ؟ أثبت ذلك.

سؤال:

هل أن علاقة تشابه المثلثات في المستوي $\mathbb{R}^2$ علاقة تكافؤ؟

Definition 4. 25: A relation R on a set A is called ***Anti-symmetric*** if x= y whenever the pair (x, y)∈ R and (y, x)∈R.

In other words, the relation R on a set A is ***anti-symmetric*** if the following condition satisfies:

$$\forall x, y \in A;\ \text{if } (x, y)\in R \wedge (y, x)\in R \Rightarrow x = y.$$

And the relation R on a set A is ***not anti-symmetric*** if

$$\exists x, y \in A;\ (x, y)\in R \wedge (y, x)\in R \text{ but } x \neq y.$$

نقول عن علاقة R معرفة على مجموعة A إنها **علاقة تخالفية** (Anti-Symmetric) إذا حققت الشرط الاتي

$$(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y$$

Definition 4.26: Let x and y are integers with $x \neq 0$. Then "x divides يقسم y" is denoted by $x \mid y$ and defined as:

$$x \mid y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ such that } y = kx$$

من أمثلة العلاقات التخالفية علاقة قاسم "|" على مجموعة الاعداد $\mathbb{Z}^*$ فواضح انه إذا كان $\forall x, y \in \mathbb{Z}^*: y \mid x \wedge x \mid y$ فإن $x = y$.

Definition 4. 27: A relation R on a set A is called ***partially ordered relation*** **(P.O.R.)** or ***partially ordering*** if it is reflexive, anti-symmetric and transitive. The pair (A, R) is called partially ordered set.

R is P.O.R. ⇔ R is reflexive ∧ anti-symmetric ∧ transitive.

R is not P.O.R. ⇔ R is not reflexive ∨ not anti-symmetric ∨ not transitive.

نقول إن R **علاقة ترتيب جزئي** على مجموعة A إذا كانت R علاقة انعكاسية وتخالفية ومتعدية.

<u>Definition 4. 28:</u> A relation R on a set A is called ***totally ordered relation*** **(T.O.R.)** or ***totally ordering*** if it is satisfied the following conditions:

(i) R is P.O.R.

(ii) $\forall\ x, y \in A: x \text{ R } y \vee y \text{ R } x$.

نقول إن R **علاقة ترتيب كلي** على A إذا كانت علاقة ترتيب جزئي وتحقق الشرط الآتي:

$$\forall\ x, y \in A: x \text{ R } y \vee y \text{ R } x$$

إن هذا التعريف يعني أن كل علاقة ترتيب كلي هي علاقة ترتيب جزئي ولكن قد لا يكون العكس صحيحاً.

إن العلاقة "$\subseteq$" على مجموعة القوة P(A) هي علاقة ترتيب جزئي على . في حين ان العلاقة "$\leq$" على مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي علاقة ترنيب كلي على $\mathbb{R}$.

<u>Exercises</u>

(1) If A={1, 2, 3, 4, 5} and B={3, 5, 7, 8}, then answer the following statements:

(i) Find $A\times B=$

And $B\times A=$

(ii) If R= {(1, 3), (1, 5), (2, 7), (2, 8)}. Then, is R binary relation from A to B?
Why?
If your answer "yes", then find dom R=
And range R=

(iii) Find $R^{-1}=$
Is R^{-1} binary relation from B to A?
Why?
If your answer "yes", then find dom $R^{-1}=$
And range $R^{-1}=$

(iv) If $R = \{(2, 5), (3, 4), (4, 5)\}$, then answer the following:

Is R binary relation from A to B?

Why?

Is R binary relation from B to A?

Why?

Is R binary relation on A?

Why?

Is R binary relation on B?

Why?

(v) Is $R= A\times B$ binary relation from A to B?

Find dom R=

Range R=

$R^{-1}=$

Is $R^{-1}= B\times A$?

(vi) If $R\subseteq A\times B$, then R and R^{-1} in each of follows:

a) $x \, R \, y \Leftrightarrow x = y - 2$

R=

$R^{-1}=$

b) $x \, R \, y \Leftrightarrow x = y$

R=

$R^{-1}=$

c) $x \, R \, y \Leftrightarrow x > y - 2$

R=

$R^{-1}=$

d) $x \, R \, y \Leftrightarrow x = y + 3$

R=

$R^{-1}=$

(2) If A= {1, 2, 3, 4, 5, 6}, then any of the following relations on A is reflexive? Symmetric? Transitive? Equivalence? Anti-symmetric?

(i) $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

Reflexive?

Symmetric?

Transitive?

Equivalence?

Anti-symmetric?

(ii) $R_2 = R_1 - \{(5, 5)\}$

Reflexive?

Symmetric?

Transitive?

Equivalence?

Anti-symmetric?

(iii) $R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

Reflexive?

Symmetric?

Transitive?

Equivalence?

Anti-symmetric?

(iv) $R_4 = R_3 \cup \{(2, 2)\}$

Reflexive?

Symmetric?

Transitive?

Equivalence?

Anti-symmetric?

(v) $R_5 = \{(2, 6)\}$

Reflexive?

Symmetric?

Transitive?

Equivalence?

Anti-symmetric?

(vi) $R_6 = \{(1, 5),(5, 1)\}$

Reflexive?

Symmetric?

Transitive?

Equivalence?

Anti-symmetric?

(vii) $R_7 = \{(3, 4), (4, 3), (3, 3), (4, 4)\}$

Reflexive?

Symmetric?

Transitive?

Equivalence?

Anti-symmetric?

(viii) $R_8 = A \times A=$

Reflexive?

Symmetric?

Transitive?

Equivalence?

Anti-symmetric?

(3) Let $\mathbb{Z}^+$ be the set of positive integer numbers, and R be a relation on $\mathbb{Z}^+$ defined as follows:

$$\forall\ x, y \in \mathbb{Z}^+: x \mathrel{R} y \Leftrightarrow x + 2y = 12$$

Find R=

Dom R=

Range R=

R^{-1}=

(4) If $\mathbb{Z}$ be the set of integer numbers, then any of the following relations on $\mathbb{Z}$ is reflexive? Symmetric? Transitive? Equivalence? Anti-symmetric? P.O.R.? T.O.R.?

(i) $\forall$ x, y $\in \mathbb{Z}$: x R $y \Leftrightarrow x \mid y$

x يقسم y ، او y يقبل القسمة على x

(ii) $\forall$ x, y $\in \mathbb{Z}$: x R $y \Leftrightarrow x < y$

(iii) $\forall$ x, y $\in \mathbb{Z}$: x R $y \Leftrightarrow x > y$

(iv) $\forall$ x, y $\in \mathbb{Z}$: x R $y \Leftrightarrow x \leq y$

CHAPTER FIVE

Mappings

التطبيقات

التطبيقات (الرواسم) من أهم المفاهيم الرياضياتية واوسعها إنتشاراً واكثرها فائدة، فقلّ أن تجد فرعاً من فروع الرياضيات إلا وللتطبيقات فيه نصيب الاسد، إذ هي تستخدم في التحليل الرياضي والجبر والهندسة والتبولوجيا وغير ذلك، كما تمتد استخداماتها الى فروع المعرفة الاخرى من فيزياء وكيمياء واقتصاد ونحوها.

وكلمة "تطبيقات" مفردها تطبيق، ما هو إلا حالة خاصة من العلاقة الثنائية من مجموعة الى اخرى، بغض النظر عن طبيعة العناصر المنتمية لكلا هاتين المجموعتين. مما جعل التطبيق قادراً على إحتواء مفاهيم أخرى مثل الدالة أو التابع أو التحويل أو الاقتران وما الى ذلك من مصطلحات كانت تستخدم في فروع الرياضيات، وتبدو احياناً وكانها أشياء مختلفة وقد جاء التطبيق ليجعلها حالات خاصة منه فمثلاً الدالة الحقيقية في التحليل الرياضي ما هي إلا حالة خاصة من التطبيق (إذ هي تطبيق من مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية الى الاعداد الحقيقية نفسها). والان ما هو التطبيق من وجهة النظر الرياضياتية المعاصرة؟

إن التطبيق كما أشرنا اعلاه هو حالة خاصة من العلاقات الثنائية. ولتعيين تطبيق ما يلزمنا ثلاثة أمور أساسية هي:

(1) مجموعة اولى $A \neq \varnothing$.

(2) مجموعة ثانية $B \neq \varnothing$.

(3) قاعدة (أو قانون) نستطيع بواسطتها **ربط كل عنصر من عناصر المجموعة A بعنصر وحيد من عناصر B.**

تسمى المجموعة الاولى مجموعة تعريف التطبيق (النطاق – المنطلق – المجال) (Domain) كما تسمى المجموعة الثانية B المستقر (النطاق المصاحب – المجال المقابل – المدى) (Codomain).

<u>Definition 5.1:</u> Let A and B be two nonempty sets. A relation f from A to B ($f \subseteq A \times B$) is called a ***mapping*** or ***function*** if each element in A is related to a unique element in B. This relation is denoted by f: A$\rightarrow$ B or $A \xrightarrow{\;f\;} B$ and read as; f is a mapping from A to B.

It is clear that dom f = A, and if $(x, y) \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$.

إذا كانت A ، B مجموعتين غير خاليتين وكانت $f \subseteq A \times B$ فإن العلاقة f تسمى **تطبيقاً** عندما تحقق الشرطين الاتيين:

(1) مجموعة تعريف العلاقة f تساوي A نفسها أي أن: $\{x : x \in A \wedge (x, y) \in f\} = A$

(2) كل عنصر في A يرتبط بعنصر وحيد من عناصر B أي أن: $(x, y) \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$

<u>Remark 5.2:</u> Every function is relation but not every relation is a function.

<u>Definition 5.3:</u> Let f: A$\to$ B be a mapping and $(x, y)\in f$, then the element $y\in$B is called the image of an element $x\in$A. And written as; $y = f(x)$ or $x \to y = f(x)$.

And if $A_1\subseteq$ A, then the image of A_1 is define as follows;

$f(A_1) = \{y \in B: y = f(x) \wedge x \in A_1\}$.

إذا كان $f: A \to B$ تطبيقاً وكان $(x, y) \in f$، فإننا نسمي العنصر $y\in$B **صورة** (**أو خيال**) **العنصر** $x\in$A، ونكتب ذلك بالشكل:

$$y = f(x) \quad \text{or} \quad x \to y = f(x)$$

وإذا كانت $A_1 \subseteq A$، فإننا نعرف صورة A_1 كما يلي:

$$f(A_1) = \{y \in B: y = f(x) \wedge x \in A_1\}$$

<u>Definition 5.4:</u> Let f: A$\to$B be a mapping. Then:

(i) The set A is called the ***domain of f*** مجال الداله and is denoted by D_f.

(ii) The set B is called the ***codomain of f*** المجال المقابل للداله and is denoted by Cod_f.

(iii) If $f(x)= y$ then y is called the ***image of*** x and x is the ***preimage of*** y.

(iv) The set of all images of the elements of A is called the ***range*** of f and is denoted by R_f.

$$R_f = f(A)= \{y = f(x)\in B: x\in A\}\subseteq B.$$

<u>Definition 5.5:</u> (Equal Mappings) تساوي التطبيقات

Let f and g be two mappings, then f and g are said to be equal, write as $f= g$, if the following conditions are hold:

(i) $D_f = D_g$.

(ii) $Cod_f = Cod_g$.

(iii) $f(x)= g(x)$ for every $x\in D_f = D_g$.

نقول عن تطبيقين f ، g إنهما **متساويان** ، ونكتب $f = g$ ، إذا حققا الشروط الاتية:

(1) مجموعة تعريف f = مجموعة تعريف g.

(2) مستقر f = مستقر g.

(3) $\forall x \in A : f(x) = g(x)$ ، حيث A مجموعة تعريفهما.

<u>Definition 5.6:</u> (Inverse Image) **الصورة العكسية**

Let f: A $\rightarrow$ B be a mapping, the inverse image of f is denoted by f^{-1} and is defined as follows;

$$f^{-1}(B) = \{x \in A: y = f(x) \wedge y \in B\}.$$

And if B_1 is a subset of B, then the inverse image of B_1 is defined as follows;

$$f^{-1}(B_1) = \{x \in A: y = f(x) \wedge y \in B_1\}.$$

If $B_1=\{y\}$, then $f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y) = \{x \in A: y = f(x)\}$ is called the inverse image of the element y.

It is clear that the inverse image of a mapping need not be mapping, in general.

إذا كان $f: A \longrightarrow B$ تطبيقاً ، فإننا نستخدم الرمز f^{-1} يدل على الصورة العكسية للعلاقة f . والجدير بالذكر أن العلاقة العكسية لتطبيق f ليست بالضرورة تطبيقاً.

إذا كان $f: A \longrightarrow B$ تطبيقاً وكانت $B_1 \subseteq B$، فإننا نسمي المجموعة $f^{-1}(B_1)$ **الصورة العكسية** للمجموعة B_1، ونعرفها كما يلي:

$$f^{-1}(B_1) = \{x \in A: y = f(x) \wedge y \in B_1\}$$

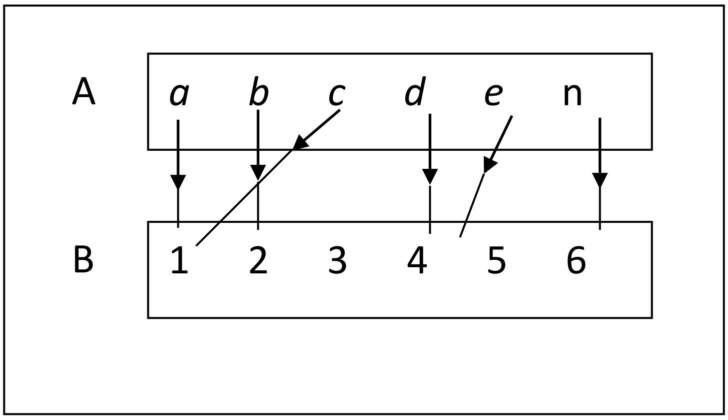
وإذا كانت $B_1 = \{y\}$، أي مكونة من عنصر واحد فقط، فإننا نكتب:

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in A: y = f(x)\}$$

أو إختصاراً $f^{-1}(y) = \{x \in A: y = f(x)\}$، وتدعى الصورة العكسية للعنصر y.

<u>Example 5.7:</u> Let A=$\{a, b, c, d, e, n\}$ and B=$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ be two sets, f :A$\rightarrow$B be a mapping defined as the following graph, $A_1, A_2 \subseteq A$ and $B_1, B_2 \subseteq B$ such that;

$$A_1 = \{a, b, d\}, \quad A_2 = \{c, d, e\}.$$
$$B_1 = \{1, 2, .3\}, \quad B_2 = \{2, 4, 5\}.$$



Then, find each of follows:

(i) $f(\mathrm{d})$ **(ii)** $f^{-1}(1)$ **(iii)** $f^{-1}(5)$
(iv) $f^{-1}(\mathrm{B}_1)$ **(v)** $f(\mathrm{A}_1)$ **(vi)** $f(\mathrm{A})$
(vii) $f(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2)$ **(viii)** $f(\mathrm{A}_1) \cup f(\mathrm{A}_2)$ **(ix)** $f(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2)$
(x) $f(\mathrm{A}_1) \cap f(\mathrm{A}_2)$ **(xi)** $f(f^{-1}(\mathrm{B}_1))$ **(xii)** $f(f^{-1}(\mathrm{A}_1))$
(xiii) $f^{-1}(\mathrm{B}_1 \cup \mathrm{B}_2)$ **(xiv)** $f^{-1}(\mathrm{B}_1) \cup f^{-1}(\mathrm{B}_2)$ **(xv)** $f^{-1}(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2)$
(xvi) $f^{-1}(\mathrm{B}_1) \cap f^{-1}(\mathrm{B}_2)$ **(xvii)** $f^{-1}(\mathrm{B}_1^{\mathrm{c}})$ **(xviii)** $(f^{-1}(\mathrm{B}_1))^{\mathrm{c}}$.

Solution:

(i) $f(\mathrm{d}) = 4$ **(ii)** $f^{-1}(1) = \{a, c\}$ **(iii)** $f^{-1}(5) = \{\ \} = \varnothing$

(iv) $f^{-1}(\mathrm{B}_1) = f^{-1}(\{1,2,3\}) = \{a, c, b\}$

(v) $f(\mathrm{A}_1) = f(\{a, b, d\}) = \{1, 2, 4\}$ **(vi)** $f(\mathrm{A}) = \{1, 2, 4, 6\}$

(vii) $f(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2) = f(\{a, b, d, c, e\}) = \{1,2,4\}$

(viii) $f(\mathrm{A}_1) \cup f(\mathrm{A}_2) = \{1, 2, 4\} \cup \{1, 4\} = \{1, 2, 4\}$

(ix) $f(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2) = f(\{d\}) = \{4\}$

(x) $f(\mathrm{A}_1) \cap f(\mathrm{A}_2) = \{1, 2, 4\} \cap \{1, 4\} = \{1, 4\}$

(xi) $f(f^{-1}(\mathrm{B}_1)) = f(\{a, c, b\}) = \{1, 2\} \subset \mathrm{B}_1$.

بقية الفقرات متروك حلها للطالب كتمارين.

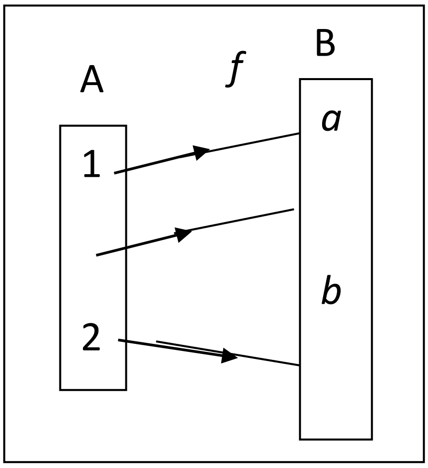
__**Theorem 5.8:**__ If f:A→B is a mapping, $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \subseteq \mathrm{A}$ and $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2 \subseteq \mathrm{B}$, then the following statements are hold;

(i) $\mathrm{A}_1 \subseteq \mathrm{A}_2 \Rightarrow f(\mathrm{A}_1) \subseteq f(\mathrm{A}_2)$
(ii) $f(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2) = f(\mathrm{A}_1) \cup f(\mathrm{A}_2)$
(iii) $f(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2) \subseteq f(\mathrm{A}_1) \cap f(\mathrm{A}_2)$
(iv) $f(f^{-1}(\mathrm{B}_1)) \subseteq \mathrm{B}_1$
(v) $f^{-1}(f(\mathrm{A}_1)) \supseteq \mathrm{A}_1$
(vi) $f^{-1}(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2) = f^{-1}(\mathrm{B}_1) \cap f^{-1}(\mathrm{B}_2)$
(vii) $f^{-1}(\mathrm{B}_1 \cup \mathrm{B}_2) = f^{-1}(\mathrm{B}_1) \cup f^{-1}(\mathrm{B}_2)$
(viii) $f^{-1}(\mathrm{B}_1^{\mathrm{c}}) = (f^{-1}(\mathrm{B}_1))^{\mathrm{c}}$

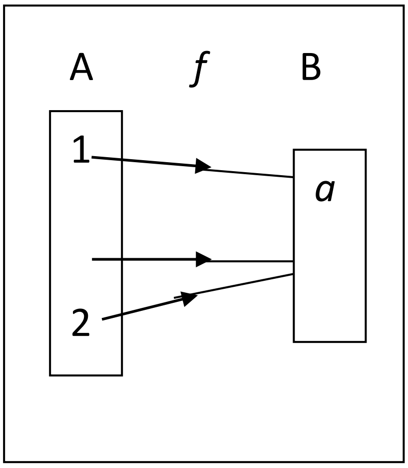
لن نخوض في برهان هذه المبرهنة، معتبرين فقراتها من خواص التطبيق والتي سنستعملها لاحقاً.

أنواع التطبيقات Types of Mappings

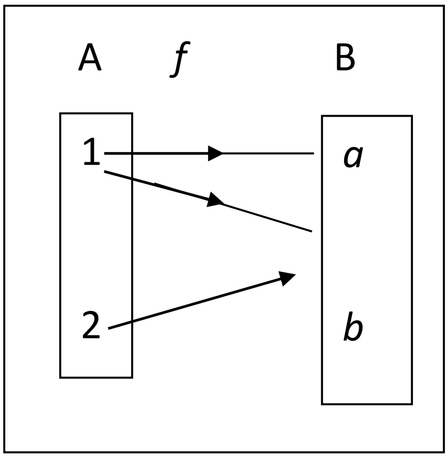
تأمل المخططات السهمية الاتية ثم أجب عما يأتي:



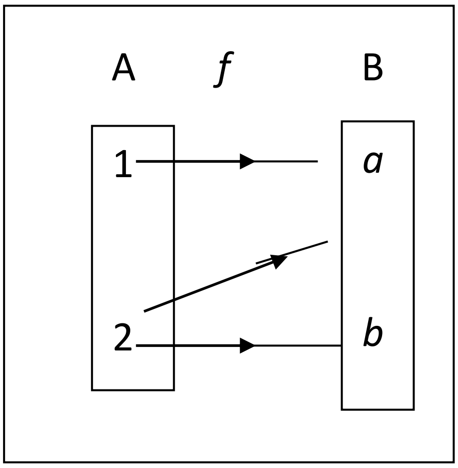
(1)



(2)



(3)



(4)

(أ) هل كل مخطط منها يمثل تطبيقاً؟ وحدد المنطلق والمستقر والمدى في كل حالة.

(ب) في المخطط (1)، هل يوجد $y \in \mathrm{B}$ بحيث يكون y صورة لعنصرين مختلفين من عناصر A؟ إن مثل هذا التطبيق يسمى تطبيقاً متبايناً (أحادياً – واحد لواحد)

(Injective or One to one " 1 – 1")

(ج) في المخطط (2)، هل يوجد $y \in \mathrm{B}$ بحيث يكون ليس صورة لعنصر واحد على الاقل من عناصر A؟ (أي هل يوجد $y \in \mathrm{B}$ بحيث يكون $y \neq f(x)$ من أجل $x \in \mathrm{A}$. إن مثل هذا التطبيق يسمى تطبيقاً غامراً (شاملاً – فوقياً) (Surjective or Onto).

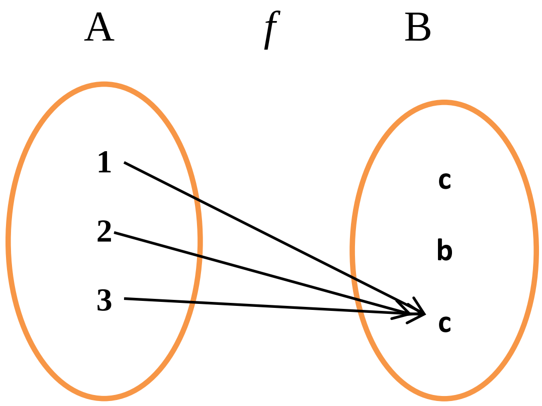
(د) في المخطط (3) أجب عن (ب) و (حـ) مـاذا تلاحـظ؟ إن مثل هذا التطبيق يسمى تقابلاً (تناظراً أحادياً) (1- 1 Bijective or).

(هـ) في المخطط (4) أجب عن السؤالين (ب) ، (حـ) ماذا تلاحظ؟ إن هذا التطبيق ليس متباينـاً ولا غامراً ولا تقابلاً.

<u>Definition 5.9:</u> (Constant Mapping)　التطبيق الثابت

A mapping f:A→B is called ***constant mapping*** if there is an element c in B such that f(x)= c for every x in A.

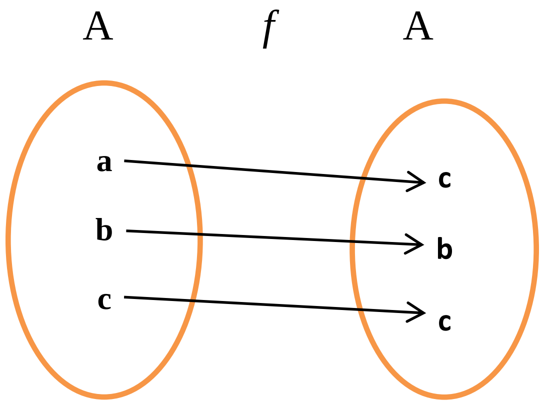
Or, f is constant mapping ⇔ R_f ={c}.



Constant function

<u>Definition 5.10:</u> (Identity Mapping)　التطبيق الذاتي

A mapping f:A→A is called ***identity mapping*** denoted by i_A if $f(x)= x$ for every $x \in$A.

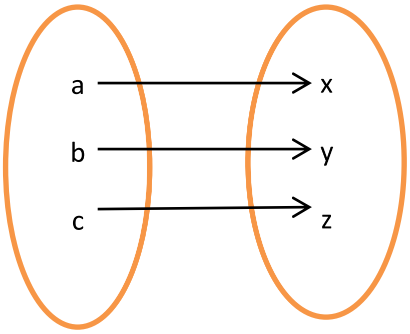


Identity function

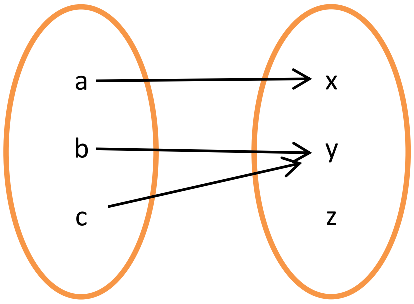
<u>Definition 5.11:</u> (Injective Mapping) التطبيق المتباين

A mapping f:A→B is called ***injective mapping*** or ***one to one*** (1-1) if different elements in the domain A have different images in B.

In other words; f is 1-1 mapping if $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ or $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.



One to one mapping



not one to one mapping

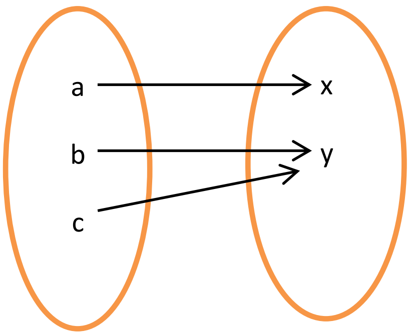
<u>Definition 5.12:</u> (Surjective Mapping) التطبيق الشامل

A mapping f:A→B is called ***surjective*** *mapping* or **(onto)** if every element in B has ***at least one*** relation element in A.

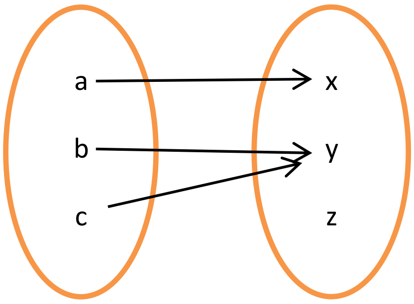
In other words;

A mapping f:A→B is onto ⇔ $\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$.

Or, a mapping f:A→B is onto ⇔ $R_f = Cod_f$.



Onto mapping



not onto mapping

Definition 5.13: (Bijective Mapping) التطبيق المتقابل

A mapping f:A→B is called ***bijective*** *mapping* ⇔ f is 1-1 and onto.

Definition 5.14: (Inverse mapping) الدالة العكسية

Let f be a bijective mapping from A to B then f^{-1} is a mapping from B to A such that $f^{-1}(y)= x$.

Example 5.15: Let $f : \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ be a mapping such that $f(x)= x +1$,

(i) Discuss the map f, is it 1-1, onto or bijective.

(ii) Draw the graph of f where $-2 \le x \le 2$.

(iii) Find the following;

(a) $f(5)=$ (b) $f(\{-1,3\})=$

(c) $f^{-1}(0)=$ (d) $f^{-1}(\{1,7\})=$

(iv) Is f^{-1} a mapping from $\mathbb{Z}$ to itself? Find $f^{-1}(x)$

الحل:

(أ) f تطبيق متباين لانه: $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{Z} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.
وكذلك فأن f تطبيق غامر، لان كل عنصر من عناصر المستقر هو صورة لعنصر من عناصر المنطلق (مجموعة تعريف f)
ولما كان f متبايناً وغامراً فهو تقابل.

(ب) $f(x) = x + 1 \;;\; \forall\, x \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \dots & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \end{array}$$

(حـ)

(i) $f(5) = 6$ (ii) $f(\{-1,3\}) = \{0,4\}$

(iii) $f^{-1}(0) = -1$ (iv) $f^{-1}(\{1,7\}) = \{0,6\}$

(د) نعم، لان f تقابل وهذا يعني أنه لكل عنصر في المستقر صورة عكسية وحيدة في المنطلق وبالتالي فإن f^{-1} هو تطبيق تقابل أيضاً. (تذكر أن f^{-1} علاقة عكسية للتطبيق f، لذلك فإن f^{-1} ليس بالضرورة تطبيقاً).
ولتعريف التطبيق f^{-1} في مثالنا هذا نتبع ما يلي:
لما كان $y = f(x) = x + 1$ هو صورة العنصر x وفق التطبيق f فإن الصورة العكسية للعنصر y، أي $f^{-1}(y)$، هي

$$f^{-1}(y) = x = y - 1$$

ولما كان y عنصراً اختيارياً من $\mathbb{Z}$ فيمكن الاستعاضة عنه بالحرف x ويكون لدينا:

$$f^{-1}(x) = x - 1 \quad ; \quad f^{-1}: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Example 5.16: Let $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be a mapping such that $f(x)= x^2$,

(i) Is f 1-1?
(ii) Is f onto?
(iii) Is f bijective?
(iv) Find the range of f (R_f).

الحل:

(أ) f ليس تطبيقاً متبايناً لان:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

فمثلاً

$f(1) = f(-1) \Rightarrow 1 \neq -1$

(ب) f ليس تطبيقاً غامراً، لان $f(x) = x^2 \geq 0$ وبالتالي فإن جميع الاعداد السالبة في المستقر ليست صوراً لعناصر في منطلق f .

(حـ) f ليس تقابلاً، لان التقابل يجب أن يكون متبايناً وغامراً.

(د)

$$f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) = x^2 \wedge x \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{ y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$$
$$= \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

وهذا ما يثبت أن $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ليس تطبيقاً غامراً لأن شرط التطبيق الغامر أن يكون:

$$f(A) = B \quad ; \quad f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \neq \mathbb{R}$$

ملاحظات:

(1) في المثال (5.16) لو إعتبرنا المستقر هو المجموعة $C=\mathbb{R}^+\cup \{0\}$ لكان التطبيق $f:\mathbb{R}\to C \ni f(x) = x^2$ غامراً فقط ، لماذا؟

(2) في المثال (5.16) لو إعتبرنا منطلق f (مجموعة تعريف f) هو المجموعة $C=\mathbb{R}^+ \cup\{0\}$ لكان التطبيق $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^2$ متبايناً فقط ، لماذا؟

(3) في المثال (5.16) لو إعتبرنا المنطلق = المستقر = $\mathbb{R}^+$ لكان التطبيق $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ حيث $f(x) = x^2$ تقابلاً، لماذا؟

سؤال:

ما هو الشرط اللازم والكافي ليكون لتطبيق ما f تطبيق عكسي f^{-1} ؟

Composition of Mappings تركيب التطبيقات

Let f:A→B be a mapping and g:B→C be a mapping. The composition of g and f is a mapping from A to C denoted by $g\circ f$ and is defined as;

$$(g\circ f)(x)= g(f(x)) \in C \text{ for every } x\in A.$$

In other words;

If f:A→B and g:B→C, then $g\circ f$: A→C is a mapping ⇔ $\forall x\in A, \exists! z\in C$ such that $z = (g\circ f)(x)= g(f(x))$.

إذا كان $f : A \to B$ ، $g : B \to C$ تطبيقين، وقابلنا كل عنصر $x \in A$ بالعنصر $z\in C$ حيث : $z = h(x) = g(f(x))$، فإننا نكون قد عرفنا تطبيقاً h من A الى C. سنرمز لهذا التطبيق بالرمز $h = g \circ f$ (ويقرأ g تركيب f) ونسميه مركب التطبيقين f و g كما يسمى أحياناً محصل التطبيقين أو تابع التابع أو دالة الدالة.

إننا نستطيع التعبير عن مركب التطبيقين كما هو موضح أدناه.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$h=g\circ f \text{ or } h(x)=(g\circ f)(x)$$

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & C \end{tikzcd}$$

Remark 5.17:

(i) $g\circ f$ is defined (exist) if and only if $R_f \subseteq D_g$.

(ii) $f\circ g$ is defined (exist) if and only if $R_g \subseteq D_f$.

(iii) $g\circ f \neq f\circ g$ (in general).

<u>Example 5.18:</u> Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be two mappings such that $f(x) = x^2 + 1$ and $g(x) = x - 1$. Then,

(i) Find $g \circ f$ and $f \circ g$.

(ii) Find $(g \circ f)(2)$ and $(f \circ g)(2)$.

(iii) Find f^2, g^2, $f^2(-1)$ and $g^2(-1)$.

Solution:

(i) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = (x^2 + 1) - 1 = x^2$ and

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 1) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2.$

إذن نستنتج أن $f \circ g \neq g \circ f$ ، أي أن تركيب التطبيقات ليس إبداليا ً في الحالة العامة.

(ii) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = 2^2 = 4$

And $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = 2^2 - 2 \times 2 + 2 = 2$

وهكذا نجد أن $(g \circ f)(2) \neq (f \circ g)(2)$.

(iii) $f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$

$= f(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2.$

$f^2(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^2 + 2 = 5.$

And $g^2(x) = (g \circ g)(x) = g(g(x))$

$= g(x - 1) = (x - 1) - 1 = x - 2.$

$g^2(-1) = -1 - 2 = -3.$

<u>Theorem 5.19:</u> If $f : A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$ and $h: C \longrightarrow D$ are three mappings, then $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Proof:

Example 5.20: If $□ \xrightarrow{f} □ \xrightarrow{g} □ \xrightarrow{h} □$ are mappings defined as follows;

$$f(x) = x + 1 \quad ; \quad g(x) = 2x \quad ; \quad h(x) = \sin x$$

Then show that $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$

Solution: $((h\circ g)\circ f)(x) = (h\circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$

$= h(g(x + 1))$

$= h(2(x + 1))$

$= \sin(2(x + 1))$.

And $(h\circ(g\circ f))(x) = h\circ(g(f(x)) = h(g(f(x)))$

$= h(g(x + 1))$

$= h(2(x + 1))$

$= \sin(2(x + 1))$.

Theorem 5.21: Let f : A→B and g : B→C be two mappings:

(i) If f and g are 1-1, then so is $g\circ f$.

(ii) If f and g are onto, then so is $g\circ f$.

(iii) If f and g are bijective, then so is $g\circ f$.

(iv) If $g\circ f$ is 1-1, then f is 1-1.

(v) If $g\circ f$ is onto, then g is onto.

Proof:

(i): To prove $g\circ f$: A→ C is 1-1,

$\forall x, y \in$ A such that $g\circ f(x) = g\circ f(y)$ must prove $x = y$.

$g\circ f(x) = g\circ f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y))$ (def. of $g\circ f$)

$\Rightarrow f(x) = f(y)$ (g is 1-1)

$\Rightarrow x = y$ (f is 1-1)

(ii) To prove $g\circ f$: A→ C is onto,

Since $\forall z\in$C, $\exists y\in$B such that $g(y) = z$ (since g is onto)

And $\forall y\in$B, $\exists x\in$A such that $f(x) = y$ (since f is onto)

Then, $\forall z\in$C, $\exists x\in$A such that $g(f(x)) = g(y) = z$

So, $\forall z\in$C, $\exists x\in$A such that $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = z$.

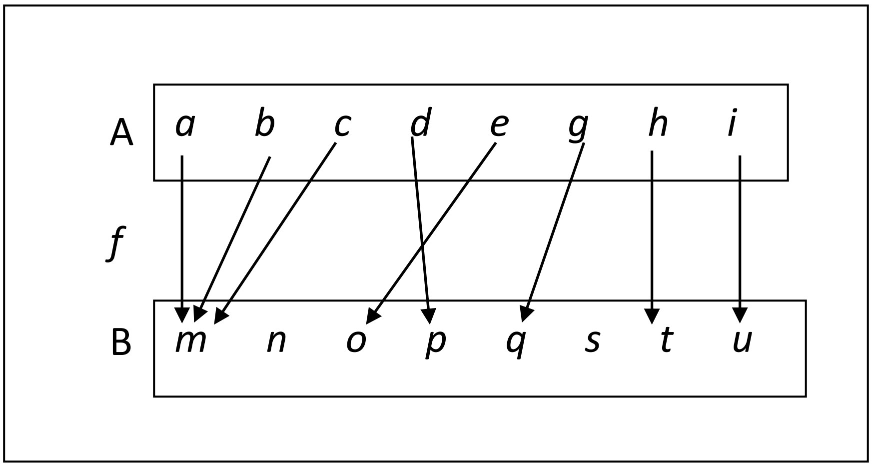
(iii) **H.W.**

(iv) To prove f is 1-1, let $x, y \in A$, $f(x) = f(y)$, to prove $x = y$.
Since, $f(x)$, $f(y) \in D_g$ and $f(x) = f(y)$ implies, $g(f(x)) = g(f(y))$, (since g is a mapping). So $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, (def. of $g \circ f$). Therefore, $x = y$ (since, $g \circ f$ is 1-1).

(v) **H.W.**

Exercise

(1) Let f :A→ B be a mapping define as follows;



Let $A_1 = \{c, d\}$, $A_2 = \{a, d, g\}$, $B_1 = \{m, p, q\}$ and $B_2 = \{n, o, q\}$.
Find the following:

(i) $f(d)$ and $f^{-1}(n)$.
(ii) $f(A_1 \cup A_2)$ and $f(A_1) \cup f(A_2)$.
(iii) $f(A_1 \cap A_2)$ and $f(A_1) \cap f(A_2)$.
(iv) $f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ and $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
(v) $f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ and $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
(vi) $f(A_1)$ and $f^{-1}(f(A_1))$.
(vii) $f^{-1}(B_2)$ and $f(f^{-1}(B_2))$.
(viii) $f^{-1}(B_2^c)$ and $f(f^{-1}(B_2))^c$.

(2) If $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}$ is a mapping define as follows,

$$f(x) = 2x - 5$$

(i) Write the graph arrows diagram of f where $4 \leq x \leq 10$.
(ii) Is f 1-1?
(iii) Is f onto?
(iv) Is f bijective?
(v) Find $f(1)$, $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}(-3)$ and $f^{-1}(0)$
(vi) Find $f^{-1}(\{y \in \mathbb{Z} : y \leq -4\})$

(3) Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be two mappings such that $f(x) = x^2 - 2$ and $g(x) = 2x + 1$. Then,

(i) Find $h_1 = g \circ f$ and $h_2 = f \circ g$.

(ii) Find $h_1(4)$, $h_2(4)$.

CHAPTER SIX

Elementary in Number Theory

أوليات في نظرية الأعداد

لقد استخدم الأنسان في تاريخه الطويل أنظمة عددية مختلفة والنظام العَشْري الذي نستخدمه اليوم هو نظام سهل ومنطقي لأن لدينا عشرة أصابع في اليدين.
إن هذا النظام يساعد على إجراء كثير من العمليات الحسابية بسهولة وكان له فضل كبير في تطور علم الرياضيات.
يستخدم النظام العَشْري الرموز:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
وتسمى هذه الرموز بأرقام النظام (digits). والاساس (base) في أي نظام عددي يساوي عدد الأرقام أو الرموز المستخدمة فيه فأساس نظامنا العَشْري هو عشرة.
ونظرية الأعداد هي فرع من فروع علم الرياضيات والتي تهتم بدراسة الأعداد والعمليات عليها.
إحدى أهم العمليات على الأعداد هي قابلية القسمة.
سندرس قابلية قسمة عدد صحيح على عدد صحيح فقط. وسنقدم خوارزمية القسمة بشكل يمكن أن تستعمل في الحاسوب بسهولة ويُسر وتطبيقاتها.

Divisibility: قابلية القسمة

Definition 6.1: Let a and b are two integer numbers such that $a \neq 0$. Then the integer number ***a* is called a *divisor of b***, denoted by $a \mid b$, if there is an integer number c such that $b = ca$.

If a is not a divisor of b, then we denoted that $a \nmid b$.

يكون العدد الصحيح a ، حيث $a \neq 0$ **قاسماً (Divisor)** للعدد الصحيح b ونكتب $a \mid b$ إذا وإذا فقط وجد عدد صحيح c يحقق المساواة : $b = ca$.
كما نقول إن a عامل من عوامل b أو b قابل للقسمة على a أو b من مضاعفات a. وإذا كان a لا يقسم b نكتب $a \nmid b$.

Theorem 6.2: Let a, b and c be three integer numbers.

(i) If $a \mid b$ and $a \mid c$, then $a \mid (bx + cy)$ $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}$.

(ii) If $a \mid b$, then $a \mid bc$.

(iii) If $a \mid b$ and $b \mid c$, then $a \mid c$.

(iv) If $a > 0$, $b > 0$ and $a \mid b$, then $a \leq b$.

(v) If $a \mid b$, then $|a| \mid |b|$.

(vi) If $a \mid b$ and $b \mid a$, then $a = \pm b$.

Proof: (i): Since $a \mid b$ and $a \mid c$, then there exist two integer numbers *s* and *t* such that; $b = as$ and $c = at$. Implies,

$bx + cy = asx + aty = a(sx + ty)$.
Thus, $a \mid (bx + cy)$.

(ii): Since $a \mid b$, then there exist an integer number *s* such that;

$b = as$. Implies, $bc = asc = a(sc)$. Thus, $a \mid (bc)$.

(iii): Since $a \mid b$ and $b \mid c$, then there exist two integer numbers *s* and *t* such that; $b = as$ and $c = bt$. Implies,

$c = bt = ast = a(st)$.
Thus, $a \mid c$.

(iv): Since $a \mid b$, then there exist an integer number *s* such that;
$b = as$. Since $a > 0$ and $b > 0$, then $c > 0$.
Therefore $c \geq 1$ and $b = ac \geq a$.

(v): Since $a \mid b$, then there exist an integer number *s* such that;
$b = as$. Implies, $|b| = |as| = |a|\,|s|$ and so $|a| \mid |b|$.

(vi): Since $a \mid b$ and $b \mid a$, then $|a| \mid |b|$ and $|b| \mid |a|$. But $|a| > 0$ and $|b| > 0$, implies $|a| \leq |b|$ and $|b| \leq |a|$. Thus $|a| = |b|$. Hence, $a = \pm b$.

In follows we will produce an important theorem which is called "***Division Algorithm*** ".

<u>Theorem 6.3:</u> If *a* is a positive integer number and *b* is an integer number, then there are only two integer numbers *r* and *q* such that the following statement is hold; $b = qa + r$; $0 \leq r < a$.

<u>البرهان:</u>
لاعطاء برهان مقنع لهذه المبرهنة علينا إثبات وجود العددين q و r ثم برهان وحدانية هذين العددين.

لنبرهن أولاً على وجود العددين q و r .

اعتبر المجموعة: $S = \{x \geq 0 : x = b - ta, t \in \mathbb{Z}\}$

هذه المجموعة غير خالية لان: $b - ta \geq 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} \geq t$.

من مبدأ الترتيب الحسن يوجد عنصر أصغر في S وليكن r. لتكن قيمة t المقابلة للعدد r هي q. إذن نحصل على:

$r = b - qa \quad \Rightarrow \quad b = qa + r$

لاحظ أن $r \geq 0$.

بقي أن نبين أن $r < a$. لنفرض جدلاً أن $r \geq a$. إذن:

$0 \leq r - a = b - qa - a = b - (q + 1)\, a$

وهذا يجعل $r - a \in S$. ولكن $r - a < r$ مما يناقض كون r عنصراً أصغر في S. إذن $r < a$.

نبرهن الآن على وحدانية العددين q و r.

لنفرض أن:

$b = qa + r \quad ; \quad 0 \leq r < a$

$b = q'a + r' \quad ; \quad 0 \leq r' < a$

بطرح المعادلتين أعلاه نحصل على:

$r' - r = (q - q')a$

وبجمع المتباينتين $-a < -r \leq 0$ و $0 \leq r' < a$ والقسمة على العدد a نحصل على:

$$-1 < \frac{r' - r}{a} < 1$$

وبما أن: $\frac{r' - r}{a} = q' - q$ فإننا نستنتج:

$q - q' = 0 \quad \Rightarrow \quad q = q'$

وكذلك: $r' = r$.

Corollary 6.4: If a and b are integer numbers and $a \neq 0$, then there are only two integer numbers r and q such that the following statement is hold; $b = qa + r \quad ; \quad 0 \leq r < |a|$.

Example 6.5: Show that any odd integer number can be written as the form $4k+1$ or $4k+3$, for some integer number k.

Proof: Let $a=4$, then for any integer number b and by using the division algorithm theorem, b can be written as the form

$b = 4k + r \quad ; \quad r = 0, 1, 2, 3.$

Therefore, any odd integer number can be written as the form $4k+1$ or $4k+3$ and any even integer number can be written as the form $4k$ or $4k+2$.

ملاحظة (1):

إذا كان العددان a و b كبيرين فإنه يمكن إيجاد q و r بواسطة الالة الحاسبة (Calculator) بإتباع الآتي:

(1) أوجد خارج القسمة $\frac{b}{a}$ فيكون q هو أكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي $\frac{b}{a}$.

(2) العدد r هو العدد الصحيح $a(\frac{b}{a}-q)$.

ملاحظة (2):

يسمى العدد q في المبرهنة (6.3) بخارج قسمة b على a (Quotient) والعدد r بباقي القسمة (Remainder) ويمكننا الحصول على صيغة لها بدلالة $\frac{b}{|a|}$.

وقبل أن نجد هذه الصيغة يلزمنا معرفة التعريف الآتي:

Definition 6.6:

(i) Let x be a non-zero integer number. The ***signum function of x*** is denoted by ***Sgn(x)*** and defined as follows;

$$\operatorname{Sgn} x = \begin{cases} 1 & , \ x > 0 \\ -1 & , \ x < 0 \end{cases}$$

(ii) Let x be a real number. The ***greatest integer function of x*** is denoted by **[*x*]** and defined as follows;

$[x] = n$ where n is an integer and $n \le x < n+1$.

ملاحظة:

يتضح من تعريف $[x]$ أن:

$$[x] \le x < [x] + 1$$

وأن: $0 \le t < 1 \quad ; \quad x = [x] + t$.

Corollary 6.7: If a and b are integer numbers and $a \neq 0$, such that Corollary 6.4 and the following statement are hold;
$b = qa + r \quad ; \quad 0 \leq r < |a|$. Then,

$$q = \left[\frac{b}{|a|}\right] \text{Sgn } a$$

$$r = b - \left[\frac{b}{|a|}\right] |a|$$

Proof: By using Corollary (6.4), we get

$$b = qa + r \quad ; \quad 0 \leq r < |a|$$

And by division on $|a|$,

وبالقسمة على $|a|$ نجد أن:

$$\frac{b}{|a|} = q \ \text{Sgn } a + \frac{r}{|a|} \quad ; \quad 0 \leq \frac{r}{|a|} < 1$$

$\Rightarrow \left[\frac{b}{|a|}\right] = q \ \text{Sgn } a$. That is led to

$$= q \ \left[\frac{b}{|a|}\right] (\text{Sgn } a)^{-1} = \left[\frac{b}{|a|}\right] \text{Sgn } a .$$

And so,

$$r = b - qa = b - \left(\left[\frac{b}{|a|}\right] \text{Sgn } a\right) a = b - \left[\frac{b}{|a|}\right] |a| .$$

المبرهنة التالية هي تطبيق على خوارزمية القسمة والتـي تثبت لنـا أن أي عدد صحيح أكبر من الواحد يصلح أن يكون أساساً لنظام عددي.

Theorem 6.8: Let k be a positive integer number largest than one, then any positive integer number x can be written in a unique form as follows;

$$x = a_m k^m + a_{m-1} k^{m-1} + \ldots + a_2k^2 + a_1k + a_0$$

Where a_t is a positive integer such that $0 \le a_t < k$ and $a_m \ne 0$.

إذا كان k عدداً صحيحاً أكبر من الواحد فإننا نستطيع كتابة أي عدد صحيح موجب بطريقة وحيدة على الصورة:

$$x = a_m k^m + a_{m-1} k^{m-1} + \ldots + a_2k^2 + a_1k + a_0$$

علماً بأن المعاملات a_t تأخذ قيماً صحيحة بين العددين 0 و $k-1$ و $a_m \ne 0$.

Proof: By using the *Division Algorithm*, we will get two integer numbers q_1 and a_0 satisfies the following relation:

$$x = q_1k + a_0 \quad ; \quad 0 \le a_0 < k.$$

If $q_1 \ge k$, then we can using the *Division Algorithm* second time and will get two integer numbers q_2 and a_1 satisfies the following relation:

$$q_1 = q_2k + a_1 \quad ; \quad 0 \le a_1 < k.$$

Implies, $x = (q_2k + a_1) k + a_0$.

By repeating this method m- time, we will get two integer numbers q_m and a_{m-1} such that;

$$q_{m-1} = q_mk + a_{m-1} \quad ; \quad 0 \le a_{m-1} < k.$$

Since $q_1 > q_2 > \ldots > 0$, then we will arrive to the step that $q_m < k$, then we stop and put $a_m = q_m$.

Hence, $x = a_m k^m + a_{m-1} k^{m-1} + \ldots + a_2k^2 + a_1k + a_0$.

<u>ملاحظة:</u>

لغرض التمييز بين التمثيل بأساسات مختلفة فإننا نكتب $(a_ma_{m-1}\ldots a_1a_0)_k$ لتعني $a_m k^m + a_{m-1} k^{m-1} + \ldots + a_1k + a_0$.

Example 6.9: Write the number 37 as a base k =2.

أكتب العدد 37 للاساس 2

Solution: $37 = 2(18) + 1 \quad ; \quad q_1 = 18 > k.$

$18 = 2(9) + 0 \quad ; \quad q_2 = 9 > k.$

$9 = 2(4) + 1 \quad ; \quad q_3 = 4 > k.$

$4 = 2(2) + 0 \quad ; \quad q_4 = 2 \geq k.$

$2 = 2(1) + 0 \quad ; \quad q_5 = 1 < k.$

Then we put $q_5 = a_5$ and will get;

$37 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= (100101)_2.$

Example 6.10: Write the number 61469 as a base k =16.

أكتب العدد 37 للاساس 16

Solution: $61469 = 16(3841) + 13$

$3841 = 16(240) + 1$

$240 = 16(15) + 0$

$61469 = 15(16^3) + 0(16^2) + 1(16) + 13$

$= (15000113)_{16}$

القاسم المشترك الأعظم Greatest Common Divisor:

إن من أهم المفاهيم المتعلقة بقابلية القسمة مفهوم القاسم المشترك الأعظم.

Definition 6.11: Let a and b be two integer numbers, no both are zero. The integer number d is called ***greatest common divisor*** to a and b, denoted by $d = (a, b)$, if the following conditions hold;

(1) $d > 0$.

(2) $d \mid a$ and $d \mid b$.

(3) if $c \mid a$ and $c \mid b$ with $c > 0$ then $c \le d$.

Example 6.12: (25, 15)= 5.

(9, 6)= 3.

(27, 41)= 1.

(12, 16)= 4.

(12, 18)= 6.

(24, 40)= 8.

(24, 36)= 12.

ملاحظة (1):

مسألة وجود القاسم المشترك الأعظم لعددين أو أكثر يتحدد من خلال ما يلي:

لما كان a و b ليس كلاهما صفراً فلنفرض جدلاً أن $b \neq 0$ وكان c/b فإن: $|c| \le |b|$. إذن مجموعة قواسم العدد b الموجبة تحوي عدداً منتهياً من العناصر يقل عن $|b|$.

إن مجموعة القواسم المشتركة الموجبة للعددين a و b هي تقاطع مجموعة قواسم العدد a الموجبة مع مجموعة قواسم العدد b الموجبة، أي انها مجموعة جزئية من المجموعة المنتهية للقواسم الموجبة للعدد b وبالتالي فإنها مجموعة منتهية وتحتوي على عنصر أكبر هو القاسم المشترك الأعظم للعددين a و b.

ملاحظة (2):

أما وحدانية القاسم المشترك الأعظم فإننا نحصل عليها كما يلي:

Let

$$\left.\begin{array}{l} d_1 = (a,b) \\ d_2 = (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d_1 \le d_2 \\ d_2 \le d_1 \end{array}\right\} \Rightarrow d_1 = d_2$$

Theorem 6.13: For any two integer numbers a and b, no both are zero, there exist two integer numbers x_0 and y_0 such that;

$$(a, b) = ax_0 + by_0.$$

This statement is called ***Linear Combination*** تركيب خطي from a and b.

من هذه المبرهنة نستنتج أنه يمكننا كتابة $d = (a, b)$ على صورة تركيب خطي للعددين a، b. أي أنه يوجد عددان x_0 ، y_0 بحيث أن:

$d = ax_0 + by_0$

ويجب أن نلاحظ أيضاً أن العددين x_0 ، y_0 ليسا وحيدين، فعلى سبيل المثال إن :

$3 = (15, 24)$ وإن:

$3 = 15(-3) + 24(2)$
$\quad = 15(-27) + 24(17)$

وبصورة عامة إذا كان: $d = ax_0 + by_0$ فإن:

$$d = a(x_0 + k\frac{b}{d}) + b(y_0 - k\frac{a}{d});\ k \in \mathbb{Z}$$

Corollary 6.14: If $d = (a, b)$, $c \mid a$ and $c \mid b$ then $c \mid d$.

Proof: By Theorem 6.13, there exist two integer numbers x_0 and y_0 such that;

$$d = (a, b) = ax_0 + by_0.$$

$c \mid a$ and $c \mid b$ then from Theorem 6.2, part (i), we get $c \mid d$.

الآن يأتي السؤال التالي: كيف نجد القاسم المشترك الأعظم لعددين؟

إحدى الطرق هي ما يسمى بخوارزمية إقليدس **(Euclidean Algorithm)** والتي نمهد لها بما يلي:

Lemma 6.15: If $b = qa + r$ then $(a, b) = (a, r)$.

Lemma 6.16: For any two integer numbers a and b, no both are zero, the following statements are hold;

(i) $(a, b) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b)$.
(ii) If $a > 0$, then $(a, 0) = a$.

Theorem 6.17: (Euclidean Algorithm)

If a and b are two integer numbers, such that $b \geq a > 0$, by using the *Division Algorithm* we get that;

$$\begin{array}{ll}
b = aq_1 + r_1 & ; \quad 0 < r_1 < a \\
a = r_1q_2 + r_2 & ; \quad 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 = r_2q_3 + r_3 & ; \quad 0 < r_3 < r_2 \\
\quad \vdots & \quad \vdots \\
r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n & ; \quad 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} = r_nq_{n+1} + 0 & ; \quad r_{n+1} = 0.
\end{array}$$

Then $(a, b) = r_n$.

Proof: From the algorithm that describe in this theorem, we get $a > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_n > r_{n+1}$. And since r_i is integer number for each I, then there exist n such that $r_{n+1} = 0$. Therefore, by using the above two lemmas we get;

$(b, a) = (a, r_1) = (r_1, r_2) = \ldots = (r_n, r_{n+1}) = (r_n, 0) = r_n$.

ملاحظة:

علاوة على إيجاد القاسم المشترك الأعظم لعددين a و b فإن خوارزمية إقليدس تستخدم أيضاً لايجاد x و y المرتبطين بالمساواة:

$$(a, b) = ax + by$$

ويتم ذلك كما يلي:

بما أن : $d = r_n$ فإن:

$$d = r_{n-2} - q_n r_{n-1} = r_{n-2} - q_n(r_{n-3} - q_{n-1} r_{n-2})$$
$$= r_{n-2}(1 + q_n q_{n-1}) - r_{n-3} q_n.$$

وبالتعويض عن r_{n-2} بالقيمة $r_{n-4} - q_{n-2} r_{n-3}$ وبالاستمرار بالاسلوب نفسه نحصل في النهاية على x و y بحيث أن: $d = ax + by$.

Example 6.18:

Find (6755, 1587645) and the two numbers x and y that satisfies (6755, 1587645) = 6755x + 1587645y.

***Solution*:**

1587645 = **6755**(235) + **220**
6755 = **220**(30) + 155
220 = 155(1) + 65
155 = 65(2) + 25
65 = 25(2) + 15
25 = 15(1) + 10
15 = 10(1) + **5**
10 = 5(2) + 0
Therefore, d = (6755, 1587645) = **5**.

من الخطوة قبل الأخيرة أعلاه وبالمرور على خطوات الخوارزمية بصورة عكسية نحصل على:

$$
\begin{aligned}
5 &= 15 - 10(1) \\
&= 15 - (25 - 15(1)) \\
&= 2(15) - 25 \\
&= 2(65 - 2(25)) - 25 \\
&= 2(65) - 5(25) \\
&= 2(65) - 5(155 - 2(65)) \\
&= 2(65) - 5(155) + 10(65) \\
&= 12(65) - 5(155) \\
&= 12(220 - 1(155)) - 5(155) \\
&= 12(220) - 17(155) \\
&= 12(220) - 17(6755 - 30(220)) \\
&= 12(220) - 17(6755) + 510(220) \\
&= 522(220) - 17(6755) \\
&= 522(1587645 - 235(6755)) - 17(6755) \\
&= 522(1587645) - 122687(6755)
\end{aligned}
$$

ومنه نجد: $x = -122687$ و $y = 522$.

Example 6.19:

(i) Find (360, 2250) and the two numbers x and y that satisfies (360, 2250) = $360x + 2250y$.

(ii) Find (41628, 2454) and the two numbers x and y that satisfies (41628, 2454) = $41628x + 2454y$.

Definition 6.20: Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are non-zero integer numbers. The integer number m is called the (***Least Common Multiple***) to $a_1, a_2, \ldots, a_n$ and denoted by $m = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ if the following conditions are hold;
(i) $m > 0$.
(ii) $a_i \mid m$ for each i; $1 \le i \le n$.
(iii) If $a_i \mid c$, for each i where $1 \le i \le n$, and $c > 0$ then $m \le c$.

ملاحظة:
بما أن مجموعة مضاعفات الاعداد $a_1, a_2, \ldots, a_n$ هي مجموعة جزئية غير خالية من الاعداد الصحيحة الموجبة فإن مبدأ الترتيب الحسن يضمن لنا وجود عدد أصغر وحيد في هذه المجموعة وهذا العدد هو المضاعف المشترك الأصغر.

المبرهنة الآتية تعطينا طريقة لحساب المضاعف المشترك الأصغر لعددين إذا علم القاسم المشترك الأعظم لهما.

Theorem 6.21: If $a > 0$ and $b > 0$ then $(a, b)\,[a, b] = ab$.

البرهان:

بإفتراض أن : $d = (a,b)$ وأن $m = \dfrac{ab}{d}$

فإنه يوجد عددان r و s بحيث أن:

$a = dr \;,\; b = ds \;\Rightarrow\; m = as = rb$

إذا كان : $a \mid c$ و $b \mid c$ فإنه يوجد عددان u و t بحيث إن : $c = a\,u = bt$

وبما أن : $d = (a,b)$ فإنه يوجد عددان x و y بحيث إن: $d = ax + by$ وعليه فإن:

$$\frac{c}{m} = \frac{cd}{ab} = \frac{c(ax + by)}{ab} = \frac{c}{b}x + \frac{c}{a}y = tx + uy$$

ومنه نجد أن: $m \mid c$ أي أن : $m \le c$. ونكون برهنا على أن $m = [a,b]$.

Corollary 6.22: $ab = [a, b]$ if and only if $(a,b) = 1$.

البرهان ينتج مباشرة من مبرهنة (6.21).

ملاحظة:

الصيغة التي وردت في المبرهنة (6.21) غير صالحة لأكثر من عددين. بمعنى آخر:

$(a,b,c)[a,b,c] \neq abc$

كما في المثال

$[6, 10, 15] = 30 \quad , \quad (6, 10, 15) = 1$

$(6, 10, 15)[6, 10, 15] = 30 \neq 900 = 6 \times 10 \times 15.$

Theorem 6.23: If $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are non-zero integer numbers. Then $[a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-2},[a_{n-1},a_n]]$.

Exercise

1. Prove that every odd integer number is either in the form $6k+1$, $6k+3$ or $6k+5$ where $k \in \mathbb{Z}$.
2. Find (3799, 7337) and [3799, 7337].
3. Find [7, 11, 13] and [6, 10, 14].
4. Find (198,283,512). So find x, y and z such that: $(198,283,512) = 198x + 283y + 512z$.
5. Find $d > 0$ where $d \mid 18$, $8 \nmid 12$, $d \nmid 12$ and $10 \nmid \frac{36}{d}$.
6. Prove that; $2 \mid n^2 + n$ for every integer number n.
7. Prove that; $7 \mid 2^{3n} - 1$ for every integer number $n \geq 1$.
8. Prove that; $m(a, b) = (ma, mb)$ for every integer $n \geq 1$.
9. Prove that $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$.

Linear Diophantine Equations المعادلات الديوفنتية الخطية

تعتبر دراسة المعادلات الديوفنتية من أقدم فروع الرياضيات وذلك لان الإنسان اكتشف الاعداد الصحيحة قبل اكتشافه بقية الاعداد بفترة طويلة وكذلك فإن المعادلات الديوفنتية استخدمت لحل بعض الألغاز ذات الطبيعية الرياضياتية.

بالرغم من إرجاع فضل حل المعادلات الديوفنتية بطريقة عامة الى ديوفانتس إلا أنه لم يعط في الحقيقة حلاً عاماً لها، لأنه كان في معظم الأحيان يكتفي بإيجاد حل واحد للمعادلة، فضلاً على أنه لم يستخدم الأعداد الصحيحة السالبة وكان يستخدم طرائق خاصة بحيث يصعب على القارىء ان يتبناها لحل معادلة مشابهة. والحقيقة أن أول من وضع حلاً عاماً للمعادلات الديوفنتية الخطية بمجهولين هو العالم الهندي اريابهاتا الذي ولد عام 476 قبل الميلاد بطريقة تسمى الطريقة الساحقة (Pulverizer Method). ولقد وضع العالم الفرنسي باشيه (Bachet) الذي عاش في الفترة من 1581 الى 1638 ميلادي والذي لم يكن على علم بطريقة اريابهاتا الحل العام للمعادلة الديوفنتية الخطية. والحقيقة إن هذه الحلول استخدمت خوارزمية القسمة.

السؤال الآن: ما هي المعادلة الديوفنتية؟ لنتأمل المسألة الاتية:

يوجد في ناد للفروسية عدد من الفرسان وعدد فردي من الخيول، إذا علمنا أن مجموع عدد قوائم الخيول وعدد أرجل الفرسان هو عشرون. فما هو عدد الخيول الموجودة؟

لنفرض أن x هو عدد الخيول و y هو عدد الفرسان. إذن

$$4x + 2y = 20 \quad ; \quad x \in \mathbb{Z}^{O}, y \in \mathbb{Z}.$$

Theorem 6.24: The *Linear Diophantine Equations* $ax + by = c$ has a solution if and only if $(a, b) = d$ and $d | c$.

يوجد حل للمعادلة الديوفنتية الخطية: $ax + by = c$ إذا وإذا فقط كان : $(a, b) = d$ يقسم العدد c.

البرهان:

ليكن $d | c$. عندئذ توجد أعداد صحيحة k ، m ، n بحيث إن:

$c = kd$ وإن : $d = am + bn$ وبضرب طرفي المعادلة بالعدد k نجد:

$$a(mk) + b(nk) = dk = c$$

ولبرهان العكس نفرض أن x_0 و y_0 حل للمعادلة. وهذا يؤدي إلى أن : $ax_0 + by_0 = c$.

وبما أن: $d | a$ و $d | b$ فإن: $d | (ax_0 + by_0)$ أي أن : $d | c$.

ملاحظة:

إن المبرهنة (8) بالاضافة الى خوارزمية إقليدس تزودنا بطريقة عملية لإيجاد حل للمعادلة: $ax + by = c$. وبالتحديد فإننا نلجأ إلى إيجاد $(a,b) = d$ أولاً ثم نكتبه كتركيب خطي للعددين a و b ثم نضرب بعدد مناسب (نجده من قسمة c على d).

<u>Example 6.25:</u> Find a solution for the *Linear Diophantine Equations* $56x + 72y = 40$.
Solution:

نبحث عن (56,72) بواسطة خوارزمية القسمة فنجد :

$72 = 56(1) + 16$
$56 = 16(3) + 8$
$16 = 8(2) + 0$

ومنه نجد أن: $8 = (56,72)$ يقسم العدد 40. الآن نضع 8 على صورة تركيب خطي للعددين 72 و 56 فنجد:

$$\begin{aligned} 8 &= 56 - 3 \times 16 \\ &= 56 - 3\,(72 - 1 \times 56) \\ &= 4 \times 56 + (-3)\,72 \end{aligned}$$

وبضرب طرفي المعادلة بالعدد 5 نجد:

$$56\,(20) + 72\,(-15) = 40$$

وبالتالي فإن:

$x_0 = 20 \quad ; \quad y_0 = -15$ حلاً للمعادلة.

<u>ملاحظة:</u>

إن مسالة إيجاد جميع الحلول للمعادلة الديوفنتية تختلف تماماً عن مسألة إيجاد بعض الحلول للمعادلة، فمثلاً المعادلة: $x^3 + y^3 = z^3 + w^3$ لها حل يكتب على الشكل:

$x = 1 - (s - 3t)(s - 3t)(s^2 + 3t^2)$

$y = -1 + (s + 3t)(s^2 + 3t^2)$

$z = s + 3t - (s^2 + 3t^2)^2$

$w = -s + 3t + (s^2 + 3t^2)^2 \quad ; t, s \in \mathbb{Z}.$

ولكن هذا لا يعني أن كل حل للمعادلة السابقة يمكن أن يكتب على هذه الصورة. بيد أنه في حالة المعادلة الديوفنتية الخطية فإننا نستطيع إيجاد الحل العام لها وهذا ما توضحه المبرهنة الآتية.

<u>Theorem 6.26:</u> Let $(a, b) = d$ and $d \mid c$. If x_0 and y_0 is a solution for the equation $ax + by = c$, then the general solution for the equation will be in the form;

$$x = x_0 + k\left(\frac{b}{d}\right)$$

$$y = y_0 - k\left(\frac{a}{d}\right) \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

<u>البرهان:</u>

سنبرهن أولاً على أن : $x_0 + k(b/d)$ و $y_0 - k(a/d)$ حل للمعادلة لكل قيم k الصحيحة. بالتعويض المباشر في المعادلة نحصل على المساواة:

$$\begin{aligned} ax + by &= a(x_0 + k(b/d)) + b(y_0 - k(a/d)) \\ &= ax_0 + by_0 + k(ab/d) - k(ab/d) \\ &= ax_0 + by_0 = c \end{aligned}$$

والآن نبرهن على أن أي حل للمعادلة يكون على الصورة أعلاه.

إذا كان x_1 و y_1 حلاً آخر للمعادلة فإن:

$$ax_1 + by_1 = c = ax_0 + by_0 \Rightarrow a(x_1 - x_0) = -b(y_1 - y_0)$$

وبما أن : $(a,b) = d$ فإن : $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$ وهذا يعني إننا نستطيع أن نجد عددين صحيحين أوليين نسبياً r و s بحيث إن : $a = rd$ و $b = sd$. وبالتعويض في المعادلة الأخيرة وقسمة طرفيها على العدد d نجد:

$$r(x_1 - x_0) = -s(y_1 - y_0) \qquad \ldots(1)$$

من معادلة (1) نجد: $s \mid r(x_1 - x_0)$

وبما أن: $(r, s) = 1$ فإننا نستنتج $s \mid (x_1 - x_0)$

أي أن : $x_1 - x_0 = ks$ حيث $k \in \mathbb{Z}$. وبالتعويض عن $x_1 - x_0$ بـ ks في المعادلة (1) نحصل على المساواة : $y_1 - y_0 = -kr$.

وبالتالي فإن :

$$x = x_0 + k\left(\frac{b}{d}\right)$$

$$y = y_0 - k\left(\frac{a}{d}\right) \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Example 6.27: Find the general solution for the *Linear Diophantine Equations* $56x + 72y = 40$.

جد الحل العام للمعادلة الديوفنتية $\mathbf{56x + 72y = 40}$

الحل: لقد وجدنا في المثال (6.25) أن : $x_0 = 20$ و $y_0 = -15$ حل للمعادلة.

باستخدام مبرهنة (6.26) نجد أن الحل العام:

$x = 20 + (72/8)k = 20 + 9k$

$y = -15 - (56/8)k = -15 - 7k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$.

ملاحظة: في كثير من المسائل التطبيقية التي تستخدم المعادلات الديوفنتية يكون اهتمامنا منصباً على إيجاد قيم صحيحة موجبة للمجاهيل. فبالنسبة للمعادلة:

$ax + by = c$

باستخدام مبرهنة (6.26) يجب أن يكون:

$x_0 + (b \mid d)k > 0$

$y_0 - (a \mid d)k > 0$

Example 6.28: Find all solutions for the *Linear Diophantine Equations* $54x + 21y = 906$.

الحل: نستخدم خوارزمية إقليدس لايجاد (54, 21) كما يلي:

$\mathbf{54 = 2 \times 21 + 12}$

$\mathbf{21 = 1 \times 12 + 9}$

$\mathbf{12 = 1 \times 9 + 3}$

$\mathbf{9 = 3 \times 3 + 0}$

إذن : 3 = (54, 21) ويقسم العدد 906.

إذا وضعنا العدد 3 على صورة تركيب خطي للعددين 21 و 54 نجد :

$\mathbf{3 = 54 \times 2 + 21(-5)}$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة بالعدد 302 نحصل على المساواة:

$\mathbf{906 = 54(604) + 21(-1510)}$

ومنه نستنتج أن : $x_0 = 604$ **و** $y_0 = -1510$ **حل للمعادلة.**

إذن جميع الحلول يجب أن تكون على الصورة:

$\mathbf{x = 604 + 7k \quad ; \quad y = -1510 - 18k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}}$

ولايجاد الحلول الموجبة الصحيحة نضع:

$\mathbf{604 + 7k > 0 \quad ; \quad -1510 - 18k > 0}$

وبحل المتباينتين نجد أن:

$$k > -86\frac{2}{7} \quad ; \quad k < -83\frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow -86\frac{2}{7} < k < -83\frac{8}{9}$$

ومنهُ نجد أن k **يأخذ القيم الصحيحة 86 –, 85 –, 84 – وهذه القيم سوف تعطينا جميع الحلول الموجبة وهي:**

(2, 28) ; (9, 20) ; (16, 2).

Exercise

جد جميع حلول كل من المعادلات الديوفنتية الآتية:

(1) $5x + 6y = 17$

(2) $20x + 50y = 510$

(3) $172x + 20y = 1000$

جد جميع الحلول الصحيحة لكلٍ مما يأتي:

(1) $60x + 18y = 97$

(2) $5x + 22y = 18$

(3) $12x + 510y = 274$

CHAPTER SEVEN

MATRICES

المصفوفـات

تُعد المصفوفة أداة رياضياتية ضرورية لدراسة مواضيع كثيرة و مختلفة في الرياضيات والعلوم الاخرى مثل الفيزياء والكيمياء والاقتصاد والحاسوب. وقد أصبح دراسة المصفوفات في السنوات الاخيرة جزءاً أساسياً من الخلفية الرياضياتية المطلوبة في دراسة العلوم الواردة آنفاً.

إن للمصفوفة ارتباط وثيق بمنظومة المعادلات الخطية حيث توجد مسائل كثيرة تؤدي دراستها الى منظومة المعادلات الخطية والتي تحتاج الى حلول، فمن خلال دراسة المصفوفات يمكن الحصول على هذه الحلول.

عادةً تُمثّل جبرياً معادلة المستقيم في المستوي $XY-$ بالصيغة:

$a_1x + b_1y = c$

إن معادلة من هذا النوع تسمى معادلة خطية بمتغيرين x و y.

تعريف (1):

المعادلة الخطية التي لها n من المتغيرات: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هي التي يمكن أن يعبر عنها بالصيغة:

$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$

حيث: $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ ثوابت تنتمي الى الحقل الحقيقي $\mathbb{R}$.

تعريف (2):

منظومة المعادلات الخطية أو المنظومة الخطية هي مجموعة من m من المعادلات الخطية التي لها n من المتغيرات ويمكن كتابتها بالشكل:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m$$

حيث أن a_{ij} ثوابت و $i = 1, 2, \ldots, m$ و $j = 1, 2, \ldots, n$ وأن متتابعةمن n من الاعداد $s_1, s_2, \ldots, s_n$ تسمى **حلاً للمنظومة** أعلاه إذا كان $x_1 = s_1$, و $x_2 = s_2$ و … و $x_n = s_n$ هو حل لكل معادلة من المنظومة.

ملاحظة:

إذا كان عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلات في المنظومة الخطية فنحصل على حل وحيد. أما إذا كان عدد المجاهيل أكثر من عدد المعادلات فإن للمنظومة عدد غير منته من الحلول.

تعريف (3):

المصفوفة هي ترتيب مستطيلي الشكل من أعداد حقيقية أو مركبة (عقدية) (Complelx) يطلق على هذه الاعداد في هذا الترتيب عناصر المصفوفة (Entries) وقد تكون عناصر المصفوفة مقادير غير عددية.

المصفوفة B التي لها m من السطور (Rows) و n من الاعمدة (Column's) وتكتب بالترتيب المستطيلي:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

يقال إنها ذات سعة $m \times n$. حيث يعني الدليل السفلي الأول (Subscript) i في العنصر b_{ij} رقم الصف أو السطر. والدليل السفلي الثاني j رقم العمود الذي يقع فيه ذلك العنصر.

توجد عدة أشكال لتمثيل المصفوفة B منها:

$$B = (b_{ij}) \qquad \text{OR} \qquad B = [b_{ij}]$$

ملاحظة:

ليس للمصفوفة قيمة عددية.

العمليات على المصفوفات:

تكون المصفوفتان $B = (b_{ij})$ و $A = (a_{ij})$ متساويتين إذا كانت سعتاهما متساويتين وأن: $a_{ij} = b_{ij}$. وهكذا فإن مصفوفتين تكونان متساويتين إذا كانت لهما السعة نفسها وكانت عناصرهما في المواقع المتناظرة المتطابقة.

(1) جمع مصفوفتين: يمكن جمع مصفوفتين إذا كانت سعتاهما متساويتين. وتتم عملية الجمع كالآتي:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = C$$

ملاحظة:

لا يمكن جمع مصفوفة:

من سعة 3×4 مع مصفوفة من سعة 4×3 ولا مع مصفوفة من سعة 6×4 مع مصفوفة من سعة 3×5 لان السعات مختلفات.

وبالمثل يعرف الطرح.

(2) ضرب مصفوفة بعدد: إذا كان k عدداً وكانت : $A = (a_{ij})$ مصفوفة سعة $m \times n$ فإن الضرب:

$$kA = (ka_{ij})$$

هو مصفوفة من سعة $m \times n$ أيضاً. أي ضرب مصفوفة بعدد يجب أن نضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة بـ k . يقال للعدد بأنه قياسي (Scalar).

(3) ضرب مصفوفتين: يمكن ضرب المصفوفتين $A = (a_{ij})$ سعة $m \times n$ و $B = (b_{ij})$ سعة $p \times q$ إذا كان عدد أعمدة A مساوياً لعدد أسطر B . أي $n = p$ ويكون ناتج الضرب هو المصفوفة:

$$C = (c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right) \qquad \text{سعة } m \times q$$

وهكذا لايجاد c_{ij} نضرب عناصر السطر في الموقع i في المصفوفة بالعناصر المقابلة في العمود في الموقع j من المصفوفة B ثم نجمع المضروبات.

مثال:

جد حاصل الضرب AB والضرب BA إذا علمت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\begin{array}{cc} m \times n & p \times q \\ 3 \times 2 & 2 \times 2 \end{array}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}(1)(1)+(-2)(-1) & (1)(4)+(-2)(2)\\ (2)(1)+(0)(-1) & (2)(4)+(0)(2)\\ (3)(1)+(5)(-1) & (3)(4)+(5)(2)\end{bmatrix}$$

$$3\times 2$$

$$m\times q$$

$$AB=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 8\\ -2 & 22\end{bmatrix}$$

سؤال: هل يمكن إجراء الضرب BA، ولماذا ؟

المبرهنة الاتية توضح الخواص الجبرية للمصفوفات.

مبرهنة (1):

إذا كانت سعات المصفوفات A و B و C تلائم العمليات ازاءها فإن الخواص الاتية على المصفوفات صحيحة:

(a) A + (B + C) = (A + B) + C الترتيب الجمعي

(b) A + B = B + A الابدال الجمعي

(c) k (A + B) = k A + k B التوزيع العددي

(d) A(BC) = (AB)C الترتيب الضربي

(e) A(B + C) = AB + AC التوزيع

حيث k أي عدد قياسي.

مثال:

إذا علمت أن

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad ; \quad B=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix} \quad ; \quad C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

حقق صحة قانون الترتيب الضربي:

(AB)C = A(BC)

الحل: نحسب الطرف الايسر: $(AB)C$

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&5\\20&13\\2&1\end{bmatrix}$$

$$(AB)C=\begin{bmatrix}8&5\\20&13\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18&15\\46&39\\4&3\end{bmatrix} \qquad ...(1)$$

ثم نحسب الطرف الايمن: $A(BC)$

$$BC=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&9\\4&3\end{bmatrix}$$

$$A(BC)=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10&9\\4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18&15\\46&39\\4&3\end{bmatrix} \qquad ...(2)$$

من (1) و (2) ينتج تحقيق قانون الترتيب الضربي.

تمارين

(1) إذا كان :

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad ; \quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

برهن أن:

$$(A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq$$
$$\neq A^2 + 2AB + B^2$$

(2) إذا كان :

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix} \quad ; \quad B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

جد حاصل الضرب AB. هل يمكن إيجاد BA ولماذا؟

(3) إذا علمت :

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\\ 4 & -3 & -1\end{bmatrix} \quad ; \quad B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 2\end{bmatrix} \quad ; \quad C=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & -2\\ 3 & -2 & -1 & -1\\ 2 & -5 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

أثبت أن : $AB = AC$. ماذا تستنتج من هذه المساواة؟

(4) إذا كان :

$$F=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \quad ; \quad E=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

جد EF و FE ثم أثبت أن:

$$E^2F + FE^2 = E$$

نماذج من المصفوفات المربعة Models of Square Matrices

سوف نستعرض بعض النماذج من المصفوفات المربعة وهي:

(1) إذا كانت جميع عناصر مصفوفة أصفاراً. تسمى تلك المصفوفة **بالمصفوفة الصفرية** (Zero Matrix or Null Matrix) وكذلك تسمى **مصفوفة المحايد الجمعي** ويرمز لها بـ O وتتضح سعتها من سياق العمليات.

(2) يقال للمصفوفة : $B = (b_{ij})$ سعة $m \times n$ بأنها **مصفوفة مربعة** (Square Matrix) سعة n عندما $m = n$ وان قطر المصفوفة المربعة والذي عناصره $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn}$ يسمى **بالقطر الرئيسي** (Main Diagonal) للمصفوفة.

(3) المصفوفة سعة $1 \times n$ تسمى **مصفوفة سطر** (Row Matrix).

(4) المصفوفة سعة $m \times 1$ تسمى **مصفوفة عمود** (Column Matrix).

(5) المصفوفة المربعة : $B = (b_{ij})$ سعة n تسمى **مصفوفة مثلثية سفلى** (Lower Triangular Matrix) إذا كان $b_{ij} = 0$ عندما $i < j$ وتسمى **مصفوفة مثلثية عليا** (Upper Triangular Matrix) إذا كان $b_{ij}= 0$ عندما $i > j$

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

مصفوفة مثلثية سفلى مصفوفة مثلثية عليا

بكلمة أخرى: تكون المصفوفة المربعة مصفوفة مثلثية عليا إذا كانت جميع العناصر التي تقع تحت القطر الرئيسي أصفار وتكون مثلثية سفلى إذا كانت جميع العناصر التي تقع فوق القطر الرئيسي أصفاراً.

(6) تسمى المصفوفة المربعة : $B = (b_{ij})$ سعة n **مصفوفة قطرية** (Diagonal Matrix) إذا كانت عناصرها غير الصفرية هي فقط b_{ii} حيث : $i = 1, 2, \ldots, n$ وبقية العناصر في تلك المصفوفة أصفار أي $b_{ij} = 0$ عندما $i \neq j$ ويكتب

$$\mathrm{diag}(b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn})$$

(7) المصفوفة القطرية : $\text{diag}(b,\ b,\ \ldots,\ b)$ ذات العناصر المتساوية تسمى **مصفوفة قياسية** (Scalar Matrix). فمثلاً المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

تمثل مصفوفة قياسية سعة 3.

(8) المصفوفة القطرية : $(1,1,\ldots,1)$ تسمى **مصفوفة المحايد الضربي** (Identity Matrix) ويرمز لها بالرمز I_n حيث الدليل n يمثل سعة المصفوفة المربعة. فمثلاً:

$$\mathrm{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ; \qquad \mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

إن لمصفوفة المحايد الضربي خواص مطابقة لبعض خواص الواحد كعدد صحيح.

مثال:

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ فإن:

$$\mathrm{I}_2\ A = A\ \mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_2\ A\ \mathrm{I}_3 = A$$

(تحقق من ذلك).

(9) إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين وتحققان العلاقة:

$$AB = BA$$

فيقال بانهما مصفوفتان قابلتان للابدال الضربي. وإذا حققت المصفوفتان A و B العلاقة

$$AB = -BA$$

يقال بأنهما ابداليتان عكسياً.

مثال:

لتكن: $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

حقق قانون الابدال الضربي.

الحل:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$$

هذا يعني أن : $AB = BA$ والمصفوفتان A و B ابداليتان.

(10) منقول المصفوفة (Transpose of Matrix)

لتكن A مصفوفة مربعة سعة $m \times n$. إذا وضعت سطور المصفوفة بشكل أعمدة بالترتيب. أي السطر الاول أخذ موضع عمود أول وهكذا فان المصفوفة الجديدة ذات السعة $n \times m$ الناتجة عن هذه العمليات تسمى **منقول المصفوفة** A ويرمز لها بـ A'.

أي أن العنصر في الموقع (a_{ij}) في المصفوفة A هو العنصر (a_{ji}) في المصفوفة A'.

مثال:

إذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

مبرهنة (2):

لتكن A مصفوفة سعة $m \times n$ و B مصفوفة سعة $n \times p$ فإن:

$$(AB)' = B'A'$$

(11) المصفوفة المتناظرة (Symmetric Matrix)

يقال لمصفوفة مربعة $A = (a_{ij})$ بأنها **متناظرة** إذا كان

$$A' = A$$

أي أن: $a_{ij} = a_{ji}$ وتسمى المصفوفة المربعة بأنها **متناظرة عكسياً** إذا كان:

$$A' = -A$$

أي أن: $a_{ij} = -a_{ji}$.

مثال :

هل المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ متناظرة ؟

الحل:

منقول المصفوفة هو

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = A$$

$\therefore$ A مصفوفة متناظرة.

مثال :

بيّن إن المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ متناظرة عكسياً ؟

الحل:

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = -B$$

$\therefore$ B مصفوفة متناظرة عكسياً.

(12) المصفوفة المتعامدة (Orthogonal Matrix)

يقال لمصفوفة مربعة A بأنها **متعامدة** إذا تحقق

$$AA' = A'A = 1$$

مثال :

بيّن أن المصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

متعامدة.

الحل:

$$AA'=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=1$$

المحددات Determinants

يقابل كل مصفوفة مربعة A على الحقل F عدد يسمى محدد A. ويرمز له عادةً بـ det(A) أو |A|.

لقد ظهرت فكرة المحددات لأول مرة عند حل منظومة معادلات خطية. ولها أهمية كبيرة واداة لا غنى عنها في العديد من مواضيع الجبر الخطي و مواضيع اخرى في الرياضيات والعلوم الاخرى كالفيزياء والهندسة وعلوم الحاسوب ... الخ.

سنقدم طريقتين بسيطتين لحساب محددات المصفوفات من سعة 2×2 و 3×3:

(1) محدد المصفوفة A من سعة 2×2 يمكن الحصول عليه بضرب عناصر القطر الرئيسي (الايسر) ثم نطرح حاصل ضرب عناصر القطر الايمن كما يلي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

فمثلاً:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\times5-(-3)\times4 = 22$$

(2) محدد المصفوفة A من سعة 3×3 يمكن الحصول عليه بالشكل الآتي:

نعيد كتابة العمود الاول والعمود الثاني للمصفوفة A كما موضح

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

ثم نجمع حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي مع حاصل ضرب العناصر على الخطين الموازيين للقطر الرئيسي. ثم نطرح منها حاصل ضرب العناصر عل القطر الآخر وحاصل ضرب العناصر على الخطين الموازيين له. كما موضح في الشكل أعلاه. هذه الطريقة تسمى **بطريقة ساروس**.

$$\begin{aligned} |\mathrm{A}| &= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} \\ &\quad - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} \end{aligned}$$

ملاحظة :

لابد من التأكيد هنا (طريقة ساروس) إنه في حالة $n \geq 4$ لا توجد طريقة بسيطة لايجاد $|A|$.

مثال (1):

أوجد محدد المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

$|A| = 1 \times 1 \times 2 + 2 \times 3 \times 3 + 3 \times 2 \times 1 - 1 \times 3 \times 1 - 2 \times 2 \times 2 - 3 \times 1 \times 3$

$= 2 + 18 + 6 - 3 - 8 - 9$

$= 6$

تمارين

(1) استعمل طريقة ساروس لحساب المحددات الاتية:

$$(a)\ \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad ; \quad (b)\ \begin{vmatrix} k & -3 & 9 \\ 2 & 4 & k+1 \\ 1 & k^2 & 3 \end{vmatrix}$$

(2) جد جميع قيم λ عندما يكون: $|A| = 0$

$$(a)\ \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda-4 \end{bmatrix} \quad ; \quad (b)\ \begin{bmatrix} \lambda-6 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & \lambda-4 \end{bmatrix}$$

خواص المحددات :

(1) مبرهنة (1) :

إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن: $|A| = |A'|$

مثال (2) :

المصفوفة A من المثال (1) منقولها هي المصفوفة:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A'| = 1 \times 1 \times 2 + 2 \times 1 \times 3 + 3 \times 2 \times 3 - 1 \times 1 \times 3 - 2 \times 2 \times 2 - 3 \times 1 \times 3$$
$$= 6$$

إذن:

$$|A'| = 6 = |A|$$

هذه المبرهنة تجعلنا قادرين على تبديل (سطر) بـ (عمود) عند دراستنا خواص المحددات الأخرى وبذلك نصل الى النتيجة الاتية:

مبرهنة (2) :

لتكن B مصفوفة ناتجة من المصفوفة المربعة A بالمبادلة بين سطرين (عمودين) من A عندئذٍ:

$$|B| = -|A|$$

مبرهنة (3) :

إذا تساوى سطران (عمودان) في مصفوفة مربعة A . فإن : $|A| = 0$.

مبرهنة (4) :

إذا كان كل عنصر من سطر (عمود) في مصفوفة مربعة A يساوي صفراً.

فإن: $|A| = 0$.

مبرهنة (5) :

لتكن A مصفوفة مربعة. فإن:

(أ) إذا كانت المصفوفة B ناتجة من مضروب سطر (عمود) واحد في المصفوفة A بعدد ثابت k . فإن:

$$|B| = k\,|A|$$

(ب) إذا كانت المصفوفة B ناتجة من إضافة مضروب أحد السطور (الاعمدة) في A بثابت وإضافته الى سطر (عمود) آخر. فإن:

$$|A| = |B|$$

مثال (3) :

إذا كان :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & -12 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & -11 & 15 \end{bmatrix}$$

فإن محدد المصفوفات كما يلي:

$$|A| = -71 \quad , \quad |B| = -213 \quad , \quad |C| = -71.$$

لاحظ إن المصفوفة B ناتجة من ضرب السطر الثاني للمصفوفة A بالعدد 3 والمصفوفة C ناتجة من ضرب السطر الثاني للمصفوفة A بـ (4 −) وإضافته للسطر الثالث. إذن:

$$|B| = 3|A| \quad ; \quad |C| = |A|$$

مبرهنة (6) :

لتكن A مصفوفة مثلثة سعة $n \times n$ فإن:

$$|A| = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \ldots a_{nn}$$

مثال (4) :

استخدم خواص المحددات لتحويل المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -2 \\ 3 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

إلى مصفوفة مثلثية عليا. ثم احسب محددها.

الحل :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -2 \\ 3 & 6 & -4 \end{bmatrix} \qquad -2r_1 + r_2 \to r_2$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -4 \end{bmatrix} \qquad -3r_1 + r_3 \to r_3$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = A$$

وهذه المصفوفة مثلثية عليا سعة 3×3.

إذن باستعمال المبرهنة (6) نحصل على :

$$|A| = 1 \times 2 \times 5 = 10$$

ملاحظة :

الحل الذي ورد في المثال (4) يمثل طريقة أخرى لحساب محدد مصفوفة.

مبرهنة (7) :

إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين لهما السعة نفسها فإن :

$$|A\,B| = |A|\cdot|B|$$

ملاحظة :

إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين لهما السعة نفسها فإن :

$$|A+B| \neq |A| + |B|$$

تمارين

(1) احسب المحددات مستعملاً خواص المحددات:

(أ) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$　　**(ب)** $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

(2) بيّن أن : $|AB| = |A|\,|B|$ لكلٍ مما يأتي:

(أ) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$　　$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(ب) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$　　$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(3) إذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

أثبت أن: $|A| = |A|^3$

(4) إذا كانت : $|AB| = 0$ أثبت أن :$|A| = 0$ أو $|B| = 0$ علماً أن A و B مصفوفتان مربعتان لهما السعة نفسها.

(5) هل أن : $|BA| = |AB|$ ؟ أعط مثال.

(6) برهن على أن لأي مصفوفتين مربعتين A و B لهما السعة نفسها أن :
$|A'B'| = |A||B'| = |A'||B|$

النشر بالعامل المرافق وتطبيقات :

شرحنا سابقاً طريقتين لحساب المحددات للمصفوفات من سعة 2×2 و 3×3 والآن سنقدم طريقة أخرى لحساب محدد مصفوفة من سعة $n \times n$ والتي تقوم على أساس حساب محدد مصفوفة أقل سعة من المصفوفة الاصلية أي سعة $(n-1) \times (n-1)$ ثم تعاد هذه العملية عدة مرات حتى نحصل على مصفوفة سعة 2×2.

تعريف (1) :

لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة سعة $n \times n$. وإن M_{ij} مصفوفة جزئية من A سعة $(n-1) \times (n-1)$ والناتجة من حذف السطر في الموقع i والعمود في الموقع j من المصفوفة A. يسمى محد المصفوفة الجزئية M_{ij} **مُصّغِر** (Minor) العنصر a_{ij} من A. ويعّرف **العامل المرافق** (Cofactor) للعنصر a_{ij} والذي يرمز له A_{ij} على أنه:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \mid M_{ij} \mid$$

لاحظ إن الاشارات $(-1)^{i+j}$ ترد بشكل متناوب وان اشارات القطر الرئيسي موجبة دائماً كما يتضح في الشكل الآتي:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots & - \\ - & + & - & \cdots & + \\ + & - & + & \cdots & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ - & + & - & \cdots & + \end{bmatrix}$$

محدد المصفوفة سعة 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

الذي أعطيناه بطريقة ساروس كما يلي:

$$\mid A \mid = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$$

يمكن إعادة كتابته بالشكل:

$$\mid A \mid = a_{11}(a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}) + a_{12}(a_{23}\, a_{31} - a_{22}\, a_{33}) + a_{13}(a_{21}\, a_{23} - a_{22}\, a_{31}) \quad \ldots(1)$$

ولما كانت هذه الاقواس تؤلف مرافقات المعامل الذي خارجها لذلك يمكن إعادة كتابته نشر المحدد الثلاثي:

$$\mid A \mid = a_{11}A_{11} + a_{21}\, A_{21} + a_{31}\, A_{31} \quad \ldots(2)$$

وهذه تؤلف حاصل ضرب عناصر العمود الأول في مرافقاتها.

ملاحظة (1) :

يمكن إعادة كتابة نشر $|A|$ بحيث تؤلف حاصل ضرب عناصر أي عمود آخر أو أي سطر في مرافقاتها.

مثال (1) :

لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

جد $|A|$ بدلالة عناصر السطر الاول.

الحل :

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3\,(8 - 12) - (4 - 15) + 0 = -1$$

ملاحظة (2) :

من ملاحظة (1) يمكن أن نحصل على ترتيبات مناسبة لكتابة المعادلة (2) لنشر $|A|$ كما يلي:

النشر بالنسبة لعناصر السطر الأول $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

النشر بالنسبة لعناصر العمود الثاني $= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$

النشر بالنسبة لعناصر العمود الأول $= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

وهكذا ...

يطلق على هذه المعادلات **النشر بالمرافق** لـ $|A|$.

يمكن تعميم طريقة النشر بالمرافق لمحدد المصفوفة سعة 3×3 على محدد سعة $n \times n$ كما في المبرهنة الاتية:

مبرهنة (1) :

لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة سعة $n \times n$ عندئذٍ:

النشر بالنسبة للسطر $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$

النشر بالنسبة للعمود $|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$

مثال (2) :

احسب محدد المصفوفة الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

لاحظ ان أفضل طريقة للنشر تتم بدلالة السطر أو العمود الذي يحتوي أكبر عدد من الاصفار. فإذا كان $aij = 0$ ففي هذه الحالة لا نحتاج الى حساب A_{ij} .
ننشر بواسطة السطر الثالث وعلى الطالب أن يقوم بالنشر بواسطة العمود الثاني كتمرين.

$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34}$

$$= 3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \times A_{32} + 0 \times A_{33} + (-3)(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

ننشر A_{31} بدلالة العمود الأول. نحصل على:

$$A_{31} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 0(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(1)(9) + (2)(-1)(-1) = 20$$

ننشر A_{34} بدلالة السطر الثالث. نحصل على:

$$A_{34} = 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(1)(8) + (-2)(1)(10) = -4.$$

إذن: $|A| = (3)(1)(20) + (-3)(-1)(-4) = 48$

تعريف (2) :

لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة سعة $n \times n$. منقول مصفوفة العوامل المرافقة للعناصر a_{ij} في A والذي يرمز له بـ adj(A) يسمى **مصاحب A** (Adjoint A). أي أن:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

أي أن :

$$(A_{ij})' = \text{adj}(A)$$

مثال (3) :

لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

أوجد adj(A).

الحل:

من تعريف (2) مصاحب A سعة 3×3 هي المصفوفة:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -18$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 17$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 28$$

إذن:

$$\mathrm{adj(A)} = \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix}$$

مبرهنة (2) :

لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة سعة $n \times n$. فإن:

$$A \cdot \mathrm{adj(A)} = \mathrm{adj(A)} \cdot A = |A|\ I_n$$

نتيجة :

لتكن A مصفوفة مربعة وان $|A| \neq 0$ فإن:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{adj(A)}$$

مثال (4) :

جد معكوس المصفوفة A في المثال (3)

الحل:

نلاحظ من هذه المصفوفة إن: $|A| = -94$ وباستعمال نتيجة المبرهنة (2) نجد أن:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{adj(A)} = \begin{bmatrix} \frac{18}{94} & \frac{6}{94} & \frac{10}{94} \\ \frac{-17}{94} & \frac{10}{94} & \frac{1}{94} \\ \frac{6}{94} & \frac{2}{94} & \frac{28}{94} \end{bmatrix}$$

ملاحظة :

الطريقة التي وردت هنا لايجاد معكوس المصفوفة المربعة ليست الطريقة الوحيدة حيث توجد طرق أخرى أكثر تعقيداً وهي ليست موضوع دراستنا الان.

قاعدة كرامر Gramer's Rule

نفرض:

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1$
$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2$
$\vdots$
$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = b_n$

منظومة معادلات تحتوي على n من المجاهيل. يمكن التعبير عنها بالمعادلة

$$AX = B$$

حيث A مصفوفة المعاملات ، X مصفوفة المجاهيل و B مصفوفة الحدود المطلقة.

مبرهنة (قاعدة كرامر) (3) :

لتكن $AX = B$ منظومة من n من المعادلات الخطية لها n من المجاهيل بحيث أن: $|A| \neq 0$ عندئذٍ يكون للمنظومة حل وحيد هو:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \quad , \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \quad , \quad \ldots \quad , \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

حيث A_j مصفوفة ناتجة من إحلال عناصر المصفوفة B محل العمود في الموقع j في المصفوفة الأصلية A.

مثال (5) :

استعمل قاعدة كرامر لحل منظومة المعادلات الآتية:

$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$
$$-2x_1 - x_2 + x_3 = -3$$

الحل:

أولاً : نجد محدد مصفوفة المعاملات كما يلي:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)(2-1) - (3)(1-2) + (-1)(-1+4) = -2$$

ثانياً : نجد الحل الوحيد لهذه المنظومة كما يلي:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-8}{-2} = 4$$

تمارين

(1) احسب العوامل المرافقة للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

(2) للمصفوفة في التمرين (1):

(أ) احسب $|A|$ **(ب)** جد $adj(A)$

(حـ) جد A^{-1} **(د)** تحقق من أن : $A = adj(A)$.

(3) لتكن A مصفوفة سعة 2×2:

(أ) جد $adj(A)$ **(ب)** بيّن أن : $A = adj(adj(A))$.

(4) جد معكوس كل من المصفوفات الآتية:

(أ) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ **(ب)** $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(حـ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

(5) حل باستعمال قاعدة كرامر منظومة المعادلات في كلٍ مما يأتي:

(أ)
$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 2 \\ 2z + x &= 0 \\ 3y - z + 2x &= -5 \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} 3y + 2x &= z + 1 \\ 3x + 2z &= 8 - 5 \\ 3z - 1 &= x - 2y \end{aligned}$$

(حـ)
$$\begin{aligned} 2x + 3y + 7z &= 2 \\ -2x - 4z &= 0 \\ x + 2y + 47 &= 0 \end{aligned}$$

(6) إذا كانت A مصفوفة مثلثية عليا (سفلى) وان $|A| \neq 0$ برهن على أن A^{-1} مصفوفة مثلثية عليا (سفلى).