الفصل الاول

علم الاحصاء:هو ذلك العلم الذي يعمل على استخدام الاسلوب العلمي في طرق جمع البيانات وتبويبها وتلخيصها وعرضهاوتحليلها بهدف الوصول منها على استنتاجات وقرارات مناسبة

مفاهيم الاحصاء :

١-البيانات:

أ-البيانات غيرالمبوبة (Ungrouped data):

هي البيانات الاولية (Raw data) التي جمعت ولم تبوب

ب-البيانات المبوبة (grouped data):

هي البيانات التي نظمت في جدول توزيع تكراري.

٢-المتغير :هي أي ظاهرة توجد اختلافات بين مفرداتها ويرمز لها بالرمز الخ والمتغيرات نوعان

أ-المتغيرات الوصفية (نوعية):

وهي المتغيرات التي يمكن قياسها بوسائل قياس مألوفة او هي تلك الظواهر والصفات التي لايمكن قياسها مباشرة بالارقام العددية مثل الحالة الاجتماعية (غني،فقير)

ب-متغيرات كمية:

هي تلك الظواهر او الصفات التي يمكن قياسها مباشرة بالارقام العددية مثل صفة الطول والوزن والعمر ....وتقسم المتغيرات الكمية الى:

١-متغيرات المستمرة :وهي المتغيرات التي تاخذ المفردة فيها أي قيمة رقمية ضمن مدى معين لو افترضنا ان اطوال مجموعة من الاشخاص تتراوح بين 170-130سم نكتب المتغير بصيغة $130 \le X \le 170$

٢- متغيرات المتقطعة (المنفصلة) :وهي المتغيرات التي تاخذ المفردة فيها قيما متباعدة لو افترضنا ان عدد افراد الاسرة في اربعة عوائل هي 5,4,3,2

نكتب المتغير بصيغة $X = 2 , 3 ,4 ,5$

المجتمع :عبارة عن جميع القيم او المفردات التي يمكن ان ياخذها المتغير والمجتمع اما ان يكون :

أ-مجتمع محدد: أي يمكن حصر عدد مفرداته مثلاعدد وحدات منتجة في مصنع معين.

ب- مجتمع غير محدد: وهوالمجتمع الذي يصعب حصر عدد مفرداته مثلاعدد البكتريا في حقل معين.

٤- العينة :عبارة عن مجموعة من المفردات يتم اختيارها بطريقة معينة من المجتمع

المجموع (Summation) :

اذا كانت (x1,x2,,,,,,,,,,,,,,xn) تمثل مفردات المتغير X فان مجموع هذه المفردات يعبر عنها بالرمز : $\sum X i$

اي ان : $\sum X i = x1 + x2+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + xn$

EX : X= 6,7,4,3, find $\sum Xi$, $\sum Xi^2$

SOL: $\sum Xi = 6 +7+4+3 = 20$

$\sum Xi^2 = 36 + 49 +16 +9 = 110$

EX: X= 5 , 3 ,7 ,1 find $(\sum Xi)^2$

العرض الجدولي (Tabular Presentation):

جدول التوزيع التكراري (Frequency Distribution):

هو جدول بسيط يتكون من عمودين ،العمود الاول تقسم فيه قيم المتغير الى مجموعات تدعى الفئات (Classes)والثاني يبين فيه عدد مفردات كل فئة يسمى التكرار(Frequency) ولكل فئة حدان الحد الاعلى الحقيقي والحد الادنى الحقيقي فاذا كانت حدود الفئات اعدادا صحيحة فان الحد الادنى الحقيقي لاي فئة يكون مساويا للحد الادنى لتلك الفئة مطروحا منه (0.5) والحد الاعلى الحقيقي لاي فئة يكون مساويا للحد الاعلى مضافا اليه (0.5)

١-جدول البسيط :وهو الجدول الذي توزع فيه البيانات حسب صفة واحدة ويتالف عادة من عمودين الاول يمثل تقسيمات الصفة او الظاهرة الى فئات او مجموعات والثاني يبين عدد المفردات التابعة لكل فئة او مجموعة ،

مثال/ الجدول التالي يمثل توزيع عدد من طلبة جامعة ما حسب اوزانهم:

الفئات	Fi
60-62	85
63-65	15
66-68	45
69-71	27
72-74	8
المجموع	180

٢-جدول المزدوج :

وهو الجدول الذي توزع فيه البيانات حسب صفتين او ظاهرتين او اكثر في نفس الوقت مثلا الجدول الزدوج (لصفتين)يتالف من الصفوف تمثل فئات او مجاميع احدى الصفتين و الاعمدة تمثل فئات او مجاميع الصفة الاخرى اما المربعات التي تقابل الصفوف والاعمدة تحتوي على عدد المفردات او التكرارات المشتركة في فئات ومجاميع كلا الصفتين،

مثال/ الجدول الاتي يمثل توزيع عدد من طلبة كلية ما حسب صفتي الطول والوزن

	51-60	61-70	71-80	المجموع
121-140	20	6	4	30
141-160	2	40	10	52
161-18	2	6	10	18
المجموع	24	52	24	100

طول الفئة : (Class Length)

هو مقدار المدى بين حدي الفئة وهي عبارة عن الفرق بين الحدين الاعلى او الحدين الادنى للفئتين المتتاليتين.

مركز الفئة (Class mid –Point) : وهو عبارة عن منتصف المدى بين الحدي الفئة اي :

مركز الفئة = (الحد الاعلى +الحد الادنى) / 2

التكرار النسبي :وهي تبين الاهمية النسبة لكل فئة ويحسب كالاتي :

التكرار النسبي لاي فئة = (تكرار الفئة / مجموع التكرارات)= $fi/\sum fi$

حيث تشير fi الى التكرار الفئة و $\sum fi$ الى مجموع التكرارات الكلية

التكرار المئوي = (التكرار النسبي × 100)

جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد (Less than Clumulative -dist)

هو الجدول الذي يعطينا عدد المفردات التي تقل قيمتها عن الحد الادنى لفئة معينة.

المدرج التكراري (Histogram)

عبارة عن مستطيلات رأسية تمتد قواعدها على المحور الافقي لتمثل اطوال الفئات بينما ارتفاعاتها تمثل تكرارات الفئات ولرسم مدرج تكراري تتبع الخطوات الاتية :

١- نرسم المحور الافقي والمحور العمودي
٢- يتم تقسيم المحور الافقي الى اقسام متساوي بمقياس رسم مناسب بحيث يشمل جميع الحدود الحقيقية للفئات ويفضل ترك مسافة صغيرة بين نقطة الاصل والحد الادنى للفئة الاولى ويقسم المحور العمودي الى اقسام متساوية بحيث تشمل اكبر التكرارات
٣- يرسم على كل فئة مستطيل راسي تمثل قاعدته طول تلك الفئة وارتفاعه يمثل تكرار تلك الفئة .

المضلع التكراري: (Freq . Polygon)

عبارة عن خطوط مستقيمة متكسرة تصل بين نقاط كل نقطة فيها واقعة فوقة مركز فئة على ارتفاع يمثل تكرار تلك الفئة وعادة يقفل المضلع بايصال بدايته بالمحور الافقي بمركز فئة خيالية واقعة الى يسار اول فئة تكرارها صفر ونصل نهاية المضلع بالمحور الافقي بمركز فئة خالية واقعة الى يمين اخر فئة وتكرارها صفر ايضا.

ملاحظة :لرسم المضلع التكراري يجب رسم المرج التكراري اولا ثم تصنف القواعد العليا للمستطيلات والتي تمثل مراكز الفئات بنقاط ثم نصل هذه النقاط بمستفيمات.

المنحني التكراري (Freg Carve):

لايختلف فكرة رسم المنحني التكراري(Freg Carve) عن المضلع التكراري من حيث الاسلوب لكل الفرق الوحيد ما بينهما هو انه بدلا من توصيل النقاط (مركزالفئة ،التكرار) بمستقيمات فانه يتم تمرير منحني ما بين هذه النقاط هذا المنحني يمثل المنحني التكراري.

التمثيل البياني لجدول التوزيع التكراري التجميعي :

يستخدم لذلك المضلع التكراري التجميعي وهو عبارة عن خطوط مستقيمة متكسرة تصل بين نقاط واقعة فوق الحدود الحقيقية للفئات واعلى ارتفاع يمثل التكرار التجميعي وهنالك نوعان من المضلع التكراري التجميعي :

١- المضلع التكراري التجميعي التصاعدي:

لرسمه نتبع الخطوات الاتية :

أ-يتدرج المحور الافقي الى اقسام متساوية تمثل جميع حدود الفئات ويقسم المحور العمودي الى اقسام متساوية بحيث تشمل على اكبر التكرارات التجميعية

وهي المجموع الكلي للتكرارات.

ب- وضع نقطة امام كل حد فئة ويعادل ارتفاعها التكرار التجميعي التصاعدي لذلك الحد ثم نوصل تلك النقاط بخطوط مستقيمة أي ان المضلع يبدا من الصفر وينتهي باعلى نقطة .

٢-المضلع التكراري التجميعي التنازلي:

ويرسم بنفس الطريقة السابقة غير ان هذا المضلع يبدا من اعلى نقطة أي(مجموع التكرارات) وينتهي بالصفر.

مثال/ الجدول التالي يمثل توزيع عدد من طلبة جامعة ما حسب اوزانهم:

الفئات	Fi
60-62	5
63-65	18
66-68	42
69-71	27
72-74	8
المجموع	100

اوجد :١-الحدود الحقيقية للفئات

٢-مراكز الفئات

٣-التكرار النسبي والمئوي

٤- جدول التوزيع التكراري التجميعي الصاعد مع الرسم

٥-جدول التوزيع التكراري التجميعي النازل مع الرسم

٦-ارسم المدرج التكراري والمضلع التكراري

الحل:

الفئات	تكرار	Xi	د الحقيقية	ار النسبي	ر المئوي	التكرار التجميعي الصاعد	التكرار عي االنازل
60-	5	61.5	59.5 -6	0.05	5	0	100
63-65	18	64	62.5-65	0.18	18	5	95
66-68	42	67	65.5-68	0.42	42	23	77
69-71	27	70	68.5-71	0.27	27	65	35
72-74	8	73	71.5-74	0.08	8	92	8
المجموع	100					100	0

ثم نعين النقاط على محور و ونرسم المنحني الصاعد والمنحني النازل

الفصل الثاني

١- مقايس النزعة المركزية

١-الوسط الحسابي :وهي القيمة الناتجة من قسمة مجموع تلك القيم على عددها

أ-اذاكانت البيانات غير مبوبة:اذاكان لدينا n من القيم أي(x1,x2,..xn)فان الوسط الحسابي لها هو

$X=\sum xi/n$

ب-البيانات المبوبة: اذا كان لدينا (x1,x2,...xn) تمثل مراكز الفئات في جدول التوزيع التكراريمع تكراراتها(f1,f2,....dn) على التوالي فان الوسط الحسابي لها هو $X=\sum fixi/ \sum fi$

مثال:من جدول التوزيع التكراري الاتي جد الوسط الحسابي للبيانات التالية:

الفئات	Fi	Xi	Fi Xi
31-40	1	35.5	35.5
41-50	2	45.5	91.0
51-60	5	55.5	277.5
61-70	15	65.5	982.5
71-80	25	75.5	1887.5
81-90	20	85.5	1710.5
91-100	12	95.5	1146.5

$$Xi = \sum fi\ xi\ / \sum fi = 6130 / 80 = 76.62$$

٢-الوسيط:

أ-اذاكانت البيانات غير مبوبة:اذاكان لدينا n من القيم (.x1,x2,......xn) ترتب ا لقيم ترتيبا تصاعديا او تنازليا:١-اذاكان n عددا فرديا فان الوسيط هوالقيمة التالية

$$Me= (n+1)/2$$

٢-اذا كان n عددا زوجيا فان الوسيط يكون:(n/2 +1 , n/2)

مثال١:جد الوسيط للقيم الاتية "X=80,82,76,87,84

الحل/نرتب القيم ترتيبا تصاعديا او تنازليا ثم نلاحظ ان عددا فرديا نطبق القانون

$n=5$, $X=76,80,82,84,87$ اذن الوسيط هو $(n+1)/2=82$

مثال٢/اذاكانت n زوجية نرتب القيم تصاعدي او تنازلي ثم نطيق ا لقانون التالي

ليكن $X=5,4,8,7,3,12,9,2$ و$n=8$ اذن نطيق القانون التالي $n/2$,$n/2+1$

$n=8$, $X=2,3,4,5,7,8,9,12$ اذن $8/2=4$, $4+1=5$

$5+7=12/2=6$ اذن الوسيط هو $=6$

ب-البيانات مبوبة :اذاكانت $(x_1,x_2,.......x_n)$ تمثل مراكز الفئات مع تكراراتها $(f_1,f_2,.......f_n)$ على التوالي فان قيمة الوسيط لهذه البيانات هي

$$Me= L_1+(((fi/2)-Fi)/fi)\times w$$

حيث ان (L_1) يمثل الحد الادنى للفئة الوسيط

و(fi) تمثل مجموع التكرارات

و(Fi) تمثل التكرار المتجمع الصاعد عند بداية فئة الوسيط

و(fi) تمثل فئة الوسيط

و(w) تمثل طول فئة الوسيط

مثال/من جدول التوزيع التكراري جد الوسيط للبيانات التالية"

التكرار التجميعي الصاعد	Fi	الفئات
5	5	60-62
23	18	63-65
65	42	66-68
92	27	69-71
100	8	72-74

نجد الوسيط باستجدام القانون التالي

ثم نلاحظ القيمة واقعة بين (23-65) من جدول التوزيع المتجمع الصاعد وبعد ذلك نعين فئة الوسيط من الفئات الاصلية (66-68)ونجد الحدود الحقيقية لها ونجد تكرار الفئة الوسيط$(fi=42)$وطول الفئة(w) وبعد نطبق القانون

$$Me= L1+(((\sum fi/2)-Fi\ )/fi\ )\ \times w$$

٣- المنوال:

ا-البيانات غير مبوبة:اذاكان لدينا n من القيم (x1,x2......xn)فان المنوال لها يكون الاكثر تكرارا ويرمز له ب M

مثال/اذا كانت $X=3,5,2,6,5,9,2,5,8,6$ جد المنوال لها؟

الحل/المنوال هو =5 لانه الاكثر تكرارا

ب-البيانات المبوبة:نستخدم هذه الطريقة عندما تكون الفئات مستمرة أي اذا كانت لدينا (x1,x2,.........xn) تمثل مراكز الفئات في جدول توزيع تكراري مع تكراراتها(fn........,f1,f2) على التوالي فان المنوال هو $M=L1+(d1/d1+d2)*w$

حيث ان فئة المنوال هي التي تمثل اكبر التكرارات

وان(L1) تمثل الحد الادنى ا لحقيقي لفئة المنوال

و(d1) هو الفرق بين تكرار الفئة المنوال والفئة السابقة لها

و(d2) هو الفرق بين تكرار الفئة المنوال والفئة الاحقة لها

و(w) هو طول الفئة

اما اذا كانت البيانات متقطعة نستخدم القانون التالي المنوال=(الحد الادنى+الحد الاعلى)/٢

مثال/من الجدول السابق جد المنوال له"

$$M =66+68/2=67$$

في حالة المتقطعة نستخدم القانون التالي المنوال= (الحدالادنى + الحد الاعلى/ 2

بمعنى اخر المنوال يمثل مر كز الفئة التي تقابل اكبر التكرارات

مثال/من الجدول التالي جد المنوال له.

الفئات	20-	30-	40-	50-	60-	70-	80 - 90
Fi	2	8	10	20	13	12	5

الحل/نطبق القانون $M=L1+(d1/d1+d2) \times w$

$M= 49.5+(10/10+7)\ \ 10=49.5+5.88=55.38$

٢-مقايس التشتت او الاختلاف:

ونقصد به التباعد او التقارب الموجود بين قيم المشاهدات لمتغيرما وايضا هي مقياس مدى تشتت قيم المشاهدات عن وسطها فكلما كان التشتت كبيرا دل ذلك على

عدم تجانس بين القيم والعكس صحيح وهناك عدة مقايس للتشتت اهمها:

١-مقايس التشتت المطلق: أي التي تكون وحداتها نفس وحدات القيم الاصلية واهمها

ا-المدى(The Rang)

ب-الانحراف المتوسط (

ج-التباين والانحراف المعياري(القياسي)

٢-مقايس التشتت النسبي:وهو الذي يكون خالي من وحدات القياس واهمها:

"معامل الاختلاف"

المدى: لمجموعة من القيم هو الفرق بين اعلى قيمة واقل قيمة من تلك المجموعة ويرمزلها ب(R)"

مثال/لتكن $X=9,4,7,8,16, 10,20,2$

الحل/ $R= 20-2=18$

هذه قي حالة اذا كانت البيانات غير مبوبة نستخدم هذه الطريقة اما اذا كانت البيانات

مبوبة نستخدم الجدول ونجد مراكز الفئات ثم نجد الفرق بين اعلى قيمة واقل قيمة من مراكز الفئات يمثل المدى

الانحراف المتوسط:اذا كانت البيانات غير مبوبة نستخدم القانون التالي:

$M\_D= \backslash xi-x\backslash / N$ وحيث M_D تمثل الانحراف المتوسط

والسبب في اخذ الانحراف المطلق هو ان ابقاء الاشارات تكون موجبة لان السالب

تجعل مجموع الانحرافات يساوي صفرا

مثال/ لتكن X=9,8,6,5,7 جد الانحراف المتوسط لهذه القيم ؟

الحل/ اولا نجد الوسط الحسابي $X = \sum xi/n \;\; =9+8+6+5+7/5= 35/5=7$

ثانيا نطبق قانون $M\_D = \sum \; \backslash xi\text{-}x\backslash \, /n$

$M\_D=2+1+1+2+0/\ 5=6/5$

Xi	xi-x	\xi-x\
9	2	2
8	1	1
6	-1	1
5	-2	2
7	0	0

اما اذا كانت البيانات مبوبة نطبق القانون التالي:

$M\_D= \sum fi\backslash xi\text{-}x\backslash \; / \; \sum fi$

مثال/من جدول البيانات التالي جد الانحراف المتوسط

الفئات	Fi	Xi	Fixi	\xi-x\	Fi\xi-x\
10-18	5	14	70	26.5	132.5
19-27	8	23	184	17.5	140.0
28-36	10	32	320	8.5	85.0
37-45	20	41	820	0.5	10.0
46-54	17	50	850	9.5	161.5
55-63	10	59	590	18.5	185.0

اولا نجد الوسط الحسابي $x= \; \sum fi\ xi/ \sum fi \; = 2834\ /70 = \; 40\ .48$

ثانيانطبق القانون :

$M\_D = \; \sum fi\backslash xi\text{-}x\backslash / \sum fi \;\; = 714.0\ /70 =10.2$

٢-التباين او الانحراف المعياري:في حالة البيانات غير مبوبة

اذاكان لدينا (n)من المشاهدات (x1,x2,....xn)فان التباين له والذي نرمز له(S^2) يكون:

$$S^2=(xi-x) / n-1$$

ويمكن ايجاد التباين بطريقة مختصرة وهي

$$S^2= [\sum xi^2 - \sum(x i/ n) ^2] / n - 1$$

وان الجذر التربيعي للتباين يسمى بالانحراف المعياري ويرمزله ب(S)

مثال/جد التباين والانحراف المعياري للقيم التالية: x=4,5,7,9,3

الحل/ نجد اولا $Xi^2= 16,25,49 ,81,9$

$$\sum Xi^2 = 16+25+49+81+9=432$$

ثم نجد مجموع قيم Xi $\sum Xi=4+5+7+9+3=28$

ونطبق القانون: $S^2 = 432-(28)^2/5-1= 432-/4$

اما الانحراف المعياري =S

اما بالنسبة للبيانات المبوبة نستخدم القانون التالي:

$$S^2= \sum(fixi^2- \sum(fixi)^2/fi) / \sum fi-1$$

او $S^2= \sum(fi\backslash xi-x\backslash ^2)/ \sum fi-1$

مثال البيانات المبوبة/ جد التباين والانحراف المعياري للبيانات التالية:

الفئات	Fi	Xi	Fixi	Xi^2	FiIXi
60-62	5	61	305	3721	18605
63-65	18	64	1152	4096	73729
66-68	42	67	2814	4489	188538
69-71	27	70	1890	4900	132300
72-74	8	73	584	5329	42632

$$S^2= \sum(fixi^2- \sum(fixi)^2/ \sum fi) / \sum fi-1=$$

$$S^2= 455803 - (6745)^2/100/99 =8.6$$

اما الانحراف المعياري فهو $S= 2.9$

٤-مقايس اخرى للتشتت المطلق :هناك بعض المقايس لاخرى لقياس التشتت ولكنها قليلة الاستعمال وتسمى تشبيهات المدى

(Quasi- rang es_) مثل :

أ-نصف المدى الربيعي(الانحراف الربيعي)

(Semi _ int erquartile rang e)

ب-نصف المدى العشري او المئيني.

مقايس التشتت النسبي :ان مقايس التشتت النسبي لها اهميتها عند مقارنة التشتت لمجموعتين او اكثر تختلف في وحدات القياس لقيمتها لان مقايس التشتت تكون خالية من وحدات القياس واهم هذه المقايس هي :

١-معامل الاختلاف Cofficient of Variation :اذا كان لدينا (X,S)هما الانحراف المعياري والوسط الحسابي لمجموعة من القيم على التوالي فان معامل الاختلاف لها هو ويرمز له ب C.V

$$C.V= S/ X *100$$

مثال/من نتائج الامتحانات للمادتين الرياضيات والفيزياء حصلنا على المعلومات الاتية مادة الرياضيات كان الوسط الحسابي له(78)والانحرف المعياري هو(8) والوسط الحسابي لفيزياء هو(73)والانحراف هو(7.6) في أي المادتين كان التشتت اكثر؟

الحل/نطبق القانون التالي $C.V= S/X*100$

لمادة الرياضيات $C.V= 8/78*100 = 10.25\ \%$

لمادة الفيزياء $C.V = 7.6/ 73 *100 = 10.41\ \%$

أي ان التشتت للمادة الفيزياء اكثر

مثال/من نتائج الامتحانات للمواد التالية احصاء وكيمياءو فيزياء حصلنا على المعلومات التالية وسط الحسابي لمادة الاحصاء هي(81) والانحراف هو (9.2) لمادة الكيمياء الوسط الحسابي هو(76)وبانحراف(8.12)ولمادة الفيزياء هو(73)وبانحراف(7.6) في أي من هذه المواد كان تشتت الدرجات اكثر؟

الحل/ نطبق القانون $C.V= S/x*100$

للاحصاء $C.V= 9.2/81*100 =11.35$

للكيمياء $C.V= 8.12/76*100 =10.68$

للفيزياء $C.V= 7.6/73*100 =10.41$

نلاحظ ان تشتت للمادة الاحصاء اكثر من باقي المواد

الدرجة القياسية :

في كثيرمن الاحيان نحتاج الى المقارنة مفردتين من مجموعتين مختلفتين وفي هذه الحالة يجب تحويل وحدات كل مفردة الى وحدات قياسية حتى تكون المقارنة ذات معنى وذلك باستخدام الوسط الحسابي او الانحراف المعياري لكل مجموعة وتسمى القيمة (Zi)درجة قياسية اذا كانت .

$$Zi= Xi- x / s$$

مثال / حصل طالب على درجة(84) في الامتحان النهائي بالرياضيات علما بان الوسط الحسابي في امتحان الرياضيات لجميع الطلبة كان (76) وبانحراف قياسي قدره (10)اما في امتحان الكيمياء فقد حصل الطالب على درجة (90) حيث كان الوسط الحسابي لجميع الطلبة (82) وبانحراف(16) ففي أي الموضوعين كانت قابلية هذا الطالب اعلى ؟

الحل/ نحول هاتين الدرجتين الى درجات قياسية با ستخدام القانون

$$Zi = Xi - x /s$$

للرياضيات $Zi= 84 - 76 /10 = 0.8$

للفيزياء $Zi= 90 -82 /16 = 0.5$

ومن هذا يتضح بان قابلية الطالب في الرياضيات اعلى من الفيزياء على الرغم من ان درجته في الفيزياء اعلى

الفصل الثالث

مبادى نظرية الاحتمال

مفاهيم اساسية

١- **التجربة العشوائية:**

هي التجربة التي لا يمُكن معرفة نتائجها لخضوعها لقوانينٌ الاحتمال

٢-فضاء العينٌة: هو مجموعة كل النتائج الممكنة لتجربة تحدث عن طريقٌ الصدفة و يرٌمزلها بالرمز(S)

مثال/

عند رمي قطعة نقود مرة واحدة فان فضاء العينٌة تٌكون من نتيجٌتينٌ ممكنتينٌ هما $S=[H,T]$

حيثٌ يرٌمز H للصورة , T للكتابة

اما اذارمينٌا قطعتينٌ من النقود فان فضاء العينٌة سيكٌون من اربعة نتائج ممكنة هي

$S = [HH,HT,TH,TT]$

٣-الحادث :هو مجموعة جزئيةٌ من فضاء العينٌة ويرٌمزله ب(E i)

مثال /عند رمي قطعة نقود مرة واحدة $S=[H,T]$ فان

$E1=[H]$, $E2=[T]$, $E3=[H,T]$

يعني كل من ,E1,E2,E3 مجموعات جزئية من فضاء العينة S

١- الحوادث المتنافيةٌ:

يقٌال عن الحادثتينٌ E1,E2 انهما متنافيأنٌ اذا استحال حدوثهما معا فمثلا :

عند رمي قطعة نقود فمن المستحيلٌ الحصول على صورة وكتابة في نفس الوقت

٢-الحوادث المستقلة

هي الحوادث التي اذا وقع احدهما لايؤٌثر في وقوع الاخرفمثلا :

عند رمي قطعتينٌ نقود فان نتيجٌة القطعة الاولى لا تؤثر بنتيجٌة القطعة الثانيةٌ.

٣ ـالحوادث غيرٌ المستقلة:

هي الحوادث التي اذا وقع احدهما يؤّثر في وقوع الحوادث الاخرى فمثلا :

في حالة صندوق به كرات بيضّاء وسوداء فعند سحب كرتان على التوالي بحيثٌ لا تعاد الكرة الاولى فان نتيجٌة السحبة الثانيةٌ تتاثر بنتيجٌة السحبة الاولى لذا فالحادثتان غيرٌ مستقلتينٌ أي (معتمدة)

مضروب n : n Factorial

مضروب n و يرٌمز له ب (n!) و يعٌرف بانه

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots\ldots1$$

ملاحظة $0! = 1$, $1! = 1$, $n! = n(n-1)$

مثال/ جد قيمٌة !5 ؟

الحل / $5! = 5(4)(3)(2)(1) = 120$

التباديلٌ:

هو ترتيبٌ n من العناصر في شكل معينٌ ويرٌمز له ب $n\,P\,r$ أي تبادل من العناصر وقانونه هو $n\,P\,r = n!/(n-r)!$

مثال

اذاكان لدينٌا اربعة حروف هيً [A,B,C,D] واختيرٌمنها حرفان فما هي عدد الطرق التي يمٌكن بها اختيارٌ هذ ينٌ الحرفينٌ من اربعة احرف؟

الحل: $n\,P\,r = 4!/(4-2)! = 4(3)(2)(1)/2(1) = 24/2 = 12$

أي ان عدد الطرق = 12 وهذه الطرق هي

[AB,AC,AD,BC,BD,CD,BA,CA,DA,CB,DB,DC]

حيثٌ ان كلا منهما يمٌثل ترتيبٌا مختلفا للحرفينٌ

التوافيقٌ:

يقٌصد بالتوافيقٌ بانها عدد طرق الاختيأرٌ غيرٌ المرتب التي يمٌكن تكوينٌها من عدة اشيأء باخذها كلها او بعضها و يرٌمز لها ب n Cr وحيثٌ

$$n\,C\,r = n!\,/\,r!\,(n-r)! \qquad , n > r$$

ملاحظات/

$$n\,C\,0 = 1 \quad , \quad n\,C\,1 = n \quad , \quad n\,C\,n = 1 \quad , n\,C\,n\text{-}1 = n$$

مثال/بكم طر يقٌة يمٌكن اختيأرٌ لجنة تحتوي على اربع طلاب من صف فيةٌ عشرون طالب ؟

ا لحل

$$20\,C\,4 = 20!\,/\,4!\,(20-4)!$$

$$= 20(19)(18)(17)(16)!\,/\,4(3)(2)(1)\,(16)!$$

$$= 20(19)(18)(17)\,/\,4(3)(2)(1) \qquad = 4845$$

قواعد اساسيةٌ:

١- اذا كان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E1 هو (n) وان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E2 هو (m) وكان E1,E2 حادثان متنافيأن فان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E1 او E2 هو (n + m) من الطرق

مثال / ورق اللعب يتٌكون من(52) ورقة فورقة (♡) يمٌكن ان تحدث ب (13) طريقٌة وان ورقة(♦)يمٌكن ان تحدث ب (13) طريقٌة فعند سحب ورقة عشوائيةٌ من اوراق اللعب فان عدد الطرق الممكنة لاختيأر(♡) او (♦) (13+13 = 26)

٢-اذا كان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E1 هو (n) وان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E2 هو (m) وكان E1,E2 حادثان مستقلان فان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E1 او E2 هو ($n \times m$) من الطرق

مثال

اذا سحبت ورقتان من مجموعة اوراق اللعب بحيثٌ ان احداهما (♡)والاخرى(♦) فان هناك $13\times13 = 169$ طر يقّة لعمل ذلك

مثال /

صندوق به (6)كرات حمراء و (4)كرات بيضّاءو(2) سوداء ماعدد طرق اختيأر(5) كرات بحيث تكون (2)منها بيضّاء و(3)حمراء؟

الحل/ عدد طرق اختيأر (3) كرات حمراء هي

$$6\,C3= 6! /3!\,(6-3)! = 6(5)\,(4)\,(3!)\,/3!\,(3)!$$

$$6(5)\,(4)\ \ / \,3(2)1\ \ =20$$

وعدد طرق اختيأر (٢)كرات بيضّاء هي:

$$4C2\ \ = \ 4!\,/2!\ \ (4-2)!\ \ = \ 4\,(3)\,(2)(1)\,/\,2!(2)!= 6$$

اذن عدد الطرق لاختيأر (3) كرات حمراء(2) بيضّاء هو

$$6\,C3\times4\,C2 = 20 \times 6 = 120$$

تعريفٌ الاحتمالية Probability

هي نسبة الجزء للكل او هي دالة المنطلق لها الحادث(مجموعة الحوادث) المستقر لهاوهي دالة منطلقها مجموعة جزئيةٌ من فضاء العينٌة(الحوادث)والمستقر لها مجموعة جزئيةٌ من الاعداد الحقيقيةٌ

فاذا كان عدد عناصرمجموعة فضاء العينٌة (m) و (n)مجموعة عناصر الحادث (E) (الحالات المواتيةٌ) Favour able (

$$P(E) = \ n\,/m \ \ =$$ عدد الحالات المواتيةٌ للحادث / عدد الحالات الممكنة

$, n < m$

احتماليةٌ الحادث المكمل يعني(احتماليةٌ عدم ظهور هذا الحادث)أي فشله

$$P(E)^c = 1 - P(E) = 1 - n/m = m-n / m$$

مثال / جد احتماليةٌ وجود صورتان اذا رمي قطعة نقود ثلاث مرات

الحل : S=[HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT]

A=[HHT,HTH,THH]

$$P = n/m = 3/8$$

مثال/ عند رمي زهر كم احتمال فردي ؟

الحل\ Eالحادث الفردي وعدد حالاته الممكنة (3)وهي

S= [1,3,5]

مثال / صندوق يحٌتوي على (3)كرات بيضّاء و (5) كرات سوداء و(2) حمراء فاذا سحبت كرة عشوائية من هذا الصندوق ماهو احتمال ان تكون

أ -سوداء ب- غيرٌ سوداء ج -غيرٌ حمراء

الحل / احتمال الحصول على كرة سوداء هو $P(B)$

$$P(B) = n/m = 5/10 = 1/2$$

احتمال الحصول على كرةغيرٌ سوداء هو $P(B)^c$

$$P(B)^c = 1 - 1/2 = 1/2$$

احتمال الحصول على كرةغيرٌ حمراء هو $P(R)^c$

$$P(R)^c = 1 - P(R) = 1-2/10 = 10-2/10 = 8/10 = 4/5$$

بعض خواص الاحتماليةٌ:

خاصيةٌ الاولى

١-اذا رمزنا لاحتمال حدوث حادث بالرمز P(E) واحتمال عدم حدوث هذا الحادث بالرمز P(E) ^c فان P(E) + P(E) ^c =1

مثال /صندوق يحٌتوي على 6 كرات بيضٌاء و 4 كرات سوداء و 5 حمراءفاذا سحبت منه كرة واحدة عشوائياٌ ماهودرجة احتمال ان تكون هذه الكرة:

أ – بيضٌاء   ب- غيرٌ بيضٌاء

الحل : أ - P(W) = 6/15

ب- P(W) ^c =1- 6 / 15= 15-6/15 = 9 / 15

ومن هذا تٌضح ان P(W)+P(W) ^c = 6 /15 +9/15 =15/15 =1

خاصيةٌ ثانيةٌ:

ان درجة احتمال أي حادث تتراوح بينٌ الصفر والواحد أي $0 \le P(E) \le 1$

خاصيةٌ ثالثةٌ :

اذا كانت E1,E2,.................En هي عناصر او نقاط فضاء العينٌة فان مجموع درجات احتمالاتها = 1

اي

P (E1) + P(E2)+................. + P(En)= 1

$$\sum_{1}^{n} p(Ei) = 1$$

مثال

صندوق يحتوي على (5)كرات بيضاء و (9)كرات سوداء و(6)خضراء فاذا سحبت كرة

عشوائياً فان احتمال ان تكون بيضاء هو $P(W)= 5 / 20$

احتمال ان تكون سوداء هو $P(B)= 9 / 20$

احتمال ان تكون خضراء هو $P(G)=6 / 20$

$$\sum_1^3 p(Ei) = P(W) + P(B) + P(G)$$

$$= 5/20 + 9/20 + 6/20$$

$$= 5+9+6/20 = 20 /20 = 1$$

تمارين

١-طالب يجيب على(8) اسئلة من مجموع (10) اسئلة كم طر يقة مختلفة للاجابة على الاسئلة؟

٢-ماعدد طرق الاختيار التي يمكن الحصول عليها لاختيارلجنة مؤلفة من(5) اشخاص مجموع (9) اشخاص ؟

٣-بكم طريقة يمكن ان يجلس ثلاثة اولاد وبنتان في صف ؟

٤- بفرض عدم السماح بالتكراركم عدد مكون من ثلاثة ارقام يمكن تكوينه

من الارقام 2,3,5 , 6,7,9

٥- سحبت قطرة دم من شخص يرغب في فحص صنف دمه ما هو احتمال ان يكون صنف دم هذا الشخص AB ؟

٦- صندوق يحتوي على (7) كرات حمراء و(5)كرات بيضاء و(8)خضراء فاذا سحبت منه كرة واحدةعشوائياً فان احتمال ان تكون هذه ١- بيضاء ٢- غير بيضاء؟

قوانين الاحتمالية: Laws of Probability

نفرض ان هناك حادثان E1,E2 فالتعابيرٌ التاليةٌ يقّصد بها مايلٌي:

احتمال وقوع الحدث E1 او الحدث E2 = P(E1+E2)

أي احتمال وقوع اياٌ منهما فقط

احتمال وقوع الحادث E1 والحادث E2 معا = P(E1E2)

احتمال حدوث E2 علما بان الحادث E1 قد وقع = P(E2/E1)

ويسّمى الاحتمال الشرطي Conditional Probability

والحوادث مايلٌي :

أ - قانون الجمع Addition law

١-اذاكانت الاحداث متنافيةٌ , أي اذا كانت E1 و E2 حادثان متنافيأن فان احتمال حدوث أي منهما E1 (او) E2 هو حاصل جمع احتمال كل منهما أي

$$P(E1+E2) = P(E1)+P(E2)$$

مثال/

صندوق يحّتوي على (6)كرات بيضّاء و(3)كرات سوداء و(5)زرقاء فاذا سحبت منه كرة واحدة عشوائياً ما هو درجة احتمال ان تكون هذه بيضّاء او سوداء؟

الحل/

$$P(E1+E2)= P(E1) +P(E2)$$

$$6 /14 +3 /14 = 9 /14$$

مثال/

في حالة رمي زهر نرد(زار) فما هو احتمال الحصول على عدد فردي ؟

$$P(1+3+5) =P(1) +P(3) +P(5) =1/6 +1/6+ 1/6 =3/6=1/2$$

٢- اذاكانت الاحداث غيرٌ متنافيةٌ , أي اذا كانت E1 و E2 حادثان غيرٌ متنافيأن فان احتمال حدوث أي منهما (E1 او E2)هو حاصل جمع احتمال كل منهما مطروحا منه احتمال حدوثهما معا أي

$$P(E1+E2) =P(E1)+P(E2) -p(E1E2)$$

مثال /

في احدى الكلياٌت 25% من الطلبة راسب بالرياٌضياٌت 15% ومن الطلبة راسب في الكيمٌياٌء و 10% راسب في كلا المادتين الرياٌضياٌت والكيمٌياٌء فاذا انتخب طالب منهما عشوائياٌ فما هواحتمال ان يكٌون راسبا في الرياٌضياٌت او الكيمٌياٌء؟

الحل /

نرمز للرياٌضياٌت ب M وللكيمٌياٌء ب C

$$P (M+C)= p(M)+p(C)-p(MC) =0.25+0.15-0.10 =0.30$$

مثال\

اذا رمي زار مرة واحدة فما هو احتمال ظهورعدد يكٌون فردي او يقٌبل القسمة على 3 ؟

الحل\

نفرض E1 الحادث الفردي وعدد حالاته الممكنة (3) وهي (1,3,5)

نفرض الحادث E2 يقٌبل القسمة على (3)وعدد حالاته الممكنة (2) وهي(3,6)

$$P(E1) = 3/6 \quad , \quad P(E2) = 2/6$$

يمٌثل E1E2 الحادث فردي و يقٌبل القسمة على 3 هو فقط 3 وعدد الحالات الممكنة = 1

$$P(E1E2) = 1/6$$

اذن $P(E1+E2) = P(E1) + P(E2) - P(E1E2)$

$$= 3/6 + 2/6 - 1/6 = 4/6$$

ب - قانون الضرب :

١- اذاكانت الاحداث مستقلة , أي اذا كانت E1 و E2 حادثينٌ مستقلينٌ فان احتمال حدوثهما معا هو حاصل ضرب كل منهما أي

$$P(E1E2) = P(E1)\,P(E2)$$

مثال/

عند رمي قطعت نقود ما هو احتمال الحصول على صورة في كليهٌما؟

الحل /

احتمال الحصول على صورة من القطعة الاولى $P(H1) = 1/2$

احتمال الحصول على الصورة من القطعة الثانيةٌ $P(H2) = 1/2$

اذن $P(H1H2) = P(H1)\,P(H2) = (1/2)(1/2) = 1/4$

مثال\

اذا كان احتمال اصابة الطائرة الاولى(A) لهدف معينٌ يسّاوي (1 / 4) واحتمال اصابة الطائرة الثانيةٌ (B) لنفس الهدف يسّاوي (1 / 6) فاذا كان عمل كل منهما مستقلاعن الاخرواطلقت كل من الطائرتينٌ قنبلة في آن واحد تجاه الهدف فما هو احتمال

أ– ان تصيبٌ الطائرتان معا الهدف

ب -ان لا تصيبًا الهدف ؟

الحل \

$$P(AB) = P(A)\,P(B) = (1/4)(1/6) = 1/24$$

ب- احتمال الاولى ان لا تصيبٌ الهدف

$$P(A)^c = 1 - P(A) = 1 - 1/4 = 3/4$$

احتمال الثانيةٌ ان لاتصيبٌ الهدف

$$P(B)^c = 1 - P(B) = 1 - 1/6 = 5/6$$

احتمال ان لا تصيبًا الهدف

$$P[(A)^c \times (B)^c] = P(A)^c \times P(B)^c = (3/4)(5/6) = 15/24$$

٢-اذاكانت الاحداث غيرٌ مستقلة , أي اذا كانت E1 و E2 حادثان غيرٌ مستقلينٌ فان احتمال حدوثهما معا يسًاوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادث الاول في احتمال وقوع الحادث الثاني بشرط حدوث الاول أي

$$P(E1E2) = P(E1)\, P(E2/E1)$$

مثال \

صندوق به (5) كرات حمراء و (3)سوداء فاذا سحبت كرتان سو يةٌ (او سحبت كرتان على التوالي بدون ارجاع الكرة الاولى الى الصندوق) ماهو احتمال ان تكون كلتاهما سوداء ؟

الحل\

احتمال الحصول على كرة سوداء في السحبة الاولى هو:

$$P(E1) = 3/8$$

اما في السحبة الثانيةٌ (بدون ارجاع الكرة المسحوبة الى الصندوق)

فان احتمال ان تكون الكرة سوداء هو:

$$P(E2/E1) = 2/7$$

$$P(E1E2) = P(E1)\, P(E2/E1) = (3/8)(2/7) = 6/56$$

الاحتمال الشرطي : Conditional Probability

اذا كان الحادث A قد وقع فعلا والمطلوب احتمال وقوع الحادث B بحيثٌ ان B يعْتمد علىA فان الاحتمال الشرطي علما ان A,B (غيرٌ مستقلينٌ)هو كالاتي :

$$P(B/A) = P(AB) / P(A), \qquad P(A) > 0$$

مثال\

رمينٌا قطعة نقود مرتان واردنا ان نحسب احتمال حصولنا على صورة في الرميةٌ الاولى مع العلم اننا لم نحصل على كتابة مرتينٌ ؟

الحل /

الحادث بالرميةٌ الاولى صورة $S= [HH,TH,HT ,TT]$

$$P(A) = 2/4$$

الحادث عدم الحصول على كتابتينٌ $B=[HH,TH,HT]$

$$P(B) = 3/4$$

$$P(A/B) = P(AB) / P(B) = (2/4)/(3/4) = 2/3$$

مثال\

تم تصنيفٌ احدى الافراد وفق الجدول التالي

الجنس	له وظيفةٌE	ليسٌ له وظيفةٌV	المجموع
ذكورM	460	40	500
اناثF	140	260	400
المجموع	600	300	900

ثم اختيارٌ فرد بصورة عشوائيةٌ فما احتمال ان يكٌون ذكر وله وظيفةٌ ؟

الحل\

$$P(M/E)= P(ME) / P(E) =(460 /900)/(600/900)$$

$$= 460 / 600 = 0 . 76$$

مثال واجب /

نفس المثال السابق مااحتمال ان يكٌون انثى وليسٌ لها وظيفةٌ؟

الفصل الرابع

التوزيع الاحتمالي " Probability Distribution

المتغير العشوائي Random V arable

هو دالة ذات قيمٌة حقيقية معرفة على مجموعة فضاء العينٌة حيثٌ S تمثل المنطلق ومستقرالدالة مجموعة جزئيةٌ من الاعداد الحقيقٌيةٌ ويرٌمز له باحدى الاحرف الكبيرٌة بحيث ان لكل عدد حقيقٌي x قيمٌة المتغيرٌ العشوائًي

$X(w) < x$

w ينتمي ل S

مثال/ رمي قطعة نقود معينٌة مرتينٌ وكان المتغيرٌ x يمٌثل عدد الصور ؟

$S = [\ HH, HT, TH, TT\ ]$

$X(TT) = 0, \quad X(HT) = X(TH) = 1 \quad , X(HH) = 2$

$X = 0 \ , 1 \ , 2$

ويمٌكن التميزٌ بينٌ نوعينٌ من المتغيرٌات العشوائيةٌ اعتمادا على نوع القيمٌ التي يأٌخذها المتغيرٌ العشوائي وهي:

ـالمتغيرٌ العشوائي الذي تختلف قيمٌة الواحدة عن الاخرى بكميأٌت محددة يسمى المتغيرٌ العشوائي المتقطع

ـالمتغيرٌ العشوائي الذي ياخذ أي قيمٌة ضمن حدود معينٌة يسٌمى المتغيرٌ العشوائي المستمر Continuous . R . V

التوز يعٌ الاحتمالي المتقطع

هو قانون او جدول يعٌطي جميعٌ قيمٌ المتغيرٌ العشوائي المتقطع مع جميعٌ الاحتمالات المقترنة مع كل قيمٌة من قيمٌ المتغيرٌ المتقطع ويرٌمز له $P(X)$ بحيثٌ يحٌقق الشرطينٌ وهما

$1 - P(X) \geq 0$ $\qquad\qquad$ $2 - \Sigma P(Xi) = 1$

وتسمى $P(X)$ بدالة كتلة احتمالية

مثال/ بالنسبة للمثال السابق

احتمال المتغيرٌ العشوائي $X=0$ يعني احتمال عدم الحصول على الصورة ؟

الحل

$$P(X=0) = 1/4$$

$$P(X=1) = 2/4 = 1/2$$

$$P(X=2) = 1/4$$

$$P(X) = \begin{cases} 1/4 & , X = 0, 2 \\ 1/2 & , X = 1 \\ 0 & , o.w \end{cases}$$

او

X	0	1	2
P (x)	1/4	1/2	1/4

مثال \

دالة الكتلة الاحتماليةُ لرمي الزار للمتغيرٌ العشوائي X الذي يمٌثل عدد النقاط عند رمي الزار. ؟

الحل / $X= 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $P(X) = 1 / 6$

X	1	2	3	4	5	6
P(x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

مثال\

من تجربة رمي زارينٌ جد التوزيعٌ الاحتمالي لمجموع النقاط التي تظهر على الوجهينٌ

الحل\

فان $X= 2,3,4................12$

ان عدد عناصر فضاء العينٌة هو

S = (1,1), (1,2).......................(1,6)
(2,1),(2,2)....................... ....(2,6)
(3,1),(3,2)....................... ....(3,6)
(4,1),(4,2)....................... ....(4,6)
(5,1),(5,2)....................... ....(5,6)
(6,1) , (6,2) ....(6,6)

عندما $x=2$
فالعنصر هو اي ان
$P(X=2) = 1 /36$

عندما

فالعناصر هي اي ان

$P(X=٣) = ٢ /36$

عندما

فالعناصر هي اي ان

$P(X=٤) = ٣ /36$

و هكذا يمٌكن ا يجٌاد الاحتمال عند كل قيمٌة من قيمٌ x وبذلك يكٌون التوزيعٌ

الاحتمالي للمتغيرٌ العشوائي x هو كما يلٌي:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1 2
P(x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$\Sigma P(X_i) = 1$

$1/36+2/36+3/36+4/36+5/36+6/36+5/36+4/36+3/36+2/36+1/36=36/36=1$

ومجموع هذه الاحتمالات = 1

التوز يعٌ الاحتمالي المستمر

هو التوز يعٌ الذي يأٌخذ فيةٌ المتغيرٌ العشوائي قيمٌا بينٌ حدينٌ ودالته f(x) تكون موجبة لجميعٌ قيمٌ x بينٌ $-\infty < x < \infty$

تسمى f(x) بدالة الكثافة الاحتماليةٌ ومن خواص هذه الدالة هو:

$1- f(x) \geq 0$ $\quad\quad$ $2 - \int f(x)\, dx = 1$

مثال /

اذا كان $F(X)=1/2 \quad , \quad 1\le X\le 3$

برهن ان f(X) هي دالة كثافة احتمالية؟

$$\int f(X)\,dx = \int 1/2\,dx = 1/2x \Big| = 1/2(3-1)$$

$$= 1/2\ (2) \quad = 1$$

اذن فهي دالة كثافة احتمالية

التوقع الرياُضي Mathematical Expectation

اذا كان X متغيرٌ عشوائي بدا لة كثافة احتماليةٌ او كتلة احتماليةٌ P(X) , f(X) وكانت g(X) دالة اخرى بدلالة المتغيرٌ العشوائي فالتوقع الر ياُضي لهذه الدالة يعٌرف بالصيغةٌ التاليةٌ ويرٌمز له ب E(g(X))

$E[g(x)] = \Sigma\, g(x)\, P(x)$ في حالة المتغيرٌ العشوائي المتقطع

$E[g(x)] = \int g(x)\, f(x)\, dx$ في حالة المتغيرٌ العشوائي المستمر

بعض الحالات الخاصة للتوقع الرياُضي:

أ_المعدل(Mean) : اذاكانت $g(x) = X$ فالتوقع الرياُضي في هذه الحالة يسٌمى القيمٌة المتوقعة للمتغيرٌ العشوائي و يرٌمز له ب M

متغيرٌ عشوائي متقطع $E(X) = M = \Sigma\, x\, P(X)$

متغيرٌ عشوائي مستمر $E(x) = M = \int x\, f(x)\, dx$

و يعٌين القيمٌة المتوقعة هي في الحقيقٌة قيمٌة المتوسط النظري للمجتمع M أي $E(X)=M$

ب _التبا ينٌ (Variance)

اذا كانت الدالة $g(X) \leftarrow g(X) = (X-M)^2$

فالتوقع الر يأضي في هذه الحالة تبا ينٌ المتغيرٌ العشوائي X ويرٌمز له ب

$$\partial x^2 = E(X-M)^2$$

او $\partial x^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

خواص التوقع الر يأضي:

اذا كان X متغيرٌ عشوائي بدالة كثافة(كتلة) و C1,C2 ثوابت فان

$$1\text{-}E(C1) = C1$$

$$2\text{-}E(C1X) = C1E(X)$$

$$3\text{-}E(C1X+C2) = C1E(X) + C2$$

مثال \

اذا كان متغيرٌ عشوائي بدالة كثافة احتماليةٌ

$$F(X)=2X \qquad , 0<X< 1$$

احسب معدل وتباينٌ المتغيرٌ العشوائي X

الحل \\

$$E(X) = M = \int X f(X)\, dx = \int X(2X)\, dx = \int 2X^2\, dx$$

$$2 \int X^2\, dx = 2X^3 / 3 = 2/3$$

$$S^2 = Var(X) = \int (X-M)^2 f(X)\, dx = \int (X-2/3)^2 (2x)\, dx$$

$$= \int (x^{\wedge} - 4\backslash 3\, x + 4/9)(2x)\, dx$$

$$= \int (2X^3 - 8/3\, X^2 + 8/9\, X)\, dx$$

$$= 1/2x^4 - 8/9X^3 + 4/9X^2$$

$$1/2 - 8/9 + 4/9 = 1/2 - 4/9 = 1/18$$

مثال / من التوز يعٌ الاحتمالي المتقطع الاتي احسب متوسط المجتمع وتباينٌه ؟

X	0	1	2	3	4
P(x)	0.15	0.15	0.35	0.25	0.10

$$M=E(X)= \Sigma X_i P(X_i) =$$
$$(0)(0.15)+(1)(0.15)+(2)(0.35)+(3)(0.25)+(4)(0.10)= 2$$

$$S^2(X)= E(X- M)^2 = (0-2)^2(0.15)+(1-2)^2(0.15)+(2-2)^2(0.35)+(3-2)^2(0.25)+(4-2)^2(0.10)= 1.4$$

مثال/ اذاعلمت ان $P(x)= 3 C x (1/2)^3$, $X= 0,1,2,3$

جد $E(X^2 +1)$

الحل/ نجد التوز يعٌ الاحتمالي للمتغيرٌ العشوائي كالاتي

X	0	1	2	3
P(x)	1/8	3/8	3/8	1/8

$$E(X^2+1)= E(X^2)+1=\Sigma X_i^2P(X_i)+1$$

$$=[(0)^2(1/8)+(1)^2(3/8)+(2)^2(3/8)+(3)^2(1/8)] +1$$

$$= [3/8+ 12/8 + 9/8] + 1$$

$$= [(3+12+9) / 8] + 1$$

$$= (24 / 8) + 1$$

$$= 3+1 = 4$$

مثال /

اذا كان $F(X)=1/2 \quad , 1 \le X \le 3$

أ _ برهن ان $f(X)$ هي دالة كثافة احتماليةٌ.

ب _ جد $P(2 < X < 2.5)$

ج _ جد $P(x \le 1.6)$

الحل\

أ– $\int f(X)dx = \int 1/2\, dx = 1/2x \Big| = 1/2(3- 1) = 1$

ب -

$$P(2 < X < 2.5) = \int F(X)\, dx = 1/2 \int dx = 1/2\, x \Big|$$

$$1/2\,(2.5 - 2) = 1/2\,(0.5) = (1/2)\,(5/10) = 1/4$$

ج -

$$P(X \le 1.6) = \int f(X)\, dx = 1/2 \int d\,x = 1/2\, X \Big|$$

$$1/2(1.6 - 1) = 1/2\,(0.6) = (1/2)(6/10) = 3/10 = 0.3$$

خواص التباينٌ :

يرٌمز للتبا ينٌ ب ∂x^2 او $Var(X)$ فاذا كان a ,b ثوابت فان:

1 - $V(a) = 0$

2 - $V(a X) = a^2 V(x) = a^2 \partial x^2$

3 - $V(X \pm a) = V(X) = \partial x^2$

4 - $V(aX \pm b) = a^2 V(x) = a^2 \partial x^2$

تمارين

١- احسب توقع وتباينٌ المتغيرٌ العشوائي الذي دالته الاحتمالية كمايلّي :

a- $P(X) = X/15$, $X = 1,2,3,4,5$

b- $f(X) = 3x^2$, $0 < X < 1$

٢- من التوز يع الاحتمالي الاتي :

X	8	12	16	20	24
P(X)	1/8	1/6	3/8	1/4	1/12

جد _ $E(X^2)$ _ $E(X)$ _ ا لتبا ينٌ

٣ - اذا كان $0 < X < 1$, $f(X) = 2X$

ا- برهن ان $f(X)$ هي دالة كثافة احتماليةٌ

ب -جد : $P(1/2 < X < 3/4)$

٤- من التوز يعٌ الاحتمالي الاتي :

X	-2	-1	0	1	2
P(X)	1/8	1/4	1/4	1/4	1/8

أ_جد : ∂x^2 ب- $E(X^2 - 2X + 3)$

ج - $V(3X - 4)$, د - $V(-8X)$

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة:

توز يعٌ ذي الحد ينٌ   : Bnomial_Distribution

لنفرض ان تجربة تكررت n من المرات (المحاولات) وان p

يمٌثل احتمال النجاح في كل محاولة و (q) يمٌثل احتمال الفشل في كل محاولة و($q = 1 - p$)

اذا فرضنا X يمٌثل عدد المرات التي يحٌدث فيهٌا النجاح و القيمٌ الممكنة هي (0,1,2,... ,n)

فان X متغيرٌ عشوائي له توز يعٌ ذي الحد ينٌ ودالة كتلة احتماليه هي X,

$P(X) = n C x \; P^{x} (1-P)^{n-x}$, $x = 0,1,2........,n$

$n C x = n! / x! \; (n-x)!$

وتوز يعٌ ذي الحدينٌ يكٌون بالمعلمة P ,n أي ان

$X \sim B(n, p)$

$M = n p$, $\partial x^2 = V(x) = n p q$

مثال

اذا كانت نسبةٌ الوحدات الرديئةٌ المنتجة في معمل ما هي(10/100)

وقد اخذت عينٌة من خمسة وحدات جد احتمال

١-كون عدد الوحدات التالفة او الرديئةٌ تقل عن الربع

٢-ان نجد على الاقل ثلاثة وحدات صالحة في العينٌة

الحل/

$P = 10/100 = 1/10$, $q = 1-p = 1-1/10 = 9/10$, $n = 5$

$x \sim B(5, 1/10)$

$P(X) = 5 C x (1/10)^x (9/10)^{5-x} \quad ,X=0,1,2,3,4,5$

$1- P(X<5/4) = P(X<1.25) = P(0)+P(1)$

$5C0 (1/10)^0 (9/10)^5+5C1 (1/10)(9/10)^4=$

$(9/10)^5 +1/2(9/10)^4 =(9/10)^4 [9/10+1/2]$

$= (9/10)^4[14/10]$

$2-P (X\geq 3)= 1-P(<3)= 1-[P(0)+P(1)+P(2)]$

$1- [(9/10)^4 (14/10) +5C2 (1/10)^2(9/10)^3$

$=1-[(9/10)^4(14/10) + (1/10)(9/10)^3]$

$= 1 - [(9/10)^3((9/10)(14/10) +(1/10))]$

$= 1-[(9 /10)^3(126/100+1/10)]$

مثال/

عائلة مكونة من اربعة اطفال اوجد دالة احتمال بحيثٌ يكٌون لد يهٌم ولدينٌ؟

الحل / نفرض عدد الاولاد X

$P= 1/2 \quad , q= 1/2 \quad .X=0,1,2,3,4$

$X \sim B (4 , 1/2)$

$P(X) =4 C x \; (1/2)^x (1/2)^{4-x}$

$P(X=2) = 4C2 \; (1/2)^2 (1/2)^2 = 3/8$

مثال /

اذا كان لد ينٌا X تٌوزيع حسب توز يعٌ ذي الحدينٌ أي

$X \sim B (n , p)$

و لدينٌا $\partial x^2 = 4/3$, $M=2$, جد n , p ؟

الحل/

$M = n\ p = 2$ 1

$\partial x^2 = n\ p\ q = 4/3$ 2

$\partial x^2 = n\ p\ q = n\ p\ (1-p) = 4/3$

$(2/p)\ p\ (1-p) = 4/3$

$2(1-p) = 4/3$

$2 - 2p = 4/3$

$2 - 4/3 = 2p$

$6 - 4 / 3 = 2p$

$2/3 = 2p$

$P = 1/3$

$n = 2/1/3$

$n = 6$

اذن $X \sim B(6, 1/3)$

توزيع الحوادث النادرة:

توزيع بواسون Poisson Distribution

يعٌرف توز يعٌ بواسون بتوز يعٌ الحوادث النادرة حيثٌ ان احتماليةٌ وقوع حادث صغيرٌجدا وعدد المحاولات كبيرٌة فالمتغيرٌ العشوائي الذي يمٌثل حصول على محاولة ناجحة يكٌون له توز يعٌ بواسون

$P(X) = \lambda^x e^{-\lambda} / x_i$, $x_i = 0, 1, 2, \ldots$, $\lambda > 0$

حيثٌ ان λ هو متوسط(معدل) النجاحات

$X \sim P(\lambda)$

اما الحالات التي يسٌتخدم فيهٌا هذا التوزيعٌ

١-الحوادث التي تحدث عن طريقٌ الصدفة في زمن معينٌ

٢- الاخطاء المطبعيةٌ في صفحة معينٌة من كتاب

٣-عدد البكترياٌ في محلول معينٌ..... الخ

مثال/

اذا علمت ان معدل السياٌرات المتعطلة في شارع معينٌ هو (3) سياٌرات باليوٌم الواحد ماهي احتماليةٌ ان تتعطل سياٌرة واحدة في الشارع المذكور مابينٌ الساعة الثامنة والنصف والتاسعة صباحا؟

الحل /

معدل السياٌرات المتعطلة خلال اليوٌم الواحد هي 3 سياٌرات $=3/24$

معدل السياٌرات المتعطلة خلال 1/2 ساعة هو $3/24 \times (1/2) = 3/48$

$X \sim P(3/48)$

$P(X) = (3/48)^x (e^{-(3/48)}) / xi \quad , xi = 0,1,2,\ldots\ldots$

$P(X=1) = (3/48)(e^{-3/48})$

مثال

اذا كان عدد الاخطاء المطبعيةٌ في كتاب يحٌتوي على 600 صفحة هو 400 خطاجد احتمال ان صفحة واحدة تحتوي على ثلاثة اخطاء مطبعيةٌ؟

الحل/

وجود خطا واحد في الصفحة 1 / 600

وجود خطا في الكتاب كله 400

معدل بصورة عامة $\lambda = n\,p = (1/600)(400) = 2/3$

$X \sim P(2/3)$

$P(X) = (2/3)^x [ẹ^{(2/3)}] / xi$, $xi = 0,1,2.........$

$P(X=3) = ẹ^{(2/3)} \times (2/3)^3 / 3! = ẹ^{(2/3)} \times (2/3)^3 / 6$

مثال/

لوحظ في منطقة معينّة ان من بينٌ كل (1000)شخص هنالك شخص واحد مصاب بمرض معينٌ ما هو احتمال ان من بينٌ(2000)شخص هنالك

أ- ثلاثة اشخاص مصابينٌ بهذا المرض
ب-اكثر من شخصينٌ مصابينٌ بهذا المرض

الحل $\lambda = n\,p = (2000)(0.001) = 2$

$X \sim P(2)$

$P(X) = (2^x)(ẹ^{-2}) / xi$, $xi = 0,1.......$

$P(X=3) = (2^3)(ẹ^{-2}) / 3! = 0.18045$

$P(X>2) = 1 - P(X\leq 2) = 1-[p(x=0)+p(x=1)+P(x=2)]$

$=1-(2^0e^{-2}/0!+2^1e^{-2}/1!+2^2e^{-2}/2!)$

$=1 - (e^{-2} + 2e^{-2} + 2e^{-2})$

$=1 - 0.67668$

$= 0.32332$

تمارين

١-احد الفرق الرياُضيةٌ يكُون احتمال الفوز لها (2/3) فاذا تم اللعب (4) مرات

ما هو احتمال الفوز

- مرتينٌ بالضبط

-على الاقل مرة واحدة

-اكثر من نصف مرات اللعب

٢-اذا كانت نسبة الوفاة نتيجُة الاصابة بمرض معينٌ هي 25% اختيرٌ سبعة اشخاص مصابينٌ بهذا المرض جد احتمال

-على الاقل ثلاث منهم سيمٌوتون

-اثنان على الاكثر سيشٌفون

٣-اذا كان 4%من انتاج معمل هو سلع رديئٌة جد احتمال وجود سلعتينٌ على الاقل رد يئٌة في عينٌة تتكون من 100 سلعة ؟

٤-شركة تأجيرٌ سيأٌرات تملك اربع سيأٌرات فاذا افترضنا معدل الطلبات على هذه السيأٌرات هو 2.5 باليوٌم جد احتمال,

-ان تتلقى الشركة عدد من الطلبات اكثر من عدد سيأٌرات الشركة

-ان يمٌريوٌم دون ان تتلقى هذه الشركة أي طلب على هذه السيأٌرات

التوز يعّات المستمرة Continuous Distributions

التوز يعٌ الطبيعٌي Normal Distribution

اذا كان المتغيرٌ العشوائي X تٌوزيع توز يعٌا طبيعٌياٌ وله وسط حساب μ وتباينٌ 2^∂ وان معادلة المنحني الطبيعٌي هي:

$$f(x)= \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\delta^2}} \qquad - \infty \; X < < \infty$$

خصائص التوز يعٌ الطبيعٌي:

-التمثيلٌ البيأين له منحني يشٌبه الجرس ومتماثل بالنسبة للوسط

-تٌساوى الوسط و الوسيطٌ والمنوال و يقٌع في المركز

-المنحني متصل

-يقٌترب المنحني من المحور *x* ولكنه لا يمٌسه

-المساحة تحت المنحني تساوي *1* او*100%*

يتٌصف التوز يعٌ الطبيعٌي الذي وسطه μ وانحرافه المعيأري ∂ بالخصائص الاتيةٌ

-يقٌع *68%* تقر يبًا من البيأنات ضمن الفترة $\partial + \mu \;, \partial - \mu$

-يقٌع *95%* تقريبًا من البيأنات ضمن الفترة $2\partial - \mu \;, 2\partial + \mu$

-يقٌع *99%* تقريبًا من البيأنات ضمن الفترة $3\partial - \mu \;, 3\partial + \mu$

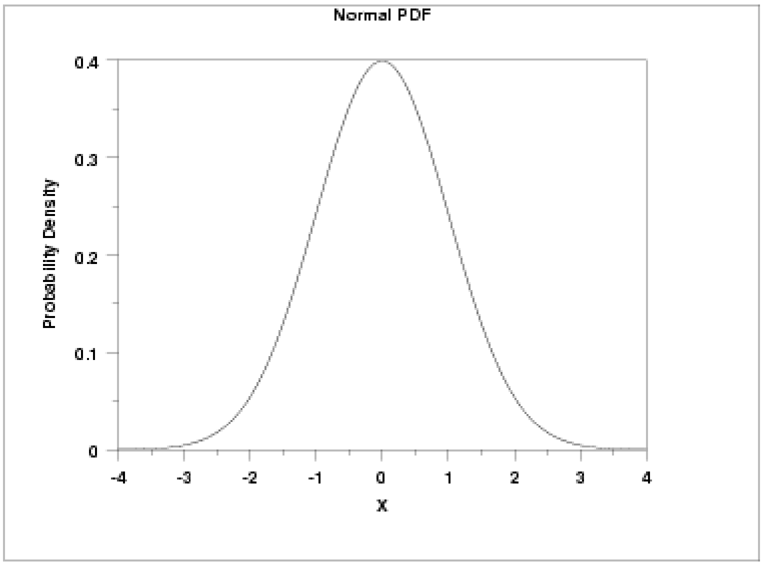
$$X \sim N(\mu, \partial X^2)$$

التوزيع الطبيعي **Normal Distribution**

يقٌال للمتغيرٌ العشوائي X بانه له التوز يع الطبيعٌي القياٌسي

بوسط حسابي يسٌاوي صفر وتباينٌ يسٌاوي *Standard Normal Distribtuion*
واحد اذا كانت دالة الكثافة الاحتماليةٌ للمتغيرٌ العشوائي Z بالصيغٌةالتاليةٌ

$$F(Z)= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} \qquad -\infty < z < \infty$$



مجالات استخدام التوز يعٌ الطبيعٌي:

-الاحصاءات ا لبايلٌوجيةٌ كالوفيأت والولادات في فترة معينٌة وفي كل مكان معين

-الظواهر الاجتماعيةٌ كالزواج والطلاق تخضع لتوز يعٌ قر يبٌ من التوز يعٌ الطبيعٌي
وكذلك نسبة الدخول ومستوى الانتاج

-المقاييسٌ النفسيةٌ والعقليةٌ كالذكاء والقابليأت العقليةٌ

بما ان *f(X)* دالة كثافة احتماليةٌ *P.D.F* لذا فان $\int f(x)dx = 1$

$$X \sim N(0,1)$$

والان اصبح من السهل تحويلٌ المتغيرّات العشوائيةٌ *X* التي تتوزع توز يعًا طبيعًا الى المتغيرّات عشوائيةٌ *Z* والتي تتوزع توز يعٌ طبيعٌي قيأسي وذلك بالطريقةٌ التاليةٌ

$$Z = \frac{(x-\mu)}{\delta}$$

مثلا :اذا كانت *X* بينٌ الحدينٌ *x1,x2* فان *Z* لها ستكون بين *Z1,Z2* حيثٌ ان

$$Z1 = \frac{(x1-\mu)}{\delta} \qquad Z2 = \frac{(x2-\mu)}{\delta}$$

ملاحظة : اذا كان متغيرٌ عشوائي له التوز يعٌ الطبيعٌي فان

$$P(X < x) = N(x)$$

باستخدام جدول التوز يعٌ الطبيعٌي القيأسي

امثلة:

1- $X \sim N(3,4)$ فان $f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\delta^2}}$

اذن $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-3)^2}{8}}$

2- $X \sim N(-2,9)$ فان $f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\delta^2}}$

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x+2)^2}{18}}$$

٣- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-3)^2}$

الحل:

بما ان- (x-3) ^2 = (x- μ)^2

اذن μ = 3

$$\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{1}{\delta\sqrt{2}} = 1$$

$$\rightarrow \delta = 1/\sqrt{2}$$

$$\rightarrow \delta\ \text{^}2 = 1/2$$

مثال:

اذا كان الوسط الحسابي لتوز يعٌ طبيعٌي هو (μ=50) والانحراف القيأسي(المعيأري) له هو (∂ =10) جد قيمٌة z1,z2 بحيثٌ ان

P (45 < X < 62) = P (z1 < Z < z2)

علما بان : P(z2<1.2) = 0.8849 , P(z1<0.5) = 0.691

الحل:

$$Z1 = \frac{(x1-\mu)}{\delta} = \frac{(45-50)}{10} = -0.5$$

$$Z2 = \frac{(x2-\mu)}{\delta} = \frac{(62-50)}{10} = 1.2$$

P (45<X<62) = P (- 0.5< Z< 1.2)

P (- 0.5< Z< 1.2) = P (Z < 1.2) - P (Z < - 0.5)

= P (Z < 1.2) – [1- P (Z < 0.5)]

= 0 .8849 - [1- 0.691]

= 0.8849 - 0.3085

= 0.5764

مثال:

اذا كان X له التوز يعٌ الطبيعٌي $X \sim N(3,4)$ جد $P(X \le 2)$

الحل:

$$P(X \le 2) = P\left(\frac{(x-\mu)}{\delta} \le \frac{2-3)}{2}\right)$$

$$= P(Z \le -1/2)$$

$$= N(-1/2)$$

$$= 1 - N(0.5) = 1 - 0.691$$

$$= 0.309$$

مثال:

اذا كانت درجات الحرارة خلال شهر نيسّان في مدينٌة ما تتوزع توز يعًا طبيعٌياً بوسط حسابي هو (20 c) وانحراف معيأري (2c) جد احتمال ان تكون درجة الحرارةلاحد الايأم

-اقل من 18

-اكثر من 22 c

-بينٌ 18 c و22

الحل:

$$X \sim N(20, 4)$$

$$P(X < 18) = P\left(\frac{(x-\mu)}{\delta} < \frac{(18-20)}{2}\right)$$

$$P(z < -2/2) = N(-1) = 1 - N(1)$$

$$= 1 - 0.841 = 0.159$$

$$P(X > 22) = 1 - P(X \le 22) = 1 - P\left(Z \le \frac{(22-20)}{2}\right) = 1 - N(1)$$

$$= 1 - 0.841 = 0.159$$

$$P(18 < X < 22) = P(X < 22) - P(X < 18)$$

$$P\left(Z < \frac{(22-20)}{2}\right) - P\left(Z < \frac{(18-20)}{2}\right)$$

$$= N(1) - N(-1)$$

$$N(1) - [1 - N(1)]$$

$$N(1) - 1 + N(1)$$

$$= 2N(1) - 1$$

$$= 2(0.841) - 1$$

$$= 1.682 - 1$$

$$= 0.682$$

ملاحظة

$$F(-X) = 1 - F(X)$$

تمارين

-اذاكان متوسط الدونم من الذرة الصفراء هو(٨٠٠) كغم وبانحراف قياسي قدره (٤٠)كغم وعلى فرض ان كمية المحصول يتبع التوزيع الطبيعي ماهو احتمال ان نباتا يعطي محصولا بين (٧٧٨-٨٣٤)كغم ؟

– $X \sim N(2,25)$ اوجد

P(X<0)

P(0<X<10)

P(|X| <10)

٣- اذا كان اوزان الف طفل عند الولادة يتوزع توزيعا طبيعيا بوسط حسابي (٨,٥) وانحراف قياسي (معياري) قدره(٠,٥) باون احسب عدد الاطفال باوزان

– اقل من (٩,٧)

- بين (٧,٢ -٨,٥)

الفصل الخامس

اختبار الفرضيات   Tests of Hypotheses

الفرضية الاحصائية   Statistical Hypothesis :

هي عبارة عن ادعاء او تصريحٌ(قد يكٌون صائبا او خطأ) حول معلمة او اكثر لمجتمع او لمجموعة مجتمعات عندما ناخذ عينٌة من مجتمع ما لمعرفة فرضيةٌ معينٌة نستخدم جميعٌ المعلومات من العينٌة للوصول الى قرار بقبول او رفض الفرضيةٌ الاحصائيةٌ فالاحصائي او الباحث يحٌاول دائما ان يضعٌ الفرضيةٌ بشكل يأٌمل ان يرٌفضها مثلا:

اذا اراد الباحث ان يقٌارن بينٌ صنفا جديدٌا من الحنطة مع الصنف المحلي . فانه يضعٌ فرضيةٌ فحواها بانه لايوٌجد فرق معنوي او جوهري بينٌ الصنفينٌ وكذلك اذا اراد ان يبٌرهن بان طريقٌة جديدٌة من طرق التدريسٌ احسن من غيرٌها فانه يضعٌ فرضيةٌ تقول بعدم وجود فرق بينٌ طرق التدريسٌ هذه وهكذاان الفرضيةٌ التي يضٌعها الباحث على امل ان يرٌفضها تدعى بفرضيةٌ العدم

(Null Hypothesis) ويرٌمز لها ب H0 وفرضنا لفرضيةٌ العدم يقٌودنا الى قبول فرضيةٌ بديلٌة عنها هذه الفرضيةٌ تدعى الفرضيةٌ البديلٌة (Al ternative Hypothesis) ويرٌمز لها ب H1 .

-مستوى المعنويةٌ   Level of Significant

او مستوى الاحتمال   Probability Level

او حجم الاختبار   Size of the Test

ويعٌرف مستوى المعنويةٌ(Level of Significant)

بانه درجة الاحتمال الذي يرٌفض به فرضيةٌ العدم (H0) عندما تكون صحيحةٌ او(بعبارة اخرى هواحتمال الوقوع في الخطا من النوع الاول) ويرٌمز لها ب ($\propto$)

يرٌمز لدرجة الاحتمال $\propto$ هذه الدرجة ($\propto$)تحدد من قبل الباحث وهي اما (0.01) او (0.05)على الاكثر . عندما ناخذ مستوى احتمال (0.01) يعٌني بانه اذا تكررت التجربة لعدد كبيرٌ من المرات فمن المحتمل ان نرفض فرضيةٌ العدم (H0) بالرغم من انها صحيحةٌ مرة واحدة كل(100) مرة أي ان احتمال الوقوع في الخطا في الاسستنتاج من النوع الاول هو (0.01)او اقل وان الاستنتاج يكٌون صائبا وسليمٌ بدرجة ثقة (0.99) كما ان مستوى احتمال (0.05)يعٌني بانه فمن المحتمل ان نرفض فرضيةٌ العدم (H0)وهي صحيحةٌ خمس مرات في كل (100) مرة فاحتمال الوقوع في الخطا في الاسستنتاج من النوع الاول هو (0.05)او اقل

بينّما الاسستنتاج يكّون صائبا وسليمٌ بدرجة ثقة (0.95) اما اذا قبلنا فرضيةٌ العدم (H0) يدل ذلك على وجود فرق معنوي.

المختبر الاحصائي:

عبارة عن متغبيرٌ عشوائي له توز يعٌ معلوم ويصّف المختبر الاحصائي العلاقة بينٌ القيمٌ النظريةٌ للمجتمع والقيمٌ المحسوبة للعينٌة

منطقة الرفض- او المنطقة الحرجة:

ان منطقة الرفض هي تلك المنطقة التي اذا وقعت قيمٌة المختبر الاحصائي داخلها تسبب في رفض فرضيةٌ العدم (H0)

اما المنطقة الاخرى غيرٌ منطقة الرفض تسمى منطقة القبول(H1) وهي المنطقة التي اذا وقعت قيمٌة المختبر الاحصائي داخلها تسبب في قبول فرضيةٌ العدم (H0)

اختبارات تتعلق بالمتوسطات

اختبارات تتعلق بمتوسط واحد

الاختبار يتٌعلق بالفرضيةٌ الاتية $H0: \mu = \mu 0$

حيثٌ μ هو الوسط الحسابي للمجتمع μ 0 هو قيمٌة معينٌة معلومة , علما ان تباينٌ المجتمع ∂^2 معلوم وبعبارة اخرى سنقارن هنا متوسط عينٌة بمتوسط المجتمع لنرى هل ان العينٌة تنتمي لهذا المجتمع ام لا؟

فاذا كانت نتيجٌة الاختبار بالا يجّاب ففي هذه الحالة يكّون متوسط العينٌة المحسوبة لا يخٌتلف اختلافا جوهرياً عن متوسط المجتمع

صياٌغة فرضيتٌا العدم والبد يلٌة:

عند اختيارٌ متوسط المجتمع μ يسٌاوي قيمٌة معينٌة μ 0 ضد فرضيةٌ القائلة بان μ لايسٌاوي μ 0 فاننا نكتب الفرضيتٌان بالشكل الاتي:

$$H0: \mu = \mu 0$$

$$H1: \mu \neq \mu 0$$

عند رفض فرضيةٌ العدم فان الفرضيةٌ البديلٌة تاخذ مدى من القيمٌ يشٌمل جميعٌ القيمٌ الممكنة لمعلمة ا لمجتمع

مثلا:

عند اختبار درجة تعبئة معمل تعليبّ معجون الطماطة التي تزن(250) غم فاننا نضع فرضيةٌ العدم H0 بان متوسط وزن علبة المعجون هو (250)غم, اما الفرضيةٌ البديلٌة فهي في هذه الحالة ان متوسط علبة المعجون لا تساوي (250) غم أي:

$H0: \mu = 250$

$H1: \mu \neq 250$

فاذا رفضنا فرضيةٌ العدم وقبلنا الفرضيةٌ البديلّة يعٌنيَ ذلك ان متوسط وزن العلبة لا يسّاوي (250) غم وهذا معناه ان متوسط الوزن قد يكٌون اكثر او اقل من (250) غم

مثال أخر:

نفرض ان وزارة الصحة تريدٌ اختبار فاعليةٌ دواء مستحدث عن الدواء الحالي في علاج مرض معينٌ فاذا كان متوسط شفاء المرضى المصابينٌ بهذا المرض بعد تناولهم الدواء الحالي هو (70%) أي ان (p=0.70) بينٌما اذا اعطيتٌ للمرضى الدواء الجديدٌ الذي قيلٌ بانه اكثر فعاليةٌ من الدواء الحالي فانp في هذه الحالة ستكون اكثر من (70%)أي (p>0.70) أي ان فرضيةٌ العدم والبديلٌة ستكون

$H0: p = 0.70$

$H1: p > 0.70$

واذا كان العكس فان الفرضيتّان تكون:

$H0: p = 0.70$

$H1: p < 0.70$

اتخاذ القرارات:

حالات الاختبار	$\propto:\propto$ ترفض H0 اذا كانت قيمٌة	$\propto: 0.05$ ترفض H0 اذا كانت قيمٌة	$\propto: 0.01$ ترفض H0 اذا كانت قيمٌة
$H0: \mu = \mu0$ $H1: \mu \neq \mu0$	$Z \geq Z\frac{\propto}{2}$ & $Z \leq - Z\frac{\propto}{2}$ Or $\backslash Z\backslash \geq Z\frac{\propto}{2}$	$Z \geq 1.96$ & $Z \leq - 1.96$ Or $\backslash Z\backslash \geq 1.96$	$Z \geq 2.58$ & $Z \leq - 2.58$ Or $\backslash Z\backslash \geq 2.58$
$H0: \mu = \mu0$ $H1: \mu > \mu0$	$Z \geq Z\propto$	$Z \geq 1.65$	$Z \geq 2.33$
$H0: \mu = \mu0$ $H1: \mu < \mu0$	$Z \leq - Z\propto$	$Z \leq - 1.65$	$Z \leq - 2.33$

مثال:

ينٌتج معمل للتعليبٌ قناني فاكهة مفروض ان يكٌون متوسط وزنها(15) باوند وبانحراف قياٌسي هو(0.5)باوند للتاكيدٌ من ان المعمل لازال ينٌتج عند المستوى المطلوب اخذت عينٌة مكونة من (50) علبة فوجد ان متوسط وزنها(14.8) باوند فاذا كان وزن العلبة متغيرٌ عشوائي تتوزع توزيعٌ طبيعٌياً فهل تدل العينٌة على ان انتاج المعمل لازال (15) باوند

باختبار $\propto= 0.01$ كمستوى معنويةٌ؟

الحل:

- فرضيةٌالعدم $H0: \mu = 15$

- ا لفرضيةٌ البديلٌة $H1: \mu \neq 15$

- مستوى المعنو ية $\propto= 0.01$

- منطقة الرفض $Z \geq 2.58$ or $Z \leq -2.58$

- المختبر الاحصائي $x=14.8$, $n = 50$, $\delta = 0.5$

$$Z = \frac{x-\mu 0}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} = \frac{14.8-15}{\frac{0.5}{\sqrt{50}}} = -2.83$$

القرار \

بما ان قيمّة Z المحسوبة(2.83-) هي اقل من قيمّة Z الجدولية (2.58-) أي ان قيمّة Z المحسوبة تقع في منطقة الرفض لذا ترفض فرضيةٌ العدم وتقبل ا لفرضيةٌ البديلّة

H0 : μ = 15

H1 : μ ≠15

أي ان المعمل لاينُتج علب اوزانها (15) باوند

مثال:

كان معدل انتاج احد الاصناف المحليةٌ من الحنطة في السنينٌ الخمس السابقة هو 1600 كغم / هكتار وقد ادعى احد المزارعينٌ بانه قد استنبط سلالة من هذا الصنف يعٌطي انتاج اكثر ولاختبار صحة الادعاء اخذت عينٌة عشوائيةٌ مولفة 81 من نباتا من السلالة الجديدٌة ووجد ان متوسط انتاجها 1630 كغم /هكتار بانحراف قيأسي 15 كغم هل نتائج العينٌة تؤيدٌ ادعاء الباحث تحت مستوى معنوي 0.01 ؟

الحل\

- فرضيةٌالعدم H0: μ = 1600

- الفرضيةٌ البديلّة H1: μ >1600

- مستوى المعنوية $\propto = 0.01$

- منطقة الرفض Z ≥ 2.33

- المختبر الاحصائي x=1630 , n = 81 , δ = 15

$$Z = \frac{x-\mu 0}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} = \frac{1630-1600}{\frac{15}{\sqrt{81}}} = 18$$

-القرار \

بما ان قيمٌة Z المحسوبة(18)هي اكبر من قيمٌة Z الجدوليةٌ (2.33) أي ان قيمٌةZ المحسوبة تقع في منطقة الرفض لذا ترفض فرضيةٌ العدم وتقبل ا لفرضيةٌ البديلٌة أي ان ادعاء المزارع

كان صحيحٌا

مثال/

ادعت احد شركات انتاج البنجر السكري بانها انتجت صنفا من البنجر السكري ونسبة السكر فيه لا تقل عن 0.18 غم / أي (18 لكل 100) غم بَانحراف قياسي قدره (2.5) غم لَاختبارهذٌا الاعاء اخذت عينة عشوٰ أئية مؤلفة من (36) ثمرة من البنجر حسبت منه نسبة السكر فكان وسَطٍ إ الحسابي (17.2 غم /100) فهل ادعاء الشركة عند مستوى احتمال (0.05) مقبولُا؟

الحل\

- فرضيةٌالعدم $H0: \mu \geq 18$

- الفرضيةٌ البديلٌة $H1: \mu < 18$

- مستوى المعنوية $\propto\ = 0.05$

- منطقة الرفض $Z \leq -1.65$

- المختبر الاحصائي $x=17.2\ ,\ n = 36\ ,\ \delta = 2.5$

$$Z = \frac{x-\mu0}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} = \frac{17.2-18}{\frac{2.5}{\sqrt{36}}} = -1.9$$

-القرار \

بما ان قيمٌة Z المحسوبة (1.9-)هي اقل من قيمٌة Z الجدوليةٌ (1.65-) أي ان قيمٌةZ المحسوبة تقع في منطقة الرفض لذا ترفض فرضيةٌ العدم وتقبل ا لفرضيةٌ البديلٌة أي ان

ادعاء الشركة غيرٌ صحيحٌ تحت مستوى احتمال   0.05

واجب/

نفس المثال ولكن استخدم $\propto = 0.01$

اختبارات تتعلق بمتوسطينٌ Tests Concerning Two Means

في بعض الاحيأن نحتاج مقارنة متوسطي مجتمعينٌ , فمثلا نقارن بينٌ نوعينٌ من التغذيةٌ للاطفال اومقارنة صنفينٌ من الذرة الصفراء..............الخ.

ففي هذه الحالة ستتصمن الفرضيةٌ مقارنة الفرق بينٌ متوسطينٌ هما 1 µ, 2 µ وتباينٌهما$\delta 1$,

$\delta 2$ وسوف نختبر الفرضيةٌ القائلة ان الفرق بينٌ المتوسطينٌ يسٌاوي قيمٌة معينٌة أي

H0: µ1 -µ2 =d0

حيثٌ ان d0 هي القيمٌة المعلومة اما الفرضيةٌ البديلٌة H1 ستكون احدى الفرضيأت الاتيةٌ

H1: µ1 -µ2 ≠d0

H1: µ1 -µ2>d0

H1: µ1 -µ2 <d0

هذاوعندما تكون d0 = 0 فان معنى فرضية العدم H0 ان المتوسطين متساويان اما قيمة Z (المختبر الاحصائي) فهي :

$$Z = \frac{(x1-x2)-d0}{\sqrt{(\frac{\delta 1^2}{n1}+\frac{\delta 2^2}{n2}}}$$

فاذا استخدمنا مستوى معنوية $\propto = 0.05$ فاننا نستطيع تحديد منطقتي الرفض والقبول اعتمادا على الفرضية البديلة H1

H1: µ1 -µ2 ≠d0

فان منطقة الرفض

$Z \geq Z_{\frac{\propto}{2}} \geq 1.96$ او $Z \leq Z_{\frac{\propto}{2}} \leq -1.96$

$$H1: \mu 1 - \mu 2 > d0$$

فان منطقة الرفض

$$Z \geq 1.65$$

$$H1: \mu 1 - \mu 2 < d0$$

فان منطقة الرفض

$$Z \leq -1.65$$

مثال\

اخذت عينة عشوائية مؤلفة من(80)مصباح من انتاج الشركة A فكان متوسط عمر

المصباح (1258) ساعة بانحراف قياسي قدره(94) ثم اخذت عينة عشوائية اخرى

مؤلفة من (60)مصباح من الشركةB , فكان عمر المصباح (1029)ساعة بانحراف قياسي قدره (68) وبسبب ارتفاع سعر المصباح المنتج من الشركةA تقررشراء مصابيح من

الشركة B الا اذا كان عمر المصباح من شركة A يزيد على عمر المصباح من الشركةB بقدار اكثر من (200)ساعة فعندها سيشترى من شركةA , فمن اي الشركتين سيشترى المصباح ؟ اختيار مستوى المعنوية $\propto = 0.01$

الحل\

- فرضيةٌالعدم $H0: \mu 1 - \mu 2 = 200$

- الفرضيةٌ البديلٌة $H1: \mu 1 - \mu 2 > 200$

- مستوى المعنوية $\propto = 0.01$

- منطقة الرفض $Z \geq 2.33$

- المختبر الاحصائي

$$Z = \frac{(x1 - x2) - d0}{\sqrt{(\frac{\delta 1^2}{n1} + \frac{\delta 2^2}{n2}}} = \frac{(1258 - 1029) - 200}{\sqrt{(\frac{(94)^2}{80} + \frac{(68)^2}{60}}} = 2.12$$

-القرار \

بما ان قيمّة Z المحسوبة (2.12)هي اقل من قيمّة Z الجدوليةٌ (2.33)أي ان قيمّةZ المحسوبة تقع في منطقة القبول لذاتقبل فرضيةٌ العدم وترفض البديلٌة وعليه نشتري المصابيح من الشركة B

مثال\

كان متوسط درجات طلبةالصف الثاني احصاء الشعبة(أ) البالغ عددهم (50) طالب وطالبة في مادة الاحصاء هو (72)درجة والانحراف القياسي كان(36) في حين ان متوسط درجات الشعبة (ب) هو(76) درجة وانحراف قياسي هو(25) مع العلم ان عددهم (56) طالب وطالبة .هل تعتقد بوجود فرق بين مستوى اداء طلبة الشعبتين في هذا الامتحان عند مستوى معنوية (0.05)؟

الحل\

- فرضيةٌالعدم $H0: \mu 1 - \mu 2 = 0$

- الفرضيةٌ البديلٌة $H1: \mu 1 - \mu 2 \neq 0$

- مستوى المعنوية $\propto = 0.05$

- منطقة الرفض $Z \geq 1.96$ او $Z \leq -1.96$

المختبر الاحصائي

$$Z = \frac{(x1-x2)-d0}{\sqrt{(\frac{\delta 1^2}{n1}+\frac{\delta 2^2}{n2}}} = \frac{(72-76)-0}{\sqrt{(\frac{(36)^2}{50}+\frac{(25)^2}{56}}} = -0.66$$

- القرار \

بما ان قيمّة Z المحسوبة (0.66 -)هي اكبر من قيمّة Z الجدوليةٌ (1.96 −)أي ان قيمّةZ المحسوبة تقع في منطقة القبول لذاتقبل فرضيةٌ العدم وترفض البديلٌة وعليه لايوجد فرق جوهري بين الشعبتين تحت مستوى معنوية 0.05

اختبارات تتعلق بالنسب Tests Concerning Proportion

١- اختبارات تتعلق حول نسبة واحدة (من توزيع ذي الحدين)

Test Concerning one Proportion

تتضمن الفرضية هنا مقارنة النسبة P من توزيع ذي الحدين بقيمة معينة P0 اي

$$H0: P = P0$$

حيث ان هي معلمة توزيع ذي الحدين و قيمة معلومة هنا الاختبار التقريبي لعينة حجمها كبير معتمدا على انه اذا كان حجم العينة كبيرا وان لا تكون قريبة جدا من (الصفر او لواحد) فان توزيع ذي الحدين يقترب من التوزيع الطبيعي هنا هو

$$Z = \frac{p^{\wedge} - p0}{\sqrt{\frac{p0q0}{n}}} \quad , \quad P^{\wedge} = \frac{x}{n}$$

فاذا كانت فرضية العدم H0 صحيحة فان توزيع المعاينة ل Z هو مقرب من التوزيع الطبيعي القياسي فاذا استخدمنا مستوى معنوية $\propto = 0.05$ ان منطقة الرفض اي (المنطقة الحرجة) تكون

١- اذاكانت الفرضية البديلة هي $H1: P \neq P0$

اي اختبار ذو طرفي فان منطقة الرفض ستكون

$$Z \geq Z_{\frac{\propto}{2}} \geq 1.96 \quad \text{او} \quad Z \leq Z_{\frac{\propto}{2}} \leq -1.96$$

٢- اذاكانت الفرضية البديلة هي

$$H1: P > P0$$

اي اختبار ذو طرف واحد (طرف اليمين) فان منطقة الرفض ستكون

$$Z \geq 1.65$$

٣- اذاكانت الفرضية البديلة هي

$$H1: P < P0$$

اي اختبار ذو طرف و احد (طرف اليسار) فان منطقة الرفض ستكون

$$Z \leq -1.65$$

مثال\

لاعب كرة سلة نسبة اصابته للهدف في السنة السابقة (60%) فاذا في ال(100) رمية الاخيرة في هذه السنة سجل (70) هدف فهل تعتبر ان لعبه قد تحسن ؟ اختار مستوى معنوية (احتمال5%)؟

الحل\

- فرضيةٌالعدم $H0: p = 0.60$

- الفرضيةٌ البديلٌة $H1: p > 0.60$

- مستوى المعنوية $\propto = 0.05$

- منطقة الرفض $Z \geq 1.65$

-المختبر الاحصائي

$$P0 = 0.60, \quad q0 = 1 - p0 = 1 - 0.60 = 0.40 \quad , p\hat{} = \frac{x}{n} = \frac{70}{100} = 0.70$$

$$Z = \frac{p\hat{} - p0}{\sqrt{\frac{p0q0}{n}}} = \frac{0.70 - 0.60}{\sqrt{\frac{(0.60)(0.40)}{100}}} = 2.04$$

-القرار \

بما ان قيمٌة Z المحسوبة (2.04)هي اكبر من قيمٌة Z الجدوليةٌ (1.65)أي ان قيمٌةZ المحسوبة تقع في منطقةالرفض لذاترفض فرضيةٌ العدمH0 وتقبل البديلٌة H1 اي ان نسبة اصابة الهدف من قبل هذا اللاعب قد تحسن هذه السنة

مثال\

توصل فريق طبي الى صنع دواء معين بامكانه شفاء مرضى مصابين بنوع من مرض معين بنسبة 80%, وبهدف تعميم هذا الدواء قامت احدى الشركات صناعة الادوية باختبار هذا الدواء على عينة من المرضى قوامها (120) مريض قبل البدء بعملية تصنيع هذا الدواء تجاريا فتبين لها ان عدد الذين شفوا من هذا المرض (86) مريض , هل يمكن القول ان ادعاء هذا الفريق الطبي صحيح عند مستوى معنوية $\propto = 0.01$؟

الحل\

- فرضيةٌالعدم $H0: p = 0.80$

- الفرضيةٌ البديلٌة $H1: p \neq 0.80$

- مستوى المعنوية $\propto = 0.01$

- منطقة الرفض $Z \leq -2.58$ او $Z \geq 2.58$

المختبر الاحصائي

$$P0= 0.80, \quad q0 =1-p0 = 1-0.80 = 0.20 \quad , p\hat{}= \frac{x}{n} = \frac{86}{120} = 0.72$$

$$Z = \frac{p\hat{}-p0}{\sqrt{\frac{p0q0}{n}}} = \frac{0.72-0.80}{\sqrt{\frac{(0.80)(0.20)}{120}}} = -2.16$$

- القرار \

بما ان قيمٌة Z المحسوبة (2.16-) هي اكبر من قيمٌة Z الجدولية (-2.58)أي ان قيمٌةZ المحسوبة تقع في منطقةالقبول لذاتقبل فرضيةٌ العدمH0 وترفض البديلٌة H1 اي ان ادعاء الفريق الطبي صحيح وان السوق يكون لعوامل الصدفة

٢-- اختبارات تتعلق بنسبتين Tests Concerning two Proportion

وتشمل فرضية العدم في هذه الحالة على ان الفرق بين نسبتين او(معلمتين لتوزيع من ذي الحدين) تساوي قيمة معينة اي

$$H0 : P1 - P2 = d0$$

حيث ان P2, P1 هما نسبتين لمجتمعين تحت الدراسة ان الاحصائية المناسبة في هذه الحالة تعتمد على المتغير العشوائي $P1^{\wedge} - P2^{\wedge}$

وسنناقش حالتين

الحالة الاولى : عندما تكون d0=0 اي ان فرضية العدم تصبح

$$H0 : P1 - P2 = 0$$

وتتلخص طريقة الاختبار باختيار عينتين عشوائيتين ذات حجم n1,n2 كبيرين من توزيعين من ذي الحدين وتحسب نسبة النجاح في كلا التوزيعين $P^{\wedge}1$, $P^{\wedge}2$ للعينيتين

$$Z = \frac{p1 - p2}{\sqrt{\frac{p1q1}{n1} + \frac{p2q2}{n2}}} = \frac{p1 - p2}{\sqrt{p^{\wedge}q^{\wedge}(\frac{1}{n1} + \frac{1}{n2})}} \quad , , \ p^{\wedge}1 = \frac{x1}{n1} \quad , \ p^{\wedge}2 = \frac{x2}{n2}$$

هي قيمة من قيم المتغير الطبيعي القياسي Z عندما تكون فرضية العدمH0 صحيحة وان n1,n2 كبيرين ولحساب المختبر الاحصائيZ نحتاج تقديرP الموجودة تحت الجذر P و هذا يحسب من ادماج كلا العينتين كالاتي $p^{\wedge} = \frac{x1 + x2}{n1 + n2}$

حيث x1 عدد النجاحات في العينة الاولى وx2عدد النجاحات في العينة الثانية وبذلك تكون قيمة Z هي

$$Z = \frac{p1 - p2}{\sqrt{p^{\wedge}q^{\wedge}(\frac{1}{n1} + \frac{1}{n2})}}$$

ونحسب منطقة الرفض (الحرجة) كما في السابق

فاذا استخدمنا مستوى معنوية $\propto = 0.05$ ان منطقة الرفض

١- اذاكانت الفرضية البديلة هي $H1: P \neq P0$

اي اختبار ذو طرفين فان منطقة الرفض ستكون

$Z \geq Z\frac{\propto}{2} \geq 1.96$ او $Z \leq Z\frac{\propto}{2} \leq -1.96$

٢- اذاكانت الفرضية البديلة هي

$H1: P > P0$

اي اختبار ذو طرف واحد (طرف اليمين) فان منطقة الرفض ستكون

$Z \geq 1.65$

٣- اذاكانت الفرضية البديلة هي

$H1: P < P0$

اي اختبار ذو طرف و احد (طرف اليسار) فان منطقة الرفض ستكون

$Z \leq -1.65$

مثال\

في بحث تسويقي لاستطلاع راي عينة من الرجال قوامها (250) رجل واخرى من النساء قوامها (300) امراءة بخصوص جودة نوع معين من الثلاجات, وتبين ان عدد الاجابات بكونها ثلاجة جيدة من بين الرجال بلغ (215) اجابة و(275) اجابة من النساء, هل تعتقد بوجود فرق جوهري بين راى الرجال والنساء فيما يخص جودة هذا النوع من الثلاجات عند مستوى معنوية $\propto = 0.05$

الحل\

نفرض ان p1 تمثل نسبة الاجابات الجودة الثلاجة من الرجال

نفرض ان p2 تمثل نسبة الاجابات الجودة الثلاجة من النساء

- فرضيةُالعدم $H0: p1 = p2 = 0$

- الفرضيةٌ البديلّة $H1: p1 \neq p2 \neq 0$

- مستوى المعنوية $\propto\ = 0.05$

- منطقة الرفض $Z \geq 1.96$ and $Z \leq -1.96$

المختبر الاحصائي

$$p1\hat{}=\frac{x1}{n1} = \frac{215}{250} = 0.86 \quad , \quad p2\hat{} =\frac{x2}{n2} = \frac{275}{300} = 0.92$$

$$p\hat{} = \frac{x1+x2}{n1+n2} = \frac{215+275}{250+300} = 0.89$$

$$q\hat{}=1-0.89 =0.11$$

$$Z =\frac{p\hat{}-p0}{\sqrt{p\hat{}q\hat{}(\frac{1}{n1}+\frac{1}{n2})}} = \frac{0.86-0.92}{\sqrt{(0.89)(0.11)(\frac{1}{250}+\frac{1}{300})}} = \frac{-0.06}{0.027} =-2.22$$

- القرار

بما ان قيمّة Z المحسوبة (-2.22)هي اقل من قيمّة Z الجدوليةٌ (-1.96)أي ان قيمّةZ المحسوبة تقع في منطقةالرفض لذاترفض فرضيةٌ العدمH0 وتقبل البديلّة H1 اي ان هنالك فرق جوهري بين راي الرجال والنساء فيما يخص جودة هذا النوع من الثلاجات

مفهوم درجة الحريةٌ Concept of degree of freedom

لتوضيحٌ هذا المفهوم نفرض ان عينّة حجمها (5) أي (n=5) وكما هو معلوم فان مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي يسّاوي صفر أي ا ن $\sum_1^n(xi - x)=0$

لذا سيكٌون لد ينّا (5) انحرافات ولكن d1,d2, d3,d4,d5

فاذا عرفنا اربعة من هذه الانحرافات فاننا بسهولة سنعرف الخامس فليسٌ لنا حريةٌ الاختيأر قيمّة له لانه قد حددت قيمّة بعد معرفة القيمّ الاربعة

مثلا

d1= 5 , d2 =-3 ,d3 =1, d4=6

والمطلوب ايجّاد قيمّة d5 هي

d1 + d2 +d3 +d4+d5 = 0

$$5+(-3)+1+6+d5=0$$

$$d5=-9$$

لذا فاذا كان لدينًا عينٌة حجمها n فلنا الحريةٌ في الاختيأر قدرها (n-1) لاختيأر قيمٌ الانحرافات الوسط الحساب للعينٌة لذا فان مجموع مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي لها درجات الحرية قدرها (n-1) وبالتالي فان درجات الحريةٌ للتباينٌ هو ايضًا (n-1)

مثال:

لوحُظ من خلال الفترة السابقة ا ن متو سُط المبيعات الاسبوعُية من سلعة معينة كان (150) صندو قَ قامت الشركة المنتجة لهذه السلعة بعمل اعلا ن تلفزيوني الهدف منه رفع متو سُط المبيعات الاسبو عُية من تلك السلعة بَعد مضي فترة زمنية لوحُظ ان متوسُط المبيعات من هذٌه السلعة في (24) محل كان(172) صندو قَ اَلانحزاف القياسي 27.4صند وقَ هل ترى لهذا الاعلان اثر جوهري في رفع متو سُط المبيعاث الاسبو عُية عند مستوى معنو ي (0.05)؟

الحل\ $n=24$, $\delta=27.4$, $x=172$, $\mu=150$

فرضية العدم $H0: \mu = 150$

- الفرضيةٌ البديلٌة $H1: \mu > 150$

- مستوى المعنوية $\propto = 0.05$

- منطقة الرفض $T(23, 1-0.05) = T(23, 0.95) = 1.714$

- المختبر الاحصائي

$$T^{\wedge *} = \frac{x-\mu 0}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} = \frac{172-150}{\frac{27.4}{\sqrt{24}}} = 3.933$$

اتخاذ القرار:

بما ان قيمٌة T المحسوبةٌ اكثر من قيمٌة T الجدوليةٌ عند درجة حريةٌ (23) ومستوى المعنويةٌ (0.05) التي هي (1.714) لذا نرفض H0 ونقبل H1 أي ان الاعلان له اثر جوهري في رفع متوسط المبيعٌات الاسبوعيةٌ

الفصل السادس

تحليل التباين Analysis of Variance

تحليل التباين بمعيار واحد One may analysis of Variance

من المثال التالي نشرح طريقة الحل

لصناعة منتج معينه استخدمت مواد اولية من ثلاثة مصادرمختلفة اختيرت عينات من القطع المنتجة لكل مادة اولية مستعملة بقصدمعرفة ما اذا كان هناك فرق في نسبة الشوائب من القطع المنتجة من اختلاف مصدر المواد المستخدمة تحت مستوى اختبار 0.05 علما بان منطقة الرفض (8.02)

4	2	2	1	المصدر ١
7	5	4	3	المصدر ٢
9	8	8	6	المصدر ٣

الحل:

١-نحسب مجموع المفردات ومجموع مربعات المفردات للعينات

Ts1 =1+4+4+16=25 T1 =1+2+2+4=9

Ts2=9+16+25+49=99 T2=3+4+5+7 =19

T3=6+8+8+9=31 Ts3=36+64+64+81=245

٢-حسب المجموع الكلي للمفردات والمجموع الكلي لمربعات المفردات :

$$T = \sum_{i=1}^{3} Ti = 59$$
$$Ts = \sum_{i=1}^{3} Tsi = 369$$

٣-نحسب مجموع المربعات الكلي Tss (Total sum of squares)

$Tss = Ts - T^2 / N = 369 - 290.1 = 78.9$

٤-نحسب مجموع المربعات الاختلافات بين الفئات (SSB)

Sum of Squares Between Classes

$$SSB = \frac{T1^2}{n1} + \frac{T2^2}{n2} + \frac{T3^2}{n3} - \frac{T^2}{N}$$

$$SSB = \frac{9^2}{4} + \frac{19^2}{4} + \frac{31^2}{4} - \frac{59^2}{12}$$

$$SSB = \frac{81}{4} + \frac{361}{4} + \frac{961}{4} - \frac{3481}{12}$$

SSB =20.25+ 90.25 + 240.25 - 290.1

SSB = 60.65

٥-نحسب المجموع الكلي للمربعات داخل الفئات (SSW)

Sum of Squares With in Classes

وغالبا مايصطلح عليها بالخطا العشوائي

SSW = Tss - SSB = 78.9 - 60.65 = 18.25

وعليه سيكون جدول تحليل التباين:

مصدر التباين	درجة الحرية	مجموع المربعات T ss	متوسط المربعات
الاختلاف بين المجموعات	V1= 3 – 1=2	SSB = 60.65	60.65/ 2 = 30.325
الاختلاف داخل لمجموعات	V2 = 12 – 3 = 9	SS w = 18.25	18.25/ 9 = 2.03
المجموع	11	78.9	14 .9384

اي

$$F = \frac{\frac{SSB}{V1}}{\frac{SSW}{V2}} = \frac{\frac{60.65}{2}}{\frac{18.25}{9}} = \frac{30.325}{2.03} = 14.9384$$

عند مستوى معنوي 0.05 نستخرج من جدول توزيع F القيمة المرادفة تحت درجات حرية $F(2,9)$ فان منطقة الرفض عندها هي 8.02

وبما ان قيمة F المحسوبة اكبر من قيمة F الجدولية بدرجة حرية(2,9) نستنتج من اخيبارنا هذا بان نسبة الشوائب في قطع الانتاج تتاثر باختلاف المادة الاولية المستعملة أي اننا رفضنا الفرضية الاحصائية بعدم وجود فرق معنوي في نسبة الشوائب علما بانه نسبة الخطا في استنتاجنا هذا هي5%

مثال

زرعت ثماونية انواع مختلفة من الحنطة في ثلاثة قطع اراضي فاعطتنا النتائج الموجودة في الجدول ادناه اختبر عند مستوى معنوية 0.05 فيماذاكان معدل الانتاج مساويا للانواع الثمانية من الحنطة علما بان منطقة انرفض

T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	المجموع
8 7 9	5 4 7	8 7 9	10 9 6	5 4 11	12 8 6	5 7 10	7 8 8	
24	16	24	25	20	26	22	23	180

نلاحظ في هذا المثال ان عدد الاعمدة $k=8$ وعدد الصفوف $n=3$

١ -نحسب مجموع المفردات ومجموع مربعات المفردات للعينات

Ts1=64+49+81=194 T1=8+7+9=24
Ts2=16+25+49=90 T2=4+5+7 =16
Ts3=64+49+81=194 T3=8+7+9=24
Ts4=100+81+36=217 T4 =10+9+6= 25
Ts5=25+16+121=217 T5=5+4+11=20
Ts6 =144+64+36= 244 T6=12+8+6= 26
Ts7= 25+49+100= 174 T7=5+7+10= 22
Ts8= 49+64+64= 177 T8= 7+8+8= 23

٢-نحسب المجموع الكلي للمفردات والمجموع الكلي لمربعات المفردات:

$$T = \sum_{i=1}^{8} Ti = 180$$
$$Ts = \sum_{i=1}^{8} Tsi = 1452$$

٣-نحسب مجموع المربعات الكلي Tss (Total sum of squares)

$$Tss = Ts - T^2 / N = 1452 - (180)^2/24$$

$$1452 - 1350 = 102$$

٤-نحسب مجموع المربعات الاختلافات بين الفئات (SSB)

Sum of Squares Between Classes

$$SSB = \frac{T1^2}{n1} + \frac{T2^2}{n2} + \frac{T3^2}{n3} + \frac{T4^2}{n4} + \frac{T5^2}{n5} + \frac{T6}{n6} + \frac{T7^2}{n7} + \frac{T8^2}{n8} - \frac{T^2}{N}$$
$$SSB = \frac{24^2}{3} + \frac{16^2}{3} + \frac{24^2}{3} + \frac{25^2}{3} + \frac{20^2}{3} + \frac{26^2}{3} + \frac{22^2}{3} + \frac{23^2}{3} - \frac{(180)^2}{24}$$

$$SSB = 192 + 85.3 + 192 + 208.3 + 133.3 + 225.3 + 161.3 + 176.3 - 1350$$

$$SSB = 1374 - 1350 = 24$$

٥-نحسب المجموع الكلي للمربعات داخل الفئات (SSW)

Sum of Squares With in Classes

وغالبا مايصطلح عليها بالخطا العشوائي

$$SSW = Tss - SSB = 102 - 24 = 78$$

وعليه سيكون جدول تحليل التباين:

مصدر التباين	درجة الحرية	T ss مجموع المربعات	متوسط المربعات
الاختلاف بين المجموعات	V1= 8-1=7	SSB = 24	24/7 = 3.4285

الاختلاف داخل لمجموعات	V2 = 24-8= 16	S S w = 78	78/ 16 = 4.875
المجموع	23	102	0.7032

اي

$$F = \frac{\frac{SSB}{V1}}{\frac{SSW}{V2}} = \frac{\frac{24}{7}}{\frac{78}{16}} = \frac{3.4285}{4.875} = 0.7032$$

عند مستوى معنوي 0.05 نستخرج من جدول توزيع F القيمة المرادفة تحت درجات حرية F(7,16) فان منطقة الرفض عندها هي 2.66

وبما ان قيمة F المحسوبة اقل من قيمة F الجدولية بدرجة حرية(7,16) نستنتج من اخيبارنا هذا بان فرضية العدم تقع في منطقة القبول اذن تقبل H0

واجب

البيانات التالية تمثل نتائج تجربة زراعية لبيان تاثير اربعة اصناف من الحنطة وثلاثة انواع من الاسمدة في رفع متوسط انتاجية الدونم الواحدمن الحنطة

T1	T2	T3	T4	المجموع
10 9 8	7 7 6	8 5 4	5 4 4	
27	20	17	13	77

هل ترى وجود فرق جوهري بين متوسطات انتاجية الدونم الواحد من اصناف الحنطة وكذلك يبين متوسطات انتاجية الدونم الواحد باختلاف نوع السماد اختبر ذلك تحت مستوى معنوي 0.05 ومستوى 0.01 علما ان منطقة الرفض هي 4.76

سؤال\

البيانات تمثل طول شعرةالقطن (ملم) لخمسة اصناف من القطن المستورد لصالح منشاة للغزل والنسيج على اساس عينة عشوائية قوامها 10شعيرات عن كل صنف .يطلب اختبار الفرض القائل بانه لايوجد فروق جوهرية بين هذه الاصناف الخمسةتحت مستوى معنوية 0.01 علما ان قيمة معيار الاختبار النظرية هي 3.82

الصنف	طول الشعرة (ملم)	المجموع
T1	39 39 38 37 36 37 39 39 38 39	
T2	39 40 38 39 38 41 41 38 40 38	
T3	35 36 36 37 35 36 35 35 38 37	
T4	36 40 38 39 39 41 42 41 40 40	
T5	35 36 35 34 33 32 33 32 32 34	

الفصل السابع

الانحدار والارتباط البسيط

Simple Regression and Correlation

مقدمة:

في الفصول السابقة كان اهتمامنا ينصب على قضاياً الاحصاء الاستنتاجي التي تعود الى توز يعٌ ذومتغيرٌ واحدهو X اما الان فسنحول اهتمامنا الى قضاياً تخص التوز يعٌ ذو متغيرٌينٌ

(Bivariate - Dist) وسنرمزلهذينٌ المتغيرٌينٌ بالرمز (X,Y) فمثلا قديكٌون المتغيرٌ X هو عدد نبات القطن في وحدة المساحة بينٌما المتغيرٌ Y هو كميةٌ المحصول الناتج او قديكٌون

Xهودرجات الحرارة بينٌما المتغيرٌ Y هو الكميةٌ المذابة غم من الماء في مادة كمياويةٌ معينٌةٌ او قدتكون X هو المعدل الفصلي للطلبة بينٌما Y هو الدرجات النهائيةٌ لهم في مادة الاحصاء ومن ذلك تٌضح بان كل فرد من الافراد العينٌةٌ له قيأسان احدهما للمتغيرٌ X والاخر للمتغيرٌ Y فمثلا لكل طالب درجتان هما معدله الفصلي X ودرجته النهائيةٌ Y

وهناك نوعان من الانحدار:

انحدار بسيطٌ Simple Regression

انحدار متعددد Multiple Regression

الانحدار البسيطٌ (Simple Regression)

يشٌمل على متغيرٌينٌ فقط هما مستقل X و معتمد Y

اما الانحدار المتعدد Multiple Regression

يشٌمل على اكثر من متغيرٌينٌ احدهما معتمد Y و مستقل (x1 , x2,………., x n)

وسوف نقتصر في هذا الفصل على الانحدار البسيط

مثال:

البيأنات التاليةٌ تمثل الدرجة الفصليةٌ و الدرجة النهائيةٌ في درس الاحصاء لاثني عشر طالبا .
اوجد معادلة الانحدار ؟

xi	65	50	55	65	55	70	65	70	55	70	50	55
yi	85	74	76	90	85	87	94	98	81	91	76	74

الحل

X i	65	50	55	65	55	70	65	70	55	70	50	55
Y i	85	74	76	90	85	87	94	98	81	91	76	74
Xi^2	4225	2500	3025	4225	3025	4900	4225	4900	3025	4900	2500	3025
Xi y i	5525	3700	4180	5850	4675	6090	6110	6860	4455	6370	3800	4070

$$\sum xi = 65 + 50 + 55 + 65 + 55 + 70 + 65 + 70 + 55 + 70 + 50 + 55 = 725$$

$$\sum yi = 85 + 74 + 76 + 90 + 85 + 87 + 94 + 98 + 81 + 91 + 76 + 74 = 1011$$

$$\sum xiyi = 5525 + 3700 + 4180 + 5850 + 4675 + 6090 + 6110 + 6860 + 4455 + 6370 + 3800 + 4070 = 61685$$

$$\sum xi^2 = 4225 + 2500 + 3025 + 4225 + 3025 + 4900 + 4225 + 4900 + 3025 + 4900 + 2500 + 3025 = 4475$$

Y^* = Y (x) = a + b x

$$b = \frac{\sum xiyi - [(\sum xi)(\sum yi)]/n}{\sum x^2 - \frac{(\sum xi)\ \hat{}2}{n}}$$

$$= \frac{61685 - \frac{(725)(1011)}{12}}{4475 - \frac{(725)^2}{12}} = 0.897$$

a = y – b x

$$X = \frac{\sum xi}{n} = \frac{725}{12} = 60.417$$

$$Y = \frac{\sum yi}{n} = \frac{1011}{12} = 84.250$$

a = 84. 250 - (0 .897) (60.417) = 30.056

Y^* = Y (x) = a + b x = 30.056 + (0.897) X

أي قيمّة ناخذ ل X ولتكونان 50 , 70 سوف نجد منها قيمّة ال Y^* او Y(x) فتكون:

Y (50) = 30.056 + 0.897 (50) = 74 .9

Y (70) = 30.056 + 0.897 (70) = 92. 8

وبالتعويضّ في هذه المعادلة عن كل قيمّة من قيمٌ فانه يمٌكن حساب قيمٌ تقديرّيةٌ

ال Y^*, Y(x) والتي تقع جميعٌها على خط الانحدار البسيطٌ وهذه القيمٌ

موضحة في لجدول التالي

Xi	65	50	55	65	55	70	65	70	55	70	50	55
Yi	85	74	76	90	85	87	94	98	81	91	76	74
Y(x)	88.4	74.9	79.4	88.4	79.4	92.8	88.4	92.8	79.4	92.8	74.9	79.4

اذن خطوات الحل لا يجّاد معادلةا لانحدار الخطي هي :

١-نجد Xi^2 و XI Yi في الجدول .

٢-ثم نجد قيم للثوابت b , a

٣-وبعدها نجد معادلة خط الانحدار والتي هي:

$$Y^{\wedge} *= Y(x) = a + b\,x$$

ومن خواص معادلة الانحدار الخط البسيطٌ هو

١-القيمّة النقطة (x i, y i)تقع على خط الانحدار

٢-ان خط الانحدارتمّر من جميعٌ قيمٌ (x i, y i)

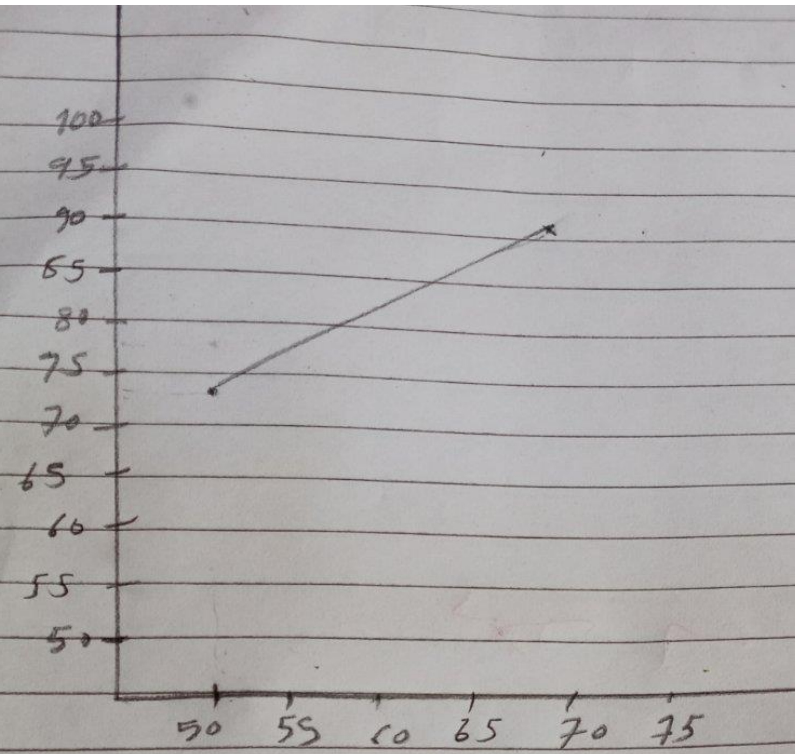
٣-ان مجموع الانحرافات عن خط الانحدار يسّاوي صفر أي ان $\sum(yi - yx)^2 = 0$

٤-ان مجموع مربعات الانحرافات عن خط الانحدار هي اقل ما يمٌكن أي ان

$$\sum (yi - yx)^2 = \quad min\,mum$$

وهذا يمٌكن ان نستخدم معادلة خط الانحدار للتنبؤ عن قيمّة Y لقيمّة معينّة مثل الدرجة النهائيةٌ المتوقعة لطالب معدله الفصلي (73) هي

$$Y\,(73) = 30.056 + 0.897\,(73) = 95.5$$


100
95
90
85
80
75
70
65
60
55
50
50 55 60 65 70 75

واجب\\

سجلت احدى دوائر الانواء الجوية البيانات لحالة الطقس ولعشرة ايام متتالية ممطرة عن كل من درجة الحرارة وكمية المطر الساقطة

درجة الحرارة	0	-2	1	-1	2	3	0	1	2	-1
كمية المطر	4	6	5	7	5	4	5	3	2	4

اوجد معادلة الانحدار